Degré géométrique, degré arithmétique, hauteur de points et de variétés

notes d'exposés au séminaire des doctorants en théorie des nombres de Chevaleret, effectués les 12 novembre 2002, 24 et 29 mars 2003

Nicolas Ratazzi

Résumé : Dans cet exposé on explique les notions de degré géométrique, degré arithmétique, hauteur sur les points et hauteur sur les variétés. On rappelle les définitions ainsi que les propriétés usuelles des ces différents objets. Dans le cas du degré arithmétique sur Spec $\mathcal{O}_K$, nous donnons la preuve des quelques propriétés simples que nous rappelons, les démonstrations faciles n'étant pas toujours très détaillées dans la littérature.

Table des matières

Email address : ratazzi@math.jussieu.fr

Soit K un corps. Si F/K est une extension de corps et X un Spec K-schéma, alors, la notation X_F dénote le produit fibré $X \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}\, F$ et $X(F)$, appelé l'ensemble des *points F-rationnels de X*, dénote l'ensemble $\mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}\, F, X)$. On fera fréquemment l'abus consistant à écrire F au lieu de Spec F quand F est un corps. On dit que V est une *variété algébrique sur* K si V est un K-schéma de type fini, irréductible et géométriquement réduit. Par sous-variété on entendra toujours sous-variété qui est un sous-schéma fermé. On appelle *courbe* toute variété de dimension 1 et on note $\mathbb{P}^n$ ou $\mathbb{P}^n_K$ l'espace projectif sur K de dimension n.

1 Degré géométrique

Dans ce paragraphe on définit le degré géométrique de deux façons : la première dans le cas projectif, en utilisant le polynôme de Hilbert ; la seconde en utilisant la théorie de l'intersection. On commence par définir le degré géométrique dans le cas des variétés projectives. Pour cela, on se ramène au cas des sous-variétés de $\mathbb{P}^n$: soient V une variété projective sur K et L un fibré en droites très ample, il existe un plongement $\varphi : V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ correspondant à L tel que si $\mathcal{O}(1)$ dénote le fibré standard sur $\mathbb{P}^n$ (dont les sections globales sont les polynômes homogènes en $n+1$ variables de degré 1), alors $L = \varphi^*\mathcal{O}(1)$. Supposons un instant connue la notion de *degré projectif* d'une sous-variété de $\mathbb{P}^n$.

Définition 1 En notant $\deg_K(.)$ le degré projectif, on définit, et on note $\deg_L V$, *le degré de V* relativement au fibré en droites très ample L, par

$$\deg_L V = \deg_K(\varphi(V)).$$

Il suffit donc de définir le degré d'une sous-variété de $\mathbb{P}^n$. C'est ce que l'on fait dans ce qui suit.

Soit V une sous-variété de $\mathbb{P}^n$. Elle est déterminée par la donnée d'un idéal saturé $I = I(V)$ de $K[x_0, \ldots, x_n]$. On pose $A = K[x_0, \ldots, x_n]/I(V)$ et on note A_ν la composante homogène de degré ν de A.

Définition 2 Un objet fondamental associé à V est sa *fonction de Hilbert*

$$H(V, \cdot) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Elle est définie par la formule

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad H(V, \nu) = \dim_K A_\nu.$$

Le résultat principal concernant cette fonction est qu'elle est asymptotiquement polynomiale. Autrement dit, on a le

Théorème 1 (Hilbert) *Il existe un unique polynôme, $P(V,\cdot)$ de degré $d = \dim V$, tel que*

$$\forall \nu \gg 0, \qquad P(V,\nu) = H(V,\nu).$$

On appelle ce polynôme le *polynôme de Hilbert* de V. Son terme dominant est de la forme

$$\frac{m}{d!}\nu^d.$$

Définition 3 Avec les notations précédentes, on définit le *degré projectif* de V comme étant le nombre m. On le note $\deg_K(V)$.

Revenons au cas général d'une variété projective V munie d'un fibré en droites (très) ample L. On peut en fait définir le polynôme de Hilbert de manière complètement explicite et pas uniquement pour des valeurs asymptotiques :

Théorème 2 (Riemann-Roch) *Si $\chi(V, L^{\otimes\nu}) = \sum(-1)^i \dim_K H^i\left(V, L^{\otimes\nu}\right)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de V, alors,*

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \qquad P(V,\nu) = \chi(V, L^{\otimes\nu}).$$

Exemple 1 Dans le cas d'une courbe V géométriquement irréductible, lisse sur un corps K algébriquement clos, on rappelle que par définition *le genre* $g(V)$ est la dimension du K-espace vectoriel $\Gamma(V, \Omega^1_{V/K})$. Par dualité de Serre (valable sur une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos), on peut également voir le genre comme étant la dimension du K-espace vectoriel $H^1(V, \mathcal{O}_V)$. Le théorème 2 précédent nous donne $P(V, 0) = \chi(V, \mathcal{O}_V)$. Or un théorème classique d'annulation de la cohomologie de Grothendieck nous assure qu'ici,

$$\chi(V, \mathcal{O}_V) = \dim_K \Gamma(V, \mathcal{O}_V) - \dim_K H^1(V, \mathcal{O}_V) = 1 - g(V).$$

En effet, pour une variété X/K propre, lisse et géométriquement connexe, toute fonction régulière est constante (cf. par exemple le cours de DEA d'Oesterlé 2002/2003). Sur un corps algébriquement clos, on peut donc non seulement lire le degré, mais aussi le genre d'une courbe projective sur son polynôme de Hilbert. De plus en réappliquant maintenant le même argument avec $\nu = 1$ et en utilisant les notations classiques en géométrie, on obtient le théorème de Riemann-Roch usuel,

$$l(L) - l(K_V - L) = \deg_L V + 1 - g(V).$$

Il se trouve que le degré projectif est un nombre entier. Sur $\mathbb{C}$ on peut montrer qu'il s'agit du cardinal du schéma de dimension zéro $X \cap H$, pour tout plan général H de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de dimension $n - d$. Le problème de cette assertion est qu'il faut définir la notion de "général". Ici dire que le plan est général, signifie qu'il est tel qu'une déformation infinitésimale ne change pas le résultat (autrement dit, quand on “bouge un peu” le plan, le nombre considéré ne change pas). Il s’agit donc bien d’une définition géométrique.

Exemple 2 Sur $\mathbb{C}$ le degré d’un point fermé est 1. De même, étant données une courbe ou une hypersurface dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ on peut lire le degré sur un dessin (il suffit de couper la courbe par un hyperplan général et l’hypersurface par une droite générale et de compter le cardinal obtenu).

On peut donner une construction rigoureuse de cette approche du degré d’une variété relativement à un diviseur en utilisant le produit d’intersection. C’est la méthode la plus intrinsèque. En fait elle ne nécessite pas de supposer la variété projective mais seulement propre. Comment fait-on ? On se donne une variété X sur un corps K, un fibré en droites (faisceau inversible, diviseur de Cartier) L sur X et une sous-variété V de dimension k de X. L’objectif est de définir un entier appelé *degré de* V relativement à L associé à ces données et qui coïncide avec celui précédemment défini dans le cas projectif. En vu de définir ce degré, on construit un produit d’intersection, noté $\cdot$, sur les diviseurs en suivant le livre de Fulton [Ful98] :

1.1 Théorie de l’intersection

Dans tout ce paragraphe K est un corps et X/K une variété propre sur K de dimension n.

1.1.1 Cycles et équivalence rationnelle

Définition 4 Si R est un anneau local de dimension zéro, on définit la *longueur de* R que l’on note $\lg(R)$, comme étant la longueur n d’une chaine

$$R \supset \mathfrak{m} = I_1 \supset \ldots \supset I_n = \{0\}$$

d’idéaux tels que $I_k/I_{k+1} \simeq R/\mathfrak{m}$ comme R-modules. (Comme R est local de dimension zéro, la longueur est finie et par le théorème de Jordan-Hölder, cette longeur est bien définie, c’est à dire, indépendante du choix d’une chaine ayant ces propriétés.)

Soit V une sous-variété de X de codimension 1. L’anneau local $\mathcal{O}_{V,X}$ est par définition, l’anneau local au point générique de V. Il est de dimension 1. Soit $s \in K^*(X)$, on veut définir l’*ordre* d’annulation *de* s selon V, que l’on note $\mathrm{ord}_V(s)$, de sorte que ce soit un homomorphisme, *i.e.*, tel que :

$$\forall s,t \in K^*(X) \quad \mathrm{ord}_V(st) = \mathrm{ord}_V(s) + \mathrm{ord}_V(t).$$

Tout $s \in K^*(X)$ peut s’écrire sous la forme $s = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathcal{O}_{V,X}$. On a donc nécessairement, $\mathrm{ord}_V(s) = \mathrm{ord}_V(a) - \mathrm{ord}_V(b)$. Ainsi il suffit de définir ord_V pour les éléments de $\mathcal{O}_{V,X}$. On pose alors :

$$\forall s \in \mathcal{O}_{V,X} \quad \mathrm{ord}_V(s) = \lg_{\mathcal{O}_{V,X}}\left(\mathcal{O}_{V,X}/(s)\right).$$

Pour $s \in K^*(X)$ fixé, il existe seulement un nombre fini de sous-variétés V de codimension 1 de X telle que $\mathrm{ord}_V(s) \neq 0$.

Sur la variété X on peut maintenant construire un morphisme naturel φ du groupe des diviseurs de Cartier, noté CaDiv X, dans le groupe des $n-1$-cycles $Z_{n-1}(X)$: soit $D = (U_i, f_i)_{i\in I} \in$ CaDiv

X et soit V une sous-variété de codimension 1 de X. On pose

$$\mathrm{ord}_V D = \mathrm{ord}_V f_i, \text{ où } i \text{ est tel que } U_i \cap V \neq \emptyset,$$

ceci ayant un sens car si j est tel que $U_j \cap V \neq \emptyset$, alors $\frac{f_i}{f_j}$ est inversible sur $U_i \cap U_j$, donc $\mathrm{ord}_V f_i = \mathrm{ord}_V f_j$.

Partant d'un diviseur de Cartier D, on définit ainsi un diviseur de Weil

$$[D] = \sum_V \mathrm{ord}_V D\ [V].$$

L'application φ qui à D associe $[D]$ est un morphisme de groupe.

Définition 5 On appelle groupe des k-cycles sur X, et on note $Z_k(X)$, le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés V de dimension k de X. Un élément de $Z_k(X)$ est appelé un *k-cycle* et si V est une sous-variété k-dimensionnelle de X, on note $[V]$ (ou abusivement V) l'élément correspondant de $Z_k(X)$.

Définition 6 Si $\alpha = \sum_V n_V [V]$ est un cycle, on définit le *support* de α comme étant

$$\mathrm{supp}\ \alpha = |\alpha| = \bigcup_{n_V \neq 0} V.$$

Si D est un diviseur de Cartier, on appelle *support* de D, et on note $\mid D \mid$, le support du diviseur de Weil associé.

Définition 7 Un k-cycle α est *rationnellement équivalent* à 0, $\alpha \sim 0$, s'il existe un nombre fini de sous-variétés W_i de dimension $k+1$ de X et des $s_i \in K^*(W_i)$ tels que $\alpha = \sum \mathrm{div}(s_i)$. Comme $\mathrm{div}(s^{-1}) = -\mathrm{div}(s)$, les cycles rationnellement équivalents à zéro forment un sous-groupe $\mathrm{Rat}_k(X)$ de $Z_k(X)$. Le groupe des classes de k-cycles modulo équivalence rationnelle sur X est le groupe noté :

$$A_k(X) = Z_k(X)/\mathrm{Rat}_k(X).$$

On définit alors

$$Z_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim(X)} Z_k(X) \text{ et de même, } A_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim(X)} A_k(X).$$

Produit d'intersection sur les diviseurs : soit V une sous-variété de X sur K de dimension k. On note D le diviseur de Cartier associé au faisceau inversible L et on définit $D \cdot V$, noté également $D \cdot [V]$, dans $\mathrm{A}_{k-1}(\mid D \mid \cap V)$ comme suit :

Notons $j : V \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. Deux cas se présentent :

- Si $V \subsetneq \mid D \mid$, alors D se restreint en un diviseur de Cartier, j^*D sur V et on pose

$$D \cdot [V] = [j^*D].$$

- Si $V \subseteq\mid D \mid$, on prend l'image réciproque faisceautique de D, *i.e.*, $j^*\mathcal{O}_X(D)$. On obtient ainsi un faisceau inversible sur V. À ce faisceau correspond un diviseur de Cartier, C tel que $\mathcal{O}_V(C) = j^*\mathcal{O}_X(D)$. On note $[C]$ sa classe de diviseur de Weil dans $\mathrm{A}_{k-1}(V)$ et on pose

$$D \cdot [V] = [C].$$

Par linéarité, on en déduit un produit d'intersection entre les diviseurs de Cartier et les cycles de dimension quelconque de X.

1.2 Degré d'un cycle

On note toujours X/K une variété propre de dimension n.

Définition 8 Soit $\alpha = \sum n_P[P]$ un 0-cycle sur X. En identifiant $\mathbb{Z}$ et $A_0(\mathrm{Spec}\ K)$, on définit le *degré du 0-cycle* α comme étant :

$$\deg\, \alpha = \sum n_P[K(P) : K] = \pi_*(\alpha),$$

où π est le morphisme structural de X vers Spec K. On peut maintenant définir le *degré relativement à* L d'une sous-variété V de X : en appliquant k fois l'opération "prendre le produit d'intersection avec D", on obtient un cycle de dimension zéro, $\sum n_P[P]$. On pose alors

$$\deg_L V = \pi_*\left(L^k \cdot [V]\right) = \sum n_P[K(P) : K],$$

où π est le morphisme structural de X vers Spec K. On peut montrer que dans le cas projectif, on retombe sur le degré projectif défini précédemment.

Exemple 3 Si $x \in X(\overline{K})$ est un point $\overline{K}$-rationnel de X, en notant $V := \overline{\{x\}}$ la variété définie en prenant l'image schématique de $x \in X_{\overline{K}}$ dans X, on a :

$$\deg_L(V) = [K(x) : K].$$

2 Degré arithmétique sur Spec $\mathcal{O}_K$

Dans cette section, on donne la définition du degré arithmétique sur Spec $\mathcal{O}_K$ le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K et on donne une application de cette notion : l'inégalité des pentes. Cette dernière, introduite pour la première fois par J.-B.Bost dans son article [Bos96], a connu récemment quelques belles applications en géométrie diophantienne (voir par exemple [Bos96], [Bos01] et [Gau01]).

2.1 Degré arithmétique : définition

Désormais K est un corps de nombres. On note $S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ le spectre de l'anneau des entiers de K. Alors que dans le cas des corps de fonctions, S représente l'ensemble de toutes les places de K, dans le cas des corps de nombres, $S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ ne représente (en oubliant le point générique) que les places finies. Pour pouvoir étendre l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions, il faut aussi prendre en compte les places à l'infini : c'est l'idée de la théorie initiée par Arakelov [Ara74].

Dans la suite, on note S^0 l'ensemble des points fermés de S (*i.e.*, les places finies de $\mathcal{O}_K$), S_∞ l'ensemble des places archimédiennes et $M_K = S_{\mathrm{Ar}} := S^0 \amalg S_\infty$ l'ensemble de toutes les places de K. Pour $v \in S^0$ au dessus d'un nombre premier p, on normalise la valeur absolue v-adique par $\mid p \mid_v = p^{-1}$, et on pose $|| \cdot ||_v = | \cdot |_v^{d_v}$ où d_v est le degré local $[K_v : \mathbb{Q}_p]$. De même si v est une place archimédienne, on prend pour valeur absolue la valeur absolue usuelle et on pose $d_v = 1$ si $K_v = \mathbb{R}$ et $d_v = 2$ si $K_v = \mathbb{C}$.

Définition 9 Un *fibré vectoriel métrisé* de rang r sur $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est un $\mathcal{O}_K$-module E projectif (*i.e.*, sans torsion puisque $\mathcal{O}_K$ est de Dedekind) de rang r, muni d'une collection $\{|| \cdot ||_v\}_{v \in S_\infty}$, telle que $|| \cdot ||_v$ est une norme hermitienne sur le K_v-espace vectoriel $E_{K_v} = E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$, vérifiant

$$|| \, x \, ||_\sigma = || \, \overline{x} \, ||_{\overline{\sigma}}, \quad \text{pour tout plongement } \sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

On note un tel fibré métrisé $\overline{E} = (E, || \cdot ||_v)$.

2.1.1 Exemples de métriques

Dans ce paragraphe, les variétés X et Y sont des variétés différentielles analytiques complexes. On appliquera ensuite ceci au cas où, partant d'une variété algébrique lisse sur un corps de nombres K, on associe à un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$-variété algébrique lisse $X_\sigma = X \times_\sigma \mathbb{C}$, puis l'ensemble de ses points complexes $X_\sigma(\mathbb{C})$ qui est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe.

La métrique image réciproque : soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques et $\overline{L}$ un fibré en droites sur Y muni d'une métrique hermitienne. On munit le fibré en droites f^*L d'une structure hermitienne en posant, pour tout $x \in X$,

$$|| \, f^* s \, ||_x := || \, s \circ f \, ||_{f(x)} \, .$$

La métrique produit tensoriel : soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés hermitiens sur la variété X. On munit $E \otimes F$ d'une structure hermitienne en posant,

$$\langle e_i \otimes f_i, e_j \otimes f_j \rangle_x := \langle e_i, e_j \rangle_x \cdot \langle f_i, f_j \rangle_x \, .$$

La métrique somme directe : soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés hermitiens sur la variété X. On munit $E \oplus F$ d'une structure hermitienne en posant,

$$\langle e_i \oplus f_i, e_j \oplus f_j \rangle_x := \langle e_i, e_j \rangle_x + \langle f_i, f_j \rangle_x \, .$$

La métrique produit exterieur : soient $\overline{E}$ un fibré hermitien de rang r sur la variété X et $k \leq r$. On munit $\bigwedge_{l=1}^k E$ d'une structure hermitienne en posant,

$$|| \bigwedge_{l=1}^{k} e_l \, ||_x^2 := \det \left(\langle e_i, e_j \rangle_x \right),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit hermitien définissant la métrique sur $\overline{E}$.

La métrique duale : soit $\overline{E}$ un fibré hermitien sur X. On muni le fibré dual $E^{\vee} = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})$ d'une structure hermitienne en posant,

$$|| f ||_x := \sup_{s \in E} \frac{|| f(s) ||_x}{|| s ||_x},$$

où on a muni $\mathbb{C}$ de sa métrique naturelle $|| 1 ||_x = 1$.

2.1.2 Degré arithmétique

Le *degré d'Arakelov* (ou *degré arithmétique*) d'un fibré en droites métrisé (sur Spec $\mathcal{O}_K$) $\overline{L} = (L, || \cdot ||_v)$ est défini en prenant un élément non nul $s \in L$ et en posant

$$\widehat{\deg}_n \ (\overline{L}) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \left(\log \# (L/s\mathcal{O}_K) - \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log || s ||_\sigma \right),$$

le n en indice signifiant que l'on a normalisé par $[K : \mathbb{Q}]$.

Proposition 1 *Le degré d'Arakelov d'un fibré en droites ne dépend pas du choix de la section s.*

Démonstration : Soient s et t deux sections globales non nulles du fibré en droites L. Il existe un $k \in K^*$ tel que $t = ks$, donc

$$\begin{aligned} - \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || t ||_v &= - \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || ks ||_v \\ &= - \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || s ||_v - \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || k ||_v \\ &= - \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || s ||_v \ \text{ par la formule du produit.} \end{aligned}$$

Il reste pour conclure à voir que

$$\log \# (L/s\mathcal{O}_K) = - \sum_{v \in S^0} \log || s ||_v \,.$$

Or on sait par [Bou61] que, si L est un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang 1,

$$(L/s\mathcal{O}_K) = \prod_{\mathfrak{p}} (L/s\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(L_{\mathfrak{p}}/s\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}} \right).$$

De plus, $L_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe isométriquement (par le morphisme $j_{\mathfrak{p}}$) à $\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$. On a donc

$$(L/s\mathcal{O}_K) \simeq \prod_{\mathfrak{p}} \left(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}/j_{\mathfrak{p}}(s)\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}} \right) \simeq \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(j_{\mathfrak{p}}(s))}.$$

Ainsi, en passant aux cardinaux,

$$\#\left(L/s\mathcal{O}_K\right) = \prod_{\mathfrak{p}\in S^0} e^{d_\mathfrak{p}\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(j_\mathfrak{p}(s))} = \prod_{\mathfrak{p}\in S^0} \|\, s \,\|_\mathfrak{p}^{-1} .$$

Ceci permet de conclure. $\square$

Remarque 1 Notons au passage que si $s \in L$ est non nulle, on a montré la formule

$$\widehat{\deg}_n \;(\overline{L}) = \frac{-1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in S_{\mathrm{Ar}}} \log \|\, s \,\|_v .$$

Définition 10 On définit le *degré arithmétique d'un fibré vectoriel* F *métrisé de rang fini* d en posant :

$$\widehat{\deg}_n \;(\overline{F}) = \widehat{\deg}_n \;\left(\overline{\bigwedge_{k=1}^{d} F}\right).$$

2.2 Degré arithmétique : propriétés

Dans tout ce pararaphe, on travaille avec des fibrés vectoriels sur Spec $\mathcal{O}_K$.

2.2.1 Propriétés classiques

Proposition 2 *Soit* $\overline{\mathcal{O}_K}$ *le fibré trivial muni de sa métrique triviale* $\|\, 1 \,\|_v = 1$. *On a* $\widehat{\deg}_n \;\overline{\mathcal{O}_K} = 0$.

Démonstration : Par la remarque 2.1.2, si s est une section non nulle de $\mathcal{O}_K$,

$$\widehat{\deg}_n \;\overline{\mathcal{O}_K} = \frac{-1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in S_{\mathrm{Ar}}} \log \|\, s \,\|_v .$$

En appliquant ceci avec $s = 1$ on constate que le membre de droite est nul. $\square$

Proposition 3 *Soient* $\overline{E}$ *et* $\overline{F}$ *deux fibrés vectoriels hermitiens de rang respectif* m *et* n *et* $\overline{L}$ *un fibré en droites hermitien de rang* 1. *On a*

1. $\widehat{\deg}_n \;(\overline{E\otimes F}) = m\widehat{\deg}_n \;\overline{E} + n\widehat{\deg}_n \;\overline{F}$.
2. $\widehat{\deg}_n \;(\overline{E\oplus F}) = \widehat{\deg}_n \;\overline{E} + \widehat{\deg}_n \;\overline{F}$.
3. $\widehat{\deg}_n \;\overline{L^\vee} = -\widehat{\deg}_n \;\overline{L}$.

Démonstration : On commence par montrer 1. dans le cas où $m = n = 1$. Soient $s \in E$, $t \in F$ deux sections telles que $s \otimes t \neq 0$. Pour tout $v \in S_{\mathrm{Ar}}$, on a $\|\, s\otimes t \,\|_v = \|\, s \,\|_v \|\, t \,\|_v$. En effet, si $v \in S_\infty$ c'est la définition et si $v \in S^0$, $E_v \otimes F_v$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{K_v}$ par l'isomorphisme qui envoie $s\otimes t$ sur $j_v^E(s)j_v^F(t)$. Ainsi

$$\|\, s\otimes t \,\|_v = \|\, j_v^E(s)j_v^F(t) \,\|_v = \|\, j_v^E(s) \,\|_v \|\, j_v^F(t) \,\|_v = \|\, s \,\|_v \|\, t \,\|_v .$$

En appliquant la remarque p. 9, on conclut dans ce cas. Dans le cas général, on utilise l'isomorphisme isométrique

$$\bigwedge_{l=1}^{nm} \overline{E \otimes F} \simeq \left(\bigwedge_{l=1}^{n} \overline{E} \right)^{\otimes m} \otimes \left(\bigwedge_{l=1}^{m} \overline{F} \right)^{\otimes n}.$$

Le premier cas permet alors de conclure.
2. On applique le 1. en utilisant l'isomorphisme isométrique

$$\bigwedge_{l=1}^{n+m} \overline{E \oplus F} \simeq \bigoplus_{l=1}^{n+m} \left(\bigwedge_{k=1}^{l} \overline{E} \otimes \bigwedge_{k=1}^{n+m-l} \overline{F} \right) \simeq \bigwedge_{l=1}^{n} \overline{E} \otimes \bigwedge_{l=1}^{m} \overline{F} ...$$

3. Par définition du faisceau inverse (ou fibré dual) on a $L \otimes L^\vee \simeq \mathcal{O}_K$. En munissant $\mathcal{O}_K$ de sa métrique triviale et $L^\vee$ de la métrique duale, cet isomorphisme est isométrique. Ainsi, on a $\widehat{\deg}_n \left(\overline{L \otimes L^\vee} \right) = 0$ par la proposition 2. En appliquant le point 1. on conclut. $\square$

2.2.2 Inégalité des pentes

Définition 11 Soit $\overline{E}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré vectoriel, on définit *la pente de* $\overline{E}$ par

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{\widehat{\deg}_n \overline{E}}{\mathrm{rg} E}.$$

Définition 12 Avec les mêmes notations, on définit *la pente maximale de* E par

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \max \widehat{\mu}(\overline{F}), \text{ où}$$

le max porte sur les sous-$\mathcal{O}_K$-fibrés de E de rang supérieur à 1 et munis des métriques déduites de celle de $\overline{E}$ par restriction.

Définition 13 Si φ est un morphisme entre deux $\mathcal{O}_K$-fibrés hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$, on note $h(\varphi)$ et on appelle *hauteur de* φ le nombre

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || \varphi ||_v, \text{ où,}$$

$|| \varphi ||_v$ est la norme d'opérateur de φ_{K_p} et $|| \varphi ||_\sigma$ la norme de l'opérateur $\varphi_{\mathbb{C},\sigma}$.

Lemme 1 *Soit $\varphi : E \to F$ un morphisme entre $\mathcal{O}_K$-fibrés hermitiens de rang r. Alors,*

$$\forall v \in S_{\mathrm{Ar}}, \quad || \bigwedge_{l=1}^{r} \varphi ||_v \leq || \varphi ||_v^r .$$

Démonstration : Soit $v \in S_\infty$. En choisissant des bases orthonormées pour les espaces hermitiens E_{K_v} et F_{K_v}, on identifie φ à une matrice de $M_r(\mathbb{C})$. Par définition de la puissance extérieure, $|| \bigwedge_{l=1}^{r} \varphi ||_v = || \det \varphi ||_v$. Or le déterminant est le produit des valeurs propres, alors que $|| \varphi ||_v$ est la norme de la plus grande valeur propre. D'où l'inégalité. Dans le cas où $v \in S_0$, cela résulte de l'inégalité ultramétrique. $\square$

Avec les notations précédentes, on a le théorème suivant, dû à J.-B. Bost,

Théorème 3 (Inégalités des pentes 1) *Si le morphisme $\varphi_K : E_K \to F_K$ est injectif, alors,*

$$\widehat{\deg}_n \ \overline{E} \leq \mathrm{rg}(E)\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\varphi)\Big).$$

Démonstration : Le morphisme φ_K étant injectif on a un isomorphisme

$$\varphi : E_K \to \varphi(E_K).$$

On note F' un sous-$\mathcal{O}_K$-module de F tel que $F'_K = \varphi_K(E_K)$. L'application

$$\bigwedge_{l=1}^{r} \varphi_K : \bigwedge_{l=1}^{r} E_K \to \bigwedge_{l=1}^{r} F'_K$$

est bijective donc non nulle. En particulier elle définit un élément non-nul du K-espace vectoriel de dimension 1 associé au fibré en droites hermitien $\overline{L} := \left(\bigwedge_{l=1}^{r} \overline{E}\right)^{\vee} \otimes \bigwedge_{l=1}^{r} \overline{F'}$. En utilisant la proposition 3, on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}_n \ \overline{E} - \widehat{\deg}_n \ \overline{F'} &= -\widehat{\deg}_n \ \overline{L} \\
&= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || \bigwedge_{l=1}^{r} \varphi \ ||_v \\
&\leq \frac{r}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S_{\mathrm{Ar}}} \log || \ \varphi \ ||_v \qquad\qquad \text{par le lemme 1} \\
&= rh(\varphi).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la définition de $\widehat{\mu}_{\max}$ implique que $\widehat{\deg}_n \ \overline{F'} \leq r\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})$. $\square$

En fait, dans la pratique c'est plutôt une version filtrée de cette inégalité qui est utile. On va donc filtrer : soit F_K un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration

$$\{0\} = F_K^{N+1} \subset F_K^N \subset \ldots \subset F_K^0 = F_K$$

par des K-espaces vectoriels. On suppose de plus que les sous-quotients successifs

$$G_K^l = F_K^l / F_K^{l+1}$$

sont les K-espaces vectoriels sous-jacents à certains fibrés vectoriels hermitiens $\overline{G}^l$ sur Spec $\mathcal{O}_K$. Soient par ailleurs $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien et $\varphi_K : E_K \to F_K$ une application K-linéaire injective. On pose pour tout $l \in [\![0, N+1]\!]$

$$E_K^l = \varphi_K^{-1}(F_K^l), \text{ et } E^l = E \cap E_K^l.$$

Ainsi les sous-$\mathcal{O}_K$-modules E^l de E forment une filtration

$$\{0\} = E^{N+1} \subset E^N \subset \ldots \subset E^0 = E.$$

De plus, munie des métriques de restriction sur $\overline{E}$, cette filtration est une filtration de $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens. Enfin, pour tout $l \in [\![0, N]\!]$ on considère les applications

$$\varphi_K^l : E_K^l \to G_K^l \ \text{ et } \ \widetilde{\varphi}_K^l : E_K^l / E_K^{l+1} \to G_K^l$$

définies par composition de φ_K et de la projection sur G_K^l. On peut maintenant énoncer la version filtrée du théorème précédent.

Théorème 4 (Inégalités des pentes 2) *Avec les notations précédentes, on a,*

$$\widehat{\deg}_n\ \overline{E} \leq \sum_{l=0}^{N} \mathrm{rg}\left(E^l/E^{l+1}\right)\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}^l) + h(\varphi^l)\right)...$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la preuve précédente à chaque cran de la filtration et de sommer le tout ensuite. C'est l'inégalité (**4.14**) de la *Proposition* **4.6.** de [Bos01]. $\square$

On donne également une variante qui peut tre utile.

Théorème 5 *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_n\ \overline{E}\ \leq\ & \textstyle\sum_{l=0}^{N} \mathrm{rg}\left(E^l/E^{l+1}\right)\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G^l}) + \displaystyle\sum_{p \text{ premiers}} \log \|\ \varphi^l\ \|_p\ \right)\\ & + \textstyle\sum_{l=0}^{N} \log \|\ \bigwedge^{max} \widetilde{\varphi}^l\ \|_{\mathbb{C}}\ .\end{aligned}$$

Démonstration : On reprend la preuve précédente et on ne remplace pas les termes $\|\ \bigwedge^r \varphi^l\ \|$ par $\|\ \varphi^l\ \|^r$ aux places archimédiennes. $\square$

3 Hauteur sur les points

3.1 Hauteur sur $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$

Soient K un corps de nombres de degré d et M_K l'ensemble des valeurs absolues (deux à deux non équivalentes) sur K, normalisées comme précédemment par $|p|_v = p^{-1}$ pour toute place finie v au dessus du nombre premier p. On note $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_p]$ le degré local et on définit la *hauteur (logarithmique absolue)* sur $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ par

$$h(x_0 : \ldots : x_n) = \frac{1}{d} \sum_{v \in M_K} d_v \log \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|_v.$$

On voit sur la définition que la hauteur d'un point est toujours positive ou nulle. Dans cette définition, la renormalisation par $\frac{1}{d}$ sert juste à faire en sorte que le réel $h(x)$ soit indépendant du choix du corps K contenant x. De plus par la formule du produit, la hauteur est aussi indépendante du choix d'un système de coordonnées projectives.

Proposition 4 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$. On a*

$$h(x^r) = |\ r\ |\ h(x), \quad \text{et}, \quad h(\sigma(x)) = h(x).$$

Cette hauteur vérifie les théorèmes de Northcott et de Kronecker :

Théorème 6 (Northcott) *Soient A et B deux réels. L'ensemble*

$$\left\{ x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \ / \ [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq A, \quad h(x) \leq B \ \right\}$$

est fini.

Théorème 7 (Kronecker) *Soient $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ non nul et i tel que $x_i \neq 0$. Alors,*

$$h(x) = 0 \iff \forall j \in [\![1, n]\!] \ \frac{x_j}{x_i} \in \mu_\infty \cup \{0\}.$$

3.2 Hauteur de Néron-Tate sur les variété abéliennes

Définition 14 Soient X/K une variété projective et L un fibré très ample sur V. En notant φ_L le plongement de V dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ associé à L (c'est à dire tel que $L = \varphi_L^* \mathcal{O}(1)$), on définit la *hauteur* $h_L \ : \ X(\overline{K}) \to \mathbb{R}^+$ par $h_L(P) := h(\varphi_L(P))$, où $h(x_0 : \ldots : x_n)$ est la hauteur logarithmique absolue sur $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ définie précédemment.

Dans le cas où $X = A$ est une variété abélienne et où L est de plus symétrique, cette hauteur vérifie un certain nombre de propriétés agréables. Nous indiquons les plus essentielles. On renvoie par exemple au livre [HS00] Part B pour tout ce qui concerne les hauteurs.

Proposition 5 *Sur une variété abélienne A/K munie d'un fibré en droites L très ample et symétrique, la hauteur h_L vérifie :*
1. $\forall P \in A(\overline{K}) \qquad h_L([m]P) = m^2 h_L(P) + O(1).$
2. $\forall P, Q \in A(\overline{K}) \qquad h_L(P+Q) + h_L(P-Q) = 2h_L(P) + 2h_L(Q) + O(1).$
3. $\forall h > 0 \ \ \forall d > 0$ l'ensemble $\{P \in A(\overline{K}) / \ h_L(P) \leq h, \quad \deg(P) \leq d\}$ est fini.
Dans les affirmations précédentes, la constante $O(1)$ dépend de A, L et m, mais pas des points P et Q.

Toujours dans le cas des variétés abéliennes, on peut à partir de cette hauteur en construire une plus jolie : la *hauteur de Néron-Tate*, notée $\widehat{h}_L$. La définition est la suivante :

$$\widehat{h}_L(P) = \lim_{n \to +\infty} \frac{h_L([2^n]P)}{4^n}.$$

Les propriétés classiques de cette hauteur sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 8 *Soient A/K une variété abélienne et L un fibré ample et symétrique sur A. La hauteur canonique est une forme quadratique positive semi-définie sur $A(\overline{K})$, telle que*

1. $\forall P \in A(\overline{K}) \quad \widehat{h}_L(P) = h_L(P) + O(1)$

2. $\widehat{h}_L(P) = 0 \iff P \in A_{\text{tors}}.$

4 Hauteur sur les variétés

Il y a essentiellement deux approches de la notion de hauteur d'une variété, toutes deux consistant en une généralisation de la notion de hauteur d'un point. On a d'une part l'approche de Philippon (cf. [Phi91], [Phi94], [Phi95]), consistant comme ce que l'on a fait au début du paragraphe précédent, à se ramener au cas d'une sous-variété d'un $\mathbb{P}^n$, puis dans ce cas, à donner une définition élémentaire. D'autre part, il y a l'approche de Bost-Gillet-Soulé [BGS94] fondée sur les travaux de Gillet-Soulé [GS90] [GS92], consistant à travailler en parfaite analogie avec le degré en construisant un produit d'intersection arithmétique, puis en voyant la hauteur comme un degré arithmétique (ou degré d'Arakelov). Un théorème de Soulé (th.3 p.366 de [Sou92]) indique que ces deux notions de hauteurs coïncident, à condition de prendre les bonnes conventions pour les places à l'infini dans la définition de Philippon, *i.e.*, en prenant la définition de hauteur qu'il donne dans [Phi95] paragraphe 2.

4.1 Définition à la Bost-Gillet-Soulé

Contrairement au cas géométrique où la construction du produit d'intersection sur les diviseurs n'est pas dure, dans le cas arithmétique c'est difficile. On ne va donc pas définir le produit d'intersection arithmétique (même sur les diviseurs). Par contre, on peut donner une définition auto-contenue, suivant [BGS94] proposition 3.2.1., de la hauteur en utilisant une construction par récurrence. C'est ce que l'on fait dans ce qui suit.

Le corps K est toujours un corps de nombres, d'anneau d'entier $\mathcal{O}_K$. On note $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le schéma affine associé. Si X/S est un S-schéma de fibre générique une K-variété, on notera $X(\mathbb{C})$ la variété analytique complexe réunion disjointes des variétés $X_\sigma(\mathbb{C})$ où $X_\sigma(\mathbb{C})$ est la variété (analytique complexe) des points complexes de la variété (algébrique complexe) X_σ déduite de X par extension des scalaires de $\mathcal{O}_K$ à K, puis de K à $\mathbb{C}$ selon le morphisme σ, les σ décrivant l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$.

Définition 15 On dit que X est une *variété arithmétique* sur S si c'est un S-schéma plat quasi-projectif, tel que sa fibre générique X_K soit une K-variété lisse.

Exemple 4 Un schéma abélien, le modèle de Néron d'une variété abélienne, le modèle de Weierstrass d'une courbe elliptique, son modèle minimal sont des exemples de variétés arithmétiques. Plus généralement, étant donnée une sous-variété V/K lisse de $\mathbb{P}^n_K$, son image schématique $\mathcal{V}/S$ dans $\mathbb{P}^n_S$ par la projection p (le plus petit sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_S$ contenant $p(V)$) est une variété arithmétique.

Sur ces variétés arithmétiques, on peut, pour tout entier p, construire des *groupes de Chow arithmétiques* $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. Le seul qui nous intéresse est le groupe $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$. Il admet une description simple que l'on donne ici, en tant que groupe de Picard compactifié :

Définition 16 Un élément de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$ (également noté $\widehat{\mathrm{Pic}} X$) est une classe d'équivalence de couples $\overline{L} = (L, h)$, où L est un fibré en droites sur X et h une métrique hermitienne C^∞ stable par conjugaison complexe, sur le fibré en droites holomorphe $L_\mathbb{C}$ canoniquement associé à L sur

son espace topologique sous-jacent coïncide avec l'adhérence topologique de $p(V)$

$X(\mathbb{C})$. Un élément de la forme $\overline{L}$ est appelé un *fibré en droites hermitien.* On dit que deux fibrés en droites hermitiens $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ sont équivalents s'ils sont isométriquement isomorphes.

On vérifie immédiatement que ceci généralise la notion de fibré en droites hermitien sur Spec $\mathcal{O}_K$ introduite au paragraphe 2.

Proposition 6 *Le produit tensoriel donné par*

$$(L_1, h_1) \otimes (L_2, h_2) = (L_1 \otimes L_2, h_1 \otimes h_2), \text{ où } \| s_1 \otimes s_2 \| = \| s_1 \| \cdot \| s_2 \|$$

définit une loi de groupe sur $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$.

Définition 17 Soient X une variété arithmétique sur S, $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X et Y un sous-schéma fermé, propre sur S. On va définir par récurrence sur la dimension de Y, un nombre réel $h_{\overline{L}}(Y)$ appelé *hauteur de Y relativement à $\overline{L}$* :

- si Y est vertical, *i.e.*, s'il est contenu dans une fibre spéciale de X au dessus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, alors on pose

$$h_{\overline{L}}(Y) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg_{L_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}}(Y) \log\left(N_{\mathbb{Q}}^{K} \mathfrak{p}\right),$$

  où $\deg_{L_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}}$ dénote le degré géométrique usuel au dessus de $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ défini au début de ce chapitre.
- si s est une section rationnelle de L dans Y de diviseur $\mathrm{div}(s) = \sum n_\alpha Z_\alpha$, on pose

$$h_{\overline{L}}(Y) = \sum_\alpha n_\alpha h_{\overline{L}}(Z_\alpha) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Y(\mathbb{C})_{\text{lisse}}} \log \| s \| \, c_1(\overline{L_{\mathbb{C}}})^{\dim Y(\mathbb{C})}.$$

  Il reste à définir $c_1(\overline{L})$ quand L est un fibré en droites hermitien holomorphe sur une variété analytique complexe X. On note ∂ et $\overline{\partial}$ les opérateurs différentiels usuels (∂ envoie les (p,q)-formes différentielles sur les $(p+1,q)$-formes et $\overline{\partial}$ envoie les (p,q)-formes sur les $(p,q+1)$-formes). Soit maintenant s une section rationnelle de L dans X, on définit $c_1(\overline{L})$ par

$$c_1(\overline{L}) = \frac{1}{2i\pi} \partial\overline{\partial} \log \| s \|^2 .$$

Proposition 7 *Dans le cas où $Y = X = S$, on a $h_{\overline{L}}(S) = \widehat{\deg}_n \overline{L}$, où $\widehat{\deg}_n$ est le degré arithmétique normalisé.*

Démonstration : On applique la définition par récurrence de $h_{\overline{L}}(S)$: soit s une section rationnelle de L dans S, *i.e.*, un élément non nul du $\mathcal{O}_K$-module (des section globales, que l'on note encore L) associé au fibré en droites L. On a $\mathrm{div}(s) = \sum_\mathfrak{p} \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(s)[\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_\mathfrak{p}]$. Par ailleurs, $S(\mathbb{C})$ est de dimension zéro : c'est l'ensemble des plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Ainsi, on a

$$\int_{Y(\mathbb{C})_{\text{lisse}}} \log \| s \| \, c_1(\overline{L_{\mathbb{C}}})^{\dim Y(\mathbb{C})} = \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \| s \|_\sigma .$$

Enfin, la variété $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ est visiblement un $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$-schéma de degré 1 (relativement à L), donc, la définition par récurrence nous donne

$$h_{\overline{L}}(S) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(s)\log p^{d_{\mathfrak{p}}} - \sum_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \log ||\ s\ ||_{\sigma}\right),$$

où p est un nombre premier au-dessous de $\mathfrak{p}$ et où $d_{\mathfrak{p}}$ est le degré de l'extension $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_p$. Sous cette forme, on reconnait le degré normalisé de L. $\square$

Dans ce qui suit, on suppose (pour ne pas avoir à écrire partout l'hypothèse Y/S propre) que X/S est projective.

Définition 18 Soient L un fibré en droites hermitien sur X et V une sous-variété de la fibre générique X_K de X. On définit la *hauteur de V relativement à L*, comme étant la hauteur de l'image schématique $\mathcal{V}$ de V dans X.

Il nous reste maintenant à définir la hauteur d'une variété projective, sans supposer connu aucun modèle : on suppose donc donnée V une K-variété projective sur un corps de nombres. Par définition il existe un fibré en droites très ample L sur V définissant un plongement $\varphi : V \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ dans un espace projectif. L'espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ a un modèle naturel sur S, $\mathbb{P}^n_S$, lequel est naturellement muni d'un fibré en droites hermitien, le fibré $\mathcal{O}(1)$ muni de la métrique de Fubini-Study définie comme suit : pour toute section $s \in H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(1))$ (assimilable à l'espace des polynômes homogènes de degré 1 en $X_0, \ldots, X_n$), on a

$$||\ s\ ||\ (x_0 : \ldots : x_n) = \frac{1}{2}\frac{|\ s(x_0 : \ldots : x_n)\ |}{\sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}}.$$

Ceci nous permet de définir la hauteur de V :

Définition 19 Avec les notations précédentes, on appelle *hauteur de V* relativement à L, et on note $h_L(V)$ le réel

$$h_L(V) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}\left(\overline{\varphi(V)}\right),$$

où $\overline{\varphi(V)}$ est l'image schématique dans $\mathbb{P}^n_S$ de $\varphi(V)$.

Remarque 2 Si V est une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$, alors V admet un modèle Y_F défini sur un corps de nombres F. On peut donc étendre la notion de hauteur aux sous-variétés de $\mathbb{P}^n_{\overline{K}}$. La normalisation par le degré d'un corps de définition, assure comme dans le cas des points que cette définition a bien un sens : si Y'/F' est un autre modèle défini sur un autre corps de nombres, on a $h_L(Y_F) = h_L(Y'_{F'})$.

Exemple 5 Si $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, en notant $V = \overline{\{x\}}$ l'image schématique de x dans $\mathbb{P}^n$ et en posant $L = \mathcal{O}(1)$, on a

$$\frac{h_L(V)}{\deg_L V} = h_2(x),$$

où h_2 la hauteur sur les points de $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ définie en utilisant la norme $\mathbf{L}^2$ aux places archimédiennes plutôt que la norme $\mathbf{L}^\infty$ comme au paragraphe 3.1.

4.2 Hauteur de Faltings d'une variété abélienne

On explique ici ce qu'on appelle dans la littérature la *hauteur de Faltings (stable)* d'une variété abélienne A/K sur un corps de nombres K. Partant d'une telle variété, le problème consiste à lui associer un réel $h_{\mathrm{Falt}}(A)$ qui soit défini de manière intrinsèque à partir de A. Notamment on ne veut pas que cette définition dépende d'un quelconque plongement de A dans un espace projectif, mais on veut par contre que cette hauteur vérifie les propriétés usuelles d'une "bonne" hauteur, à savoir on voudrait que

- Pour tout $g \in \mathbb{N}$, il existe $C(g) \in \mathbb{R}$ tel que pour toute variété abélienne de dimension g, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ on ait
$$h_{\mathrm{Falt}}(A) \geq C(g).$$
- À isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes de dimension g, de hauteur de Faltings bornée et définies sur un corps de nombres de degré borné.

Un tel objet existe et s'appelle la hauteur de Faltings (stable) de A. Il a été introduit pour la première fois par Faltings [Fal83] dans sa preuve de la conjecture de Mordell sur la finitude du nombre de points rationnels d'une courbe de genre $g \geq 2$.

Construction : soit A une variété abélienne de dimension $g \geq 1$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il existe un corps de nombres K sur lequel A est définie et a réduction semi-stable. Soient alors $\pi : \mathcal{A} \to S$ son modèle de Néron, $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ sa section neutre et $\Omega^g_{\mathcal{A}/S}$ le faisceau localement libre de rang 1 des g-formes différentielles. On pose $\omega_{\mathcal{A}/S} = \varepsilon^*\Omega^g_{\mathcal{A}/S}$. C'est un fibré en droites et comme $\mathcal{A}/S$ est un schéma en groupes lisse, on a l'isomorphisme $\omega_{\mathcal{A}/S} \simeq \pi_*\Omega^g_{\mathcal{A}/S}$. S'agissant d'un fibré de rang 1 sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on peut l'identifier au module de ses sections globales. Or l'isomorphisme précédent (et la définition de l'image directe π_*) nous indique que ce module n'est autre que $H^0\left(\mathcal{A}, \Omega^g_{\mathcal{A}/S}\right)$. En notant pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\omega_{\mathcal{A}/S} \otimes_\sigma \mathbb{C}$ le fibré en droites holomorphe associé, on le munit d'une métrique hermitienne par :

$$\forall \alpha \in \omega_{\mathcal{A}/S} \otimes_\sigma \mathbb{C}, \quad || \alpha ||^2_\sigma = \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int_{A_\sigma(\mathbb{C})} \alpha \wedge \overline{\alpha}.$$

On a ainsi fabriqué un fibré en droites hermitien $\overline{\omega}_{\mathcal{A}/S}$ sur S, ne dépendant que de A/S. On pose maintenant
$$h_{\mathrm{Falt}}(A) = \widehat{\deg}_n\left(\overline{\omega}_{\mathcal{A}/S}\right) = h_{\overline{\omega}_{\mathcal{A}/S}}(S),$$
la dernière hauteur étant la hauteur de Bost-Gillet-Soulé. Du fait de la normalisation, ceci est indépendant du choix de K (tel que A/K est semi-stable) et on peut montrer que cette hauteur vérifie bien les propriétés voulues. Ceci illustre la souplesse de la notion de hauteur sur les variétés : la hauteur de Faltings n'est rien d'autre que la hauteur de Spec $\mathcal{O}_K$ pour un fibré en droites hermitien astucieux.

4.3 Hauteur de Néron-Tate

Partant d'une variété abélienne sur un corps de nombres K et d'un fibré en droites ample symétrique L, on peut fabriquer une hauteur sur les sous-variétés de A/K et même par la remarque 2 fabriquer une hauteur sur les sous-variétés de $A_{\overline{K}}/\overline{K}$. De même que pour les points, on peut en dimension supérieure, fabriquer à partir de ces données une hauteur plus belle : la hauteur normalisée, ou hauteur canonique (encore appelée hauteur de Néron-Tate). Dans le cas où la variété abélienne A a partout bonne réduction, Moret-Bailly [MB86] a montré comment faire en utilisant les méthodes précédentes. Par contre le cas général d'une variété abélienne à réduction quelconque ne peut se traiter de la même façon : dans ce cas, on ne peut pas construire la hauteur canonique comme une hauteur à la Bost-Gillet-Soulé. Dans ses travaux sur la conjecture de Bogomolov [Zha95], Zhang a montré comment fabriquer cette hauteur en utilisant un procédé de limite dans l'esprit de celui utilisé par Tate pour fabriquer la hauteur canonique des points. On peut ainsi voir cette hauteur canonique comme une limite de hauteurs arakeloviennes.

La métrique du cube sur une variété abélienne : Soient A/K une variété abélienne de modèle de Néron $\mathcal{A}/\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{L}$ un fibré en droites symétrique sur $\mathcal{A}$. Pour tout ensemble $I \subset \{1,2,3\}$ non vide, on note $p_I : \mathcal{A}^3 \to \mathcal{A}$ le morphisme défini sur les points géométriques par

$$p_I(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i \in I} x_i.$$

On définit alors le fibré en droites $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{A}^3$ par

$$\mathcal{D}_3(\mathcal{L}) := \bigotimes_{\substack{I \subset \{1,2,3\} \\ I \neq \emptyset}} p_I^* \mathcal{L}^{\otimes (-1)^{\# I}}.$$

Par le théorème du cube, ce fibré est trivial. On choisit une trivialisation et on munit $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$ de la structure hermitienne induite par cette trivialisation. Si $\mathcal{L}$ est muni d'une structure hermitienne induisant une telle métrique triviale sur $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$, *i.e.*, induisant un isomorphisme isométrique avec le fibré en droites trivial $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{A}^3}}$, on dit que $\mathcal{L}$ est muni d'une *métrique cubiste*.

Cas de bonne réduction : On suppose que $\mathcal{A}/K$ est un schéma abélien. On fixe un isomorphisme φ entre $\mathcal{O}_{\mathcal{A}^3}$ et $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$. On munit pour tout plongement σ le fibré en droites L_σ de la métrique cubiste (qui existe et est unique par un théorème de Moret-Bailly [MB86]) $|| \cdot ||_\sigma$ associée à φ_σ. Notons qu'un autre choix d'isomorphisme φ aurait multiplié les métriques $|| \cdot ||_\sigma$ par $| \, l \, |_\sigma$ où l est une unité de $\mathcal{O}_K$. Ainsi par la formule du produit, la hauteur associée à $\mathcal{L}$ ne dépend pas du choix de φ. On peut enfin voir que la classe de $\overline{\mathcal{L}}$ ne dépend que de la classe de $L \in \mathrm{Pic}(A)$. On appelle la hauteur ainsi construite, la *hauteur canonique* relativement au fibré en droites L, et on la note $\widehat{h}_L(\cdot)$.
Par symétrie de $\mathcal{L}$ on peut trouver un isomorphisme $\psi : [-1]^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ qui est une isométrie pour tout σ. Ainsi, en utilisant la propriété cubiste, on vérifie facilement que la hauteur normalisée est quadratique : pour tout cycle $\mathcal{V} \in Z_p(\mathcal{A})$, on a

$$\widehat{h}_L([n]_*\mathcal{V}) = n^{2p} \widehat{h}_L(\mathcal{V}).$$

Cas général : On se donne une variété abélienne A/K, une sous-variété V de A et un fibré en droites symétrique ample L sur A. On se donne alors un modèle $\mathcal{A}/S$ propre et plat, l'image schématique $\mathcal{V}$ de V dans $\mathcal{A}$, un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$ étendant L et pour chaque place σ, une métrique hermitienne (à courbure positive) sur L_σ. On a alors le théorème suivant :

Théorème 9 (Zhang [Zha95]) *la suite* $\frac{1}{4^n}h_{\mathcal{L}}([2^n]_*\mathcal{V})$ *converge uniformément vers une limite finie appelée hauteur normalisée de* V *et notée* $\widehat{h}_L(V)$*. Cette limite ne dépend pas des choix de* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{L}$ *ni des métriques choisies. Elle coïncide avec la hauteur de Néron-Tate usuelle sur les points de* $A(K)$*.*

Exemple 6 Si $x \in A(\overline{K})$ et $V = \overline{\{x\}}$ est l'image schématique de x dans A, on a

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} = \widehat{h}_L(x),$$

où $\widehat{h}_L(x)$ est la hauteur de Néron-Tate usuelle sur les points $\overline{K}$-rationnels de A.

4.4 Définition à la Philippon

Soit V/K une variété projective sur un corps de nombres K. On se donne un plongement $\varphi : V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ dans un espace projectif, associé à un fibré en droites ample et symétrique L. On va définir une hauteur sur les sous-variétés de $\mathbb{P}^n$ et on en déduira une hauteur pour V en posant $h_L(V) := h(\varphi(V))$.
L'idée de Philippon est la suivante : si X est une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d, alors X est définie par une équation homogène

$$F_X(\underline{x}) = \sum_{i_0+\ldots+i_n=d} a_{\underline{i}}\underline{x}^{\underline{i}} = 0.$$

De plus, cette équation F_X est déterminée de manière unique, à multiplication par une constante non-nulle près, par X. On peut alors poser $h_\infty(X) := h(F_X) = h(\underline{a})$ où la dernière hauteur est la hauteur projective usuelle du point $\underline{a}$. Ceci étant on peut étendre cette construction d'une hypersurface au cas général d'une sous-variété quelconque de $\mathbb{P}^n$ en utilisant les formes de Cayley-Chow : si X est une sous-variété de degré d et de dimension r de $\mathbb{P}^n$ on peut lui associer une forme multihomogène F_X de multidegré $(d, \cdots, d)$ qui est déterminée par

$$F_X(a_{00}, \ldots, a_{n0}, a_{01}, \ldots, a_{nr}) = 0$$

si et seulement si l'intersection de X avec les $r+1$ hyperplans $\sum_{k=0}^n a_{ki}X_k = 0$ pour $0 \leq i \leq r$ est non-vide. La forme F_X s'appelle *la forme de Chow* (ou *forme éliminante*) de X. On pose alors $h_\infty(X) := h(F_X)$.

Cette hauteur, si elle est naturelle et comparable à la hauteur de Bost-Gillet-Soulé, ne coïncide toutefois pas exactement avec cette dernière. Pour cela, Philippon donne dans son article [Phi95] paragraphe 2, la modification adéquate pour définir une hauteur h coïncidant avec celle définie de manière arakelovienne : on conserve la construction précédente, mais on modifie aux places à l'infini la définition de la hauteur projective standard : au lieu de prendre la norme infinie, on prend la norme $\mathbf{L}^2$ et on rajoute de plus le terme constant $\frac{1}{2}(r+1)\deg_L(X)\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

À partir de là, Philippon définit une hauteur canonique sur les variétés abéliennes. On se donne donc A/K une variété abélienne et L un fibré en droites ample et symétrique (la construction de Philippon se fait en fait sur le fibré projectivement normal $L^{\otimes 4}$ mais on peut oublier ce détail).

On veut définir une hauteur canonique associée à ces données. Pour cela l'idée est d'utiliser le procédé limite à la Tate existant pour fabriquer la hauteur canonique des points. On note G_X le stabilisateur de X dans A et on pose

$$\widehat{h}_L(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid \ker[n] \cap G_X \mid}{n^{2(\dim X+1)}} h_L([n]X).$$

Là encore, on peut montrer que cette définition a un sens (*i.e.*, la limite existe) et coïncide bien avec celle donnée de façon arakelovienne.

5 Résultats et conjectures sur la hauteur canonique $\widehat{h}_L$

Soient K un corps de nombres, A/K une variété abélienne de dimension g et L un fibré en droites très ample symétrique définissant un plongement de A dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$.

5.1 Résultats de base

Ces résultats sont montrés dans les propositions et lemmes aboutissant à la proposition 9. de [Phi91].

Proposition 8 *Avec les notations précédentes, on a :*

1. *Il existe une constante $c(A, L)$ telle que pour toute sous-$\overline{K}$-variété X de $A_{\overline{K}}$ on a*

$$\mid \widehat{h}_L(X) - h_L(X) \mid \leq c(A, L) \deg_L(X).$$

2. $\widehat{h}_{L^{\otimes m}}(X) = m^{\dim X+1} \widehat{h}_L(X)$.
3. *Si $\xi \in A\left(\overline{K}\right)_{\text{tors}}$, alors on a,* $\widehat{h}_L(X+\xi) = \widehat{h}_L(X)$.
4. *Si $\alpha \in \text{End}(A)$ est tel que $\alpha^* L \sim L^{\otimes q(\alpha)}$, alors*

$$\widehat{h}_L(\alpha(X)) = \frac{q(\alpha)^{\dim X+1}}{\mid ker\ \alpha \cap G_X \mid} \widehat{h}_L(X), \quad et, \ \ \widehat{h}_L(\alpha^{-1}(X)) = q(\alpha)^{\text{codim} X-1} \widehat{h}_L(X).$$

Démonstration : Le point 2. est un résultat vrai pour la hauteur h_L, donc on conclut en passant à la limite. Le point 3. découle facilement de la définition : tout d'abord on a $G_X = G_{(X+\xi)}$ et $\dim X = \dim(X+\xi)$. Ainsi, en notant k l'ordre de ξ, on a, en prenant la sous-suite (kn) de (n),

$$\begin{aligned} \widehat{h}_L(X+\xi) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mid \ker[n] \cap G_X \mid}{n^{2(\dim X+1)}} h_L([n](X+\xi)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\mid \ker[kn] \cap G_X \mid}{(kn)^{2(\dim X+1)}} h_L([kn]X) = \widehat{h}_L(X). \end{aligned}$$

Les points 1. et 4. nécessitent une véritable preuve. le point 1. est démontré dans [Phi91] et le point 4. dans [Phi91] pour $\alpha = [n]$ et dans [DH00] proposition 2.3. dans le cas général. □

5.2 Résultats principaux et conjecture

Soient K un corps de nombres, A/K une variété abélienne et L un fibré en droites symétrique ample sur A. Comme le cas de dimension 0, on peut se demander comment caractériser les sous-variétés de A de hauteur normalisée nulle. On sait depuis les travaux de Zhang [Zha98] et indépendamment David-Philippon [DP96], caractériser ces variétés :

Théorème 10 *Soit X une sous-variété irréductible de $A_{\overline{K}}$. Alors,*

$$\widehat{h}_L(X) = 0 \Longleftrightarrow \exists \xi \in A(\overline{K}),\ \exists B \text{ sous-variété abélienne de } A_{\overline{K}} \text{ tels que } X = B + \xi.$$

Définition 20 Une variété telle que dans le théorème précédent est dite *sous-variété de torsion* de $A_{\overline{K}}$. Si X est une sous-variété irréductible de A/K telle que $X_{\overline{K}}$ est une réunion de sous-variété de torsion, on dit que X est une *sous-variété de torsion* de A.

Par ailleurs, si X est une sous-variété de A, on notera

$$X(\varepsilon) = \left\{ x \in X(\overline{K}) \ / \ \widehat{h}_L(x) \leq \varepsilon \right\}.$$

Le théorème 10 est en fait directement lié à une conjecture de Bogomolov. On peut montrer que les énoncés correspondants aux théorèmes 10 et 11 sont équivalents.

Théorème 11 (Conjecture de Bogomolov) *Soit X une sous-variété irréductible de $A_{\overline{K}}$ qui n'est pas de torsion. Il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'ensemble $X(\varepsilon)$ ne soit pas Zarski-dense dans X.*

En fait, la conjecture originelle de Bogomolov se limite au cas où X est une courbe. Sous cette forme, elle a été démontrée par Ullmo [Ull98]. La généralisation en dimension supérieure a alors immédiatement été démontrée par Zhang [Zha98] en adaptant les idées d'Ullmo. La preuve de ce résultat s'appuie de manière cruciale sur un précédent travail de Szpiro-Ullmo-Zhang [SUZ97]. Une référence concernant ceci est l'exposé d'Abbes [Abb97] au séminaire Bourbaki. On tire trivialement de ce théorème le résultat suivant, né conjecture de Manin-Mumford et démontré en premier par Raynaud [Ray83] :

Corollaire 1 (Conjecture de Manin-Mumford) *Soit C une courbe irréductible de $A_{\overline{K}}$ qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble $C \cap A_{\text{tors}}\left(\overline{K}\right)$ des points de $C(\overline{K})$ de torsion dans $A_{\overline{K}}$ est fini.*

Un résultat crucial dans la preuve de la conjecture de Bogomolov est le théorème 12 suivant, dit des minimas successifs, dû à Zhang [Zha95] dans une version bien plus précise.

Définition 21 Soient X une sous-variété de A sur K et θ un nombre réel positif. On pose $X(\theta, L) = \left\{ x \in X(\overline{K}) \ / \ \widehat{h}_L(x) \leq \theta \right\}$. On définit alors le *minimum essentiel* de X, et on note $\hat{\mu}_L^{\text{ess}}(X)$ le réel

$$\hat{\mu}_L^{\text{ess}}(X) = \inf \left\{ \theta > 0 \ / \ \overline{X(\theta, L)} = X \ \right\}$$

où $\overline{X(\theta, L)}$ est l'adhérence de Zariski de $X(\theta, L)$ dans A.

Théorème 12 *Si X est une sous-variété de A/K, alors,*

$$\frac{\widehat{h}_L(X)}{(\dim X + 1)\deg_L X} \leq \hat{\mu}_L^{ess}(X) \leq \frac{\widehat{h}_L(X)}{\deg_L X}.$$

Au vu du théorème 10, qui est l'analogue pour les variétés abéliennes et en dimension supérieure du théorème 7 de Kronecker, on peut se demander ce qu'il en est des variétés qui ne sont pas des variétés de torsion : existe-t-il un énoncé, même conjectural, donnant une minoration de la hauteur de telles variétés et généralisant en dimension supérieure le problème de Lehmer abélien ? Une telle conjecture existe effectivement :

Conjecture 1 (David-Philippon) *Soient A/K une variété abélienne munie d'un fibré en droites ample et symétrique L. Si X est une sous-variété stricte de A sur K, K-irréductible et qui n'est pas de torsion, alors on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(X)}{\deg_L(X)} \geq c(A, L)\deg_L(X)^{-\frac{1}{s - \dim X}},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant X.

Références

[Abb97] A. Abbes. Hauteurs et discrétude [d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang]. In *Séminaire Bourbaki Exposé no. 825*. Astérisque, 1997.

[Ara74] S. Ju. Arakelov. Intersection theory of divisors on arithmetic surface. In *Maht. USSR Izvstija*, volume 8, pages 1167–1180, 1974.

[BGS94] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. In *J. Amer. Math. Soc.*, volume 7, pages 903–1022, 1994.

[Bos96] J. B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). In *Séminaire Bourbaki*, volume 237, pages 115–161. Astérisque, 1996.

[Bos01] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. In *Publications mathématiques de l'IHÉS*, volume 93, pages 161–221, 2001.

[Bou61] N. Bourbaki. *Éléments de mathématiques - Algèbre commutative*. Chapitre II. Hermann, 1961.

[DH00] S. David and M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 529, pages 1–74, 2000.

[DP96] S. David and P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. In *Number theory (Tiruchirapalli, 1996) Contemp. Math., Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1998).*, volume 210, pages 333–364, 1996.

[Fal83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. In *Invent. Math.*, volume 73, pages 349–366, 1983.

[Ful98] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer, seconde edition, 1998.

[Gau01] É. Gaudron. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. Thèse de mathématiques de l'Université Jean Monnet de Saint Étienne, décembre 2001.

[GS90] H. Gillet and C. Soulé. Arithmetic intersection theory. In *Publ. IHES*, volume 72, pages 94–174, 1990.

[GS92] H. Gillet and C. Soulé. Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I,II. In *Ann. of Math.*, volume 131, pages 163–203 et 205–238, 1992.

[HS00] M. Hindry and J. Silverman. *Diophantine Geometry An Introduction*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[MB86] L. Moret-Bailly. *Pinceaux de variété abéliennes*, volume 129. Astérisque, 1986.

[Phi91] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives I. In *Math. Ann.*, volume 289, pages 255–283, 1991.

[Phi94] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives II. In *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, volume 44, pages 1043–1065, 1994.

[Phi95] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. In *J. Math. Pures Appl.*, volume 74, pages 345–365, 1995.

[Ray83] M. Raynaud. Courbes sur une variété abélienne et points de torsion. In *Invent. Math.*, volume 71, pages 207–234, 1983.

[Sou92] C. Soulé. Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants. In *Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy), Astérique*, volume 198-200, pages 355–371, 1992.

[SUZ97] L. Szpiro, E. Ullmo, and S. Zhang. équidistribution des petits points. In *Invent. Math.*, volume 127, pages 337–347, 1997.

[Ull98] E. Ullmo. Positivité et discrétion des points algébriques sur les courbes. In *Annals of Math.*, volume 147, pages 167–179, 1998.

[Zha95] S. Zhang. Small points and adelic metrics. In *J. Algebraic Geom.*, volume 4, pages 281–300, 1995.

[Zha98] S. Zhang. Equidistribution of small points on abelian varieties. In *Annals of Math.*, volume 147, pages 159–165, 1998.