

Examen partiel du 7 octobre 2025 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie.**

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-3 + 2t, 2 - t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par l'équation cartésienne

$$y - x + 4 = 0.$$

- (1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$.
- (2) Déterminer un paramétrage affine pour la droite $\mathcal{D}_2$.
- (3) Déterminer le point d'intersection A de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$.
- (4) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et le point A . Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

Exercice II

Soit a un réel fixé. Résoudre le système d'équations suivant en discutant selon la valeur de a :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ -x - 2y + z = a \end{cases}$$

Exercice III

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

- (1) Quelle est la matrice augmentée $\hat{A}$ associée à ce système ?
- (2) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\hat{A}$ afin d'obtenir une matrice échelonnée et réduite.
- (3) En déduire l'ensemble des solutions du système.

Exercice IV

On fixe un réel a . Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère alors trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_{2,a}$ et $\mathcal{P}_{3,a}$ donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y - z = 1\} \\ \mathcal{P}_{2,a} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + az = 2\} \\ \mathcal{P}_{3,a} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x + ay + 2z = 3\}\end{aligned}$$

- (1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathcal{D} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_{2,a}$.
- (2) Déterminer l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_{3,a}$ en fonction de a . (On notera que $6 + a - a^2 = (a + 2)(3 - a)$ et on distinguera 3 cas selon les valeurs de a .)
- (3) Quelles sont les solutions du système suivant ? (*Indication : ne pas faire de calculs.*)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice V

Supposons un système d'équations linéaire tel que sa matrice augmentée est de la forme suivante :

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \square & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \square & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{array} \right),$$

où

le symbole $\star$ peut être remplacé par un coefficient arbitraire (qui peut être nul éventuellement).

le symbole $\square$ doit être remplacé par un coefficient non nul arbitraire.

- (1) Quel est le nombre de variables dans ce système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$? Combien y a-t-il d'équations ?
- (2) Peut-on dire si le système est compatible ou incompatible ? Quelle information serait nécessaire pour pouvoir trancher entre ces deux cas (compatible ou incompatible) ?
- (3) On suppose désormais que le système est compatible. Quelles sont les inconnues principales et secondaires ? Y a-t-il un nombre fini ou infini de solutions ?