

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11
Faculté des Sciences d'Orsay

Mémoire présenté pour obtenir
le diplôme d'habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Sud 11

Spécialité : Mathématiques

par

Nicolas RATAZZI

Arithmétique des variétés abéliennes

Rapporteurs :

Sinnou DAVID, David MASSER, Emmanuel ULLMO

Soutenu le 09 décembre 2013 devant le jury composé de :

M. Daniel BERTRAND,	Examineur
M. Antoine CHAMBERT-LOIR,	Examineur
M. Sinnou DAVID,	Rapporteur
M. Gaël RÉMOND,	Examineur
M. Emmanuel ULLMO,	Rapporteur

Chapitre 1

Remerciements

Ce mémoire d'habilitation présente les résultats que j'ai obtenus après ma thèse, en poste comme maître de conférences à l'université d'Orsay, Paris-Sud 11. Je voudrais tout d'abord indiquer que je suis très heureux des conditions de travail qui me sont offertes au sein du laboratoire de mathématiques d'Orsay, tant pour l'aspect scientifique que pour ce qui concerne l'enseignement ainsi que les conditions purement matérielles.

Je tiens à remercier Emmanuel Ullmo pour avoir accepté de présenter mon mémoire et d'écrire l'un des rapports sur ce texte. Depuis ces huit ans que je suis Orsay, il a toujours eu du temps à m'accorder pour discuter de mathématiques et partager certaines de ses idées ou points de vue. Je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais également chaleureusement remercier Sinnou David ainsi que David Masser pour avoir eux aussi accepté le rôle de rapporteur pour ce mémoire.

Emmanuel Ullmo et Antoine Chambert-Loir représentent dans mon jury l'équipe d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique d'Orsay. Je suis heureux de leur présence, et apprécie à sa juste valeur qu'Emmanuel Ullmo arrive à trouver un moment pour se détacher de ses nouvelles obligations à l'IHES. Sinnou David et Daniel Bertrand également dans mon jury, se sont toujours intéressés à mes travaux, leur enthousiasmes et questions sur mes recherches m'ayant permis d'avancer et de me renouveler après ma thèse. C'est un plaisir de les remercier ici. Je suis également très heureux que Gaël Rémond ait accepté de venir à Orsay pour participer à mon jury d'habilitation.

Marc Hindry ne sera pas présent à ma soutenance, étant à Moscou à la date de mon habilitation. Néanmoins je voudrais ici indiquer le plaisir que j'ai de le connaître et travailler à ses côtés : après m'avoir encadré en thèse, étant à l'époque toujours présent pour discuter quand j'en avais besoin ; il s'est ensuite intéressé à mes premiers travaux post-thèse que j'ai initiés seul, sur un sujet sensiblement différent de ma thèse, et est maintenant devenu un très agréable collaborateur.

Enfin ma famille m'a toujours soutenu et encouragé dans cette carrière de mathématicien. Ma compagne, Élise, éclaire ma vie actuelle par sa présence. Grace à elle je peux véritablement travailler sereinement. Ces derniers mots de remerciements sont donc pour elle.

Table des matières

1	Remerciements	3
2	Liste de publications	7
3	Introduction	9
4	Minoration de hauteurs, problème de Lehmer	11
4.1	Problème de Lehmer classique et abélien relatif	11
4.2	Deux variantes du problème de Lehmer	12
4.3	Résultat en direction du problème de Lehmer abélien relatif	13
4.4	Idée de preuve du théorème 4.8	14
5	Lemmes de multiplicité, constante de Seshadri	15
5.1	Lemmes de multiplicité	15
5.2	Résultats en dimension quelconque	17
5.3	Cas des surfaces	18
5.3.1	Dérivation le long de tout l'espace tangent	18
5.3.2	Dérivation le long d'une droite	19
6	Manin-Mumford et Zilber-Pink	21
6.1	Manin-Mumford	21
6.2	Zilber-Pink	22
6.2.1	Énoncés	22
6.2.2	Esquisse de preuve du théorème 6.4	23
7	Mumford-Tate et Propriété μ	25
7.1	Rappels sur Mumford-Tate	25
7.2	Deux cas produits	27
7.2.1	Produit de courbes elliptiques	27
7.2.2	Produit de variétés abéliennes pleinement de type GSp	27
7.3	Propriété μ pour les variétés abéliennes	27
8	Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes	29
8.1	Introduction	29
8.2	Cas des extensions $K(A[n])/K$	30
8.3	Cas de type CM	31
8.4	Cas d'un produit de courbes elliptiques	33
8.5	Cas générique de type GSp	33
9	Classes d'isogénie de variétés abéliennes	35

10	Projet de Recherches	37
10.1	Problème de Lehmer pour une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ sans multiplication complexe	37
10.2	Représentations galoisiennes	38
10.2.1	Avec Mumford-Tate	38
10.2.2	Sans Mumford-Tate	38
10.3	Représentations galoisiennes + transcendance	38

Keywords : elliptic curves, abelian varieties, normalised height, Lehmer problem, Mumford-Tate, ℓ -adic representations, torsion points
Adresse électronique : nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr

Chapitre 2

Liste de publications

Les articles 1 à 7, postérieurs à ma thèse de doctorat, sont présentés dans ce mémoire ; les suivants sont issus de ma thèse. Tous sont disponibles sur ma page web : <http://www.math.u-psud.fr/~ratazzi/>

1. Ratazzi, N. *Classe d'isogénie de variétés abéliennes pleinement de type GSp*. Prépublication 2012, 12 pages.
2. Hindry, M. ; Ratazzi, N. *Points de torsion sur les variétés abéliennes de type GSp*. J. Inst. Math. Jussieu 11 (2012), no. 1, 27-65.
3. Hindry, M. ; Ratazzi, N. *Torsion dans un produit de courbes elliptiques*. J. Ramanujan Math. Soc. 25 (2010), no. 1, 81-111.
4. Ratazzi, N. ; Ullmo, E. *Galois + équidistribution = Manin-Mumford*. Arithmetic geometry, 419-430, Clay Math. Proc., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
5. Ratazzi, N. *Intersection de courbes et de sous-groupes, et problèmes de minoration de hauteur dans les variétés abéliennes C.M.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 5, 1575-1633.
6. Nakamaye, M. ; Ratazzi, N. *Lemmes de multiplicités et constante de Seshadri*. Math. Z. 259 (2008), no. 4, 915-933.
7. Ratazzi, N. *Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 40 (2007), no. 6, 951-983.
8. Ratazzi, N. *Problème de Lehmer sur $\mathbb{G}_m$ et méthode des pentes*. J. Théor. Nombres Bordeaux 19 (2007), no. 1, 231-248.
9. Ratazzi, N. *Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe*. Int. Math. Res. Not. 2004, no. 58, 3121-3152.
10. Ratazzi, N. *Problème de Lehmer pour les hypersurfaces de variétés abéliennes de type C.M.* Acta Arith. 113 (2004), no. 3, 273-290.
11. Ratazzi, N. *Densité de points et minoration de hauteur*. J. Number Theory 106 (2004), no. 1, 112-127.

Chapitre 3

Introduction

Dans ce mémoire mes travaux post-thèse sont présentés. La thématique globale est l'arithmétique sur les variétés abéliennes dans les corps de nombres. Ce texte est divisé en six parties :

1. Le chapitre 4, correspondant à une partie de l'article [5], contient notamment un résultat de minoration de hauteur pour les variétés abéliennes de type CM. Il s'agit d'une variante de problème de type Lehmer dans lequel, étant donnée une variété abélienne A sur un corps de nombres K , on essaie de minorer la hauteur (canonique) d'un point P en fonction du degré $[K_t(P) : K_t]$, le corps K_t étant l'extension (infinie) de K engendrée par tous les points de torsion de A . Il s'agit d'un travail faisant directement suite à ma thèse, dans sa suite logique. Le résultat principal obtenu pour les variétés abéliennes de type CM est optimal pour le terme principal de la minoration, mais le terme d'erreur logarithmique n'est pas le bon, puisqu'il fait intervenir le degré $[K(P) : K]$ en lieu et place de $[K_t(P) : K_t]$. Ceci a depuis été amélioré dans la thèse de Carrizosa [Car09] qui obtient, toujours dans le cas CM, un résultat optimal pour le terme principal ainsi que pour le terme d'erreur. Nous renvoyons au chapitre 4 proprement dit pour plus de détails.
2. Le chapitre 5 correspondant à l'article [6] concerne les lemmes de zéros en approximation diophantienne. L'idée est d'utiliser des techniques de géométrie algébrique assez fine, ici la notion de constante de Seshadri, afin d'améliorer les résultats antérieurs, dus à Philippon [Phi86] et raffinés au niveau des constantes par Nakamaye [Nak07]. Outre le fait de chercher à obtenir une bonne condition numérique concernant le degré du groupe ou de la variété obstructrice, un second point intéressant, au moins du point de vue géométrique, est aussi de mieux comprendre d'où provient l'obstruction et donc de pouvoir identifier en terme géométrique les variétés obstructrices. De ce point de vue et en utilisant une preuve plus géométrique, nous donnons dans [6] une information géométrique sur les sous-groupes obstructeurs, les reliant à la notion de sous-variété exceptionnelle de Seshadri. En dimension deux le résultat est particulièrement frappant : (sous certaines conditions de taille sur l'ensemble de points Σ considéré fourni dans les données) les sous-groupes obstructeurs sont précisément les variétés exceptionnelles de Seshadri. Il s'agit dans ce chapitre d'une excursion dans des problématiques de géométrie complexe indépendante des autres thématiques de ce mémoire, même si le thème reste clairement relié aux questions d'arithmétique sur les variétés abéliennes. Notons que les techniques et outils mis en oeuvre pour prouver le résultat principal de ce chapitre ont récemment été ré-utilisés par Nakamaye et Fischler [FN14] dans le contexte dual des lemmes d'interpolation.
3. Les chapitres 6, 7 et 8 correspondent aux articles [7], [4], [3] et [2] ainsi qu'à une partie de l'article [5]. La problématique est celle des points de torsion dans les variétés abéliennes sur les corps de nombres. L'article [4] concerne une nouvelle preuve de la conjecture de Manin-Mumford basée sur la stratégie, due à Klinger-Ullmo-Yafaev, d'attaque de la conjecture d'André-Oort. Les techniques utilisées sont celles d'approximation diophantienne ainsi que des techniques galoisiennes sur les variétés abéliennes. Les trois autres papiers [7], [3] et [2] sont notamment (mais pas uniquement) centrés sur la question, étant donnée une variété abélienne A fixée sur un corps de nombres K_0 , de contrôler le cardinal de

ses points de torsion K -rationnels, en fonction du degré $[K : K_0]$ lorsque K varie dans les extensions finies de K_0 . Les techniques employées ici sont des outils tels que les représentations ℓ -adiques ainsi que les notions de groupe et conjecture de Mumford-Tate. Il s'agit donc de résultats (points de torsion au lieu de points de petite hauteur (non nulle)) et de techniques (représentations galoisiennes au lieu de techniques de transcendance) assez orthogonaux au premier chapitre et donc également à mes travaux de thèse. Notons néanmoins que c'est en voulant appliquer mon résultat [5] sur le problème de Lehmer pour obtenir de nouveaux cas de la conjecture de Zilber-Pink, généralisant la conjecture de Manin-Mumford, suivant une stratégie de Rémond [Rém05] que j'ai été conduit à m'intéresser à ces questions galoisiennes sur la torsion dans les variétés abéliennes de type CM (article [7]). La question étant intéressante pour elle-même j'ai naturellement continué à travailler ensuite sur ce sujet (articles [3] et [2]).

4. Le dernier chapitre utilise les techniques développées dans le chapitre précédent (représentations galoisiennes et conjecture de Mumford-Tate) pour répondre à une question d'une nature un peu différente : la question de la classe d'isogénie de certain type de variétés abéliennes. Faltings [Fal83] a prouvé qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés abéliennes A et B sur un corps de nombres K soient K -isogènes est qu'il existe un ensemble S de densité un de premiers $\mathfrak{p}$ de K (de bonne réduction pour A et B) tels que les facteurs locaux des séries L de A et B soit égaux. Ce résultat a été récemment amélioré dans [HP] pour les courbes elliptiques de la façon suivante : plutôt que demander que les réductions $A_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{p}}$ aient le même nombre de points sur le corps résiduel $k_{\mathfrak{p}}$ (condition équivalente à l'égalité des facteurs locaux des séries L dans le cas de dimension 1), il suffit (pour des courbes elliptiques) de demander que le nombre de points de $A(k_{\mathfrak{p}})$ et de $B(k_{\mathfrak{p}})$ aient le même ensemble de diviseurs premiers. De plus il suffit de savoir ceci non pour tous les nombres premiers mais seulement pour une famille infinie. Dans la prépublication [1] j'améliore le résultat de Faltings de la même façon pour les variétés abéliennes pleinement de type GSp (au sens de la définition 6.5 de ce mémoire), famille contenant notamment les variétés abéliennes ayant un anneau d'endomorphismes $\mathbb{Z}$ et de dimension 2 ou impaire.

Chapitre 4

Minoration de hauteurs, problème de Lehmer

4.1 Problème de Lehmer classique et abélien relatif

Soient x un nombre algébrique et $h(x)$ sa hauteur logarithmique absolue définie précédemment. Le problème classique de Lehmer est le suivant :

Conjecture 4.1 (Problème de Lehmer) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout nombre algébrique non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]}.$$

En 1979, Dobrowolski [Dob79] obtient, au choix de la constante c près, le meilleur résultat général en direction de la conjecture connu à ce jour. Si x est un nombre algébrique, on note $D = \deg(x) = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$.

Théorème 4.2 (Dobrowolski) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout nombre algébrique non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{D} \left(\frac{\log \log 3D}{\log 2D} \right)^3.$$

La preuve de Dobrowolski est une preuve typique de transcendance. On suppose par l'absurde le résultat faux, ce qui nous donne un x de grand degré D et de petite hauteur. On construit alors, en utilisant un lemme de Siegel, un polynôme P à coefficients entiers qui s'annule avec un grand ordre en x . L'idée nouvelle de Dobrowolski consiste à faire une extrapolation aux places ultramétriques : en utilisant le petit théorème de Fermat, on montre que le polynôme P s'annule modulo p premier en x^p . Utilisant l'hypothèse de petite hauteur sur x et l'inégalité de Liouville (ou la formule du produit) on montre alors que P s'annule en un grand nombre de x^p (tout ceci étant convenablement quantifié en fonction de D). Un lemme de zéros (trivial dans ce cas : il suffit de compter les zéros du polynôme et de comparer à son degré) permet alors de conclure. On peut trouver dans [8] une réécriture de cette preuve utilisant la notion de degré arithmétique et notamment l'inégalité des pentes introduite pour la première fois par Bost dans [Bos96].

En 1981, Laurent [Lau83] étend le problème de Lehmer aux courbes elliptiques et étend le résultat ainsi que la preuve de Dobrowolski au cas des courbes elliptiques à multiplication complexe. Puis Amoroso-David [AD99] et David-Hindry [DH00] étendent ce résultat, et la preuve, respectivement au cas de $\mathbb{G}_m^n$ et au cas des variétés abéliennes A/K de type CM. Depuis, ce type d'énoncés et conjectures ont été étendus à un

cadre plus général, appelé *problème de Lehmer relatif*, où la minoration de la hauteur du point P doit être obtenue, non pas en fonction du degré $[K(P) : K]$, mais du degré $[K_t(P) : K_t]$ où K_t est l'extension infinie de K engendrée par les points de torsion de la variété abélienne A/K (voire, encore plus précisément, en fonction de l'indice d'obstruction relatif, cf. ci-dessous).

Définition 4.3 Soient A/K une variété abélienne, $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et symétrique, P un point de $A(\overline{K})$ et F/K une extension algébrique. On définit l'indice d'obstruction de P relativement à $\mathcal{L}$ et F , et l'on note $\delta_{\mathcal{L},F}(P)$, par

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) = \min \left\{ (\deg_{\mathcal{L}_F} X)^{\frac{1}{\text{codim} X}} \mid X \text{ sous-}F\text{-variété stricte de } A_F, \text{ telle que } P \in X(\overline{K}) \right\},$$

où l'on a noté $\mathcal{L}_F$ le faisceau sur A_F tiré en arrière de $\mathcal{L}$ par la projection naturelle de A_F sur A .

Remarque 4.4 En considérant la variété $\overline{\{P\}}^F$, image schématique de $P \in A_{\overline{K}}$ dans A_F , on constate immédiatement que

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) \leq [F(P) : F]^{\frac{1}{g}}.$$

On notera $\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}$ l'indice d'obstruction relatif au corps $K_t = K(A_{\text{tors}})$. Ceci étant, on peut maintenant énoncer le raffinement attendu du problème de Lehmer :

Conjecture 4.5 (Problème de Lehmer abélien relatif) Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}(P)}.$$

4.2 Deux variantes du problème de Lehmer

Dans [DH00], les auteurs énoncent un problème de Lehmer “multihomogène” *a priori* plus fort que le problème de Lehmer abélien classique. Ils énoncent également une variante du problème de Lehmer pour un point non de torsion mais pouvant être contenu dans une sous-variété de torsion. Dans l'appendice A de [5], je prouve que ces deux questions sont en fait des conséquences du problème de Lehmer usuel (pour une variété abélienne). Précisément, utilisant le théorème principal de [DH00], je montre les deux résultats suivants :

Concernant la variante du problème de Lehmer pour un point éventuellement dans une sous-variété de torsion (translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion), j'obtiens :

Théorème 4.6 Si A/K est de type CM, alors il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini, on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2D)^{-\kappa(g_0)},$$

où $D = [K(P) : K]$, où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de A contenant P et où $\kappa(g_0) = (2g_0(g_0 + 1)!)^{g_0+2}$.

Concernant la variante multihomogène formulée dans [DH00], j'obtiens :

Théorème 4.7 Si A/K est de type CM, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$ telle que pour tout point $(P_1, \dots, P_n) \in A^n(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n , on a :

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)},$$

où $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$.

4.3 Résultat en direction du problème de Lehmer abélien relatif

Dans ma thèse (article [9]) j'avais obtenu un résultat optimal, à des facteurs $\log(\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}(P))$ près, pour le problème de Lehmer relatif pour une courbe elliptique à multiplication complexe. La preuve était une adaptation de la preuve due à Amoroso-Zannier [AZ00] du résultat analogue pour $\mathbb{G}_m$. Dans [5], suivant la stratégie de preuve utilisée par Amoroso-David [AD04] dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$, j'ai obtenu dans le cas des variétés abéliennes de type CM, un résultat, essentiellement optimal pour le terme principal en $\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}(P)$, mais plus faible pour le terme d'erreur. L'intérêt de ce résultat était, suivant une stratégie de Rémond, d'obtenir les premiers résultats inconditionnels pour la conjecture de Zilber-Pink pour des variétés abéliennes CM de dimension arbitraire (cf. le chapitre 6 de ce mémoire pour plus de détails sur ce sujet). Par ailleurs dans [DH00], les auteurs indiquent qu'il serait intéressant de quantifier l'hypothèse "d'ordre infini" en terme du degré de la plus petite sous-variété de torsion pouvant contenir le point et mentionnent que la preuve de leur résultat (rédigé par une minoration de la hauteur en fonction du degré) doit naturellement conduire à une estimation en terme de l'indice d'obstruction. Dans mon article [5] je réponds également à ces questions. Pour tout entier n , on note $K_n := K(A[n])$ l'extension engendrée sur K par le groupe des points de torsion $A[n]$. On a $K_t = \bigcup_{n \geq 1} K(A[n])$.

Théorème 4.8 *Soit A/K une variété abélienne de type CM de dimension g sur un corps de nombres et munie d'un fibré en droites ample et symétrique $\mathcal{L}$. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ et pour tout entier n , on a l'alternative suivante :*

$$\text{soit} \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)} \left(\frac{\log \log 3 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)}{\log 2 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)} \right)^{\kappa(g)},$$

avec $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$;

soit le point P est contenu dans une sous-variété de torsion stricte, B , de A_{K_n} , définie sur K_n , de degré majoré par

$$\left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B \right)^{\frac{1}{\text{codim } B}} \leq c(A/K, \mathcal{L})^{-1} \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P) (\log 2 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P))^{2g+2\kappa(g)}.$$

Cet énoncé est l'analogue d'un résultat de Amoroso et David obtenu dans [AD04] pour le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$. Par ailleurs ce théorème 4.8 a depuis été sensiblement amélioré dans la thèse de Carrizosa [Car09], où le problème de Lehmer abélien relatif pour une variété abélienne de type CM est essentiellement résolu (essentiellement signifiant ici aux classiques facteurs logarithmiques près inhérents à l'approche de transcendance utilisée dans les preuves).

On a ici quantifié l'hypothèse " P est d'ordre infini" par une borne sur le degré de la plus petite sous-variété de torsion contenant le point P . Notons que ce type de résultats, rarement mis en évidence, contient la plupart du temps des informations arithmétiques supplémentaires. On donne dans [5], suivant la preuve du résultat analogue pour $\mathbb{G}_m^n$ due à Amoroso-David [AD04], une conséquence de cette quantification. En notant $\mu^*(V)$ le minimum absolu de V , on obtient par exemple le corollaire :

Corollaire 4.9 *Soit A/K une variété abélienne simple de type CM et $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, n)$ telle que : pour toute sous-variété (non nécessairement irréductible) V/K de A^n , non de torsion et définie sur K , on a :*

$$\mu^*(V) \geq \frac{c(A/K, n)}{\deg_{\mathcal{L}} V} \left(\frac{\log \log 3 \deg_{\mathcal{L}} V}{\log 3 \deg_{\mathcal{L}} V} \right)^{\kappa(g)},$$

avec $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$.

Ceci rend effectif les résultats de Bombieri et Zannier [BZ96], et raffine ceux de David et Philippon [DP02] concernant ce même problème. Plus exactement en suivant la preuve de [BZ96], on constate qu'ils obtiennent une minoration effective mais qui est multiexponentielle en le degré, au lieu d'être comme ici linéaire. Concernant le résultat de [DP02], bien qu'il ne soit pas explicitement rédigé, on peut voir qu'ils obtiennent comme conséquence de leur théorème principal, une minoration polynomiale en le degré, moins bonne que celle ci-dessus.

4.4 Idée de preuve du théorème 4.8

Il s'agit d'une preuve d'approximation diophantienne usuelle : classiquement depuis le résultat de Dobrowolski concernant le problème de Lehmer, c'est essentiellement en utilisant des transformés par les isogénies de Frobenius (isogénie de la variété abélienne, se réduisant en le morphisme de Frobenius modulo un premier p) d'un point P , dont on suppose par l'absurde qu'il ne vérifie pas la conclusion du théorème 4.8, que nous extrapolons. Une majoration du discriminant absolu de l'extension $K(A[n])/\mathbb{Q}$ est nécessaire dans l'application du lemme de Siegel. Par ailleurs il y a une différence avec la situation classique, dans la mesure où l'on travaille, non plus sur K mais sur $K(A[n])$: on considère donc plutôt des tordus de ces points par un certain automorphisme de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, un Frobenius de l'extension abélienne $K(A[n])/K$. Notons également une autre différence par rapport à la situation de [DH00] : on travaille avec les indices d'obstruction alors que dans [DH00] la preuve est faite avec le degré D . Il y a donc certaines modifications techniques un peu lourdes supplémentaires à faire. Ceci étant la preuve est une classique preuve d'approximation diophantienne, avec un lemme de Siegel absolu (le théorème de Bombieri-Vaaler qui nous permet d'avoir un contrôle explicite de la dépendance en le corps sur lequel on travaille), un lemme de zéros et, comme dans [DH00] une descente finale où l'on réitère g fois l'ensemble de la preuve pour pouvoir conclure.

Chapitre 5

Lemmes de multiplicité, constante de Seshadri

5.1 Lemmes de multiplicité

Dans l'article [6] en collaboration avec Nakamaye, nous prouvons deux résultats concernant les lemmes de multiplicités. Avant d'aborder les énoncés proprement dit rappelons rapidement ce qu'est un lemme de multiplicités et dans quel contexte on rencontre ce type d'énoncé : il s'agit de fournir des conditions suffisantes pour qu'une section d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une compactification équivariante lisse X d'un groupe algébrique commutatif $\mathbb{G}$ ne puisse pas s'annuler sur un sous-schéma fini Σ donné sans être identiquement nulle. Ce type d'information qui se traduit généralement par la présence d'un sous-groupe obstruteur dont on majore le degré géométrique est d'usage particulièrement important en transcendance et en géométrie diophantienne et intervient également en géométrie algébrique complexe dans un contexte plus général : partant d'une variété algébrique complexe projective et lisse X , munie d'un fibré en droites ample L sur X , et $\Sigma \subset X$ un sous-ensemble fini, un lemme de multiplicités pour les données X, L, Σ consiste à majorer la multiplicité maximale que peut avoir une section non triviale $s \in H^0(X, L)$ le long de Σ . Ce problème est aussi difficile qu'important, même dans le cadre le plus simple. Par exemple, si $X = \mathbf{P}^2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$, et Σ est un ensemble de m points généraux avec $m \geq 10$, on tombe sur la conjecture de Nagata.

Deux aspects nous semblent importants dans un lemme de multiplicités : le premier est d'obtenir une bonne condition numérique concernant le degré du groupe ou de la variété obstrutrice, le second est aussi de mieux comprendre géométriquement d'où provient l'obstruction. De ce point de vue il nous semble intéressant de pouvoir identifier en terme géométrique les variétés obstrutrices. Dans l'article [6], nous nous intéressons aux lemmes de multiplicités dans le cadre où ils apparaissent en transcendance. Dans ce contexte, le résultat le plus important est dû à Philippon [Phi86] (cf. également [Nak07] pour une preuve plus géométrique, basée en partie sur celle de Philippon mais permettant également d'obtenir un résultat plus précis au niveau des constantes intervenant dans la majoration du degré du sous-groupe obstruteur). En utilisant des outils développés en géométrie algébrique complexe nous donnons un raffinement, dans le cas particulier où l'on dérive dans toutes les directions, des lemmes de zéros de Philippon [Phi86]. Par ailleurs, dans le cas de dimension 2 nous obtenons également un résultat plus précis dans le cas où l'on dérive le long d'une droite (cf. le théorème 5.13 paragraphe 5.3.2). Enfin utilisant une preuve plus géométrique et notamment en utilisant la notion de constante de Seshadri nous donnons une information géométrique sur les sous-groupes obstruteurs, les reliant à la notion de sous-variété exceptionnelle de Seshadri. En dimension deux le résultat est particulièrement frappant : (sous certaines conditions de taille sur l'ensemble de points Σ considéré fourni dans les données) les sous-groupes obstruteurs sont précisément les variétés exceptionnelles de Seshadri.

Soient $\mathbb{G}/\mathbb{C}$ un groupe algébrique commutatif de dimension $d \geq 1$, X une compactification de Serre de $\mathbb{G}$ (cf. [Wal87]) (une telle compactification est notamment équivariante et lisse). Si U est une sous-variété de

$\mathbb{G}$ nous noterons $\overline{U}$ son adhérence de Zariski dans X . Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur X et Γ un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ contenant 0 et engendrant un groupe (nécessairement de type fini) $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. On pose pour tout entier $S \geq 1$

$$\Gamma(0) = \Gamma \text{ et } \Gamma(S) = \left\{ \sum_{i=1}^S x_i \mid \forall i \in \{1, \dots, S\}, x_i \in \Gamma \right\}.$$

Par ailleurs, étant donné un sous-espace vectoriel non nul $\mathbb{E}$ de l'espace tangent à l'origine $T_0(\mathbb{G})$ et étant donné un sous-groupe algébrique H de $\mathbb{G}$, nous noterons

$$c_H(\mathbb{E}) := \text{codim}(\mathbb{E} \cap T_0(H), \mathbb{E}) \text{ et } \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}) = \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} X}{|\Gamma(S)|} \right)^{\frac{1}{\dim \mathbb{E}}}.$$

Dans le cas où l'espace vectoriel considéré $\mathbb{E}$ est l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$ entier, nous noterons simplement $\alpha(S, \mathcal{L})$ plutôt que $\alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$. Notons que si $D \geq 1$ est un entier, on a $\alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D}) = D^{\frac{\dim X}{\dim \mathbb{E}}} \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de zéros de Philippon (dans la version précisée de Nakamaye) :

Théorème 5.1 (Philippon-Nakamaye) *Soient $S, a_1, \dots, a_{d-1}$ des entiers strictement positifs ordonnés de façon décroissante et T un entier positif ou nul. Soient $D \geq 1$ un entier, $\mathbb{E}$ un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à l'origine $T_0(\mathbb{G})$ et σ une section non nulle de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ s'annulant sur l'ensemble $\Gamma(S + a_1 + \dots + a_{d-1})$ le long de $\mathbb{E}$ à un ordre au moins $dT + 1$. Alors il existe un sous-groupe algébrique H , différent de $\mathbb{G}$, tel que*

$$\max\{1, T\}^{c_H(\mathbb{E})} \text{Card}(\Gamma(a_{d-1}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq D^{\dim X - \dim H} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Le sous-groupe H est appelé sous-groupe obstruteur.

Remarque 5.2 Dans la pratique en transcendance, le fibré en droites ample $\mathcal{L}$ est simplement la donnée d'un plongement de la variété X dans un espace projectif. C'est une donnée du problème. Dans une preuve de transcendance on construit une section de "degré D " relativement à $\mathcal{L}$ (autrement dit un élément de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$) nulle à un grand ordre T sur un certain ensemble Σ et un lemme de multiplicités consiste essentiellement à obtenir une majoration non triviale de T en fonction de D .

Dans la suite nous ferons l'hypothèse restrictive suivante qui justifie dans le titre le choix du terme *lemme de multiplicités* plutôt que *lemme de zéros* :

Hypothèse : $T \geq 1$.

Sous cette hypothèse, la conclusion du théorème précédent peut être reformulée sous forme d'une dichotomie :

1. Si $T \leq \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D})$ alors le groupe trivial $\{0\}$ est obstruteur :

$$T^{c_{\{0\}}(\mathbb{E})} |\Gamma(S)| \leq D^{\dim X} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

2. Sinon, il existe un sous-groupe algébrique H , différent de $\mathbb{G}$, tel que

$$T^{c_H(\mathbb{E})} \text{Card}(\Gamma(a_{d-1}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq D^{\dim X - \dim H} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Notons que dans cette seconde partie de l'alternative rien ne dit que le groupe H ne peut pas être le groupe trivial. Une des choses que nous faisons également dans [6] est de montrer que sous certaines conditions, on peut assurer que H est non trivial.

Cette formulation à l'avantage de bien indiquer que dans tous les lemmes de multiplicités ($T \geq 1$), on peut en fait supposer que

$$T > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D}),$$

ce que l'on fera désormais ; l'autre cas étant en fait trivial (rappelons que la philosophie des lemmes de multiplicités est la suivante : partant d'une section qui s'annule à un grand ordre en un certain nombre de points suffisamment bien répartis, on montre que l'ordre ne peut en fait pas être trop grand. Si l'on part d'un ordre d'annulation $T \geq 1$ qui est déjà petit, il n'y a, du point de vue des lemmes de multiplicités, rien de plus à dire).

L'objectif de [6] est également de donner des informations supplémentaires sur le sous-groupe obstruteur dans le cas particulier où l'on fixe l'espace des dérivations à l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$ tout entier, plutôt qu'à un sous-espace vectoriel quelconque de celui-ci. Dans ce cas nous montrons que l'on peut légèrement affaiblir l'hypothèse sur l'ordre d'annulation de la section σ considérée tout en obtenant une information plus précise sur le groupe obstruteur. Par ailleurs, dans le cas où le groupe $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ engendré par Γ n'est pas un groupe de torsion, on donne une condition numérique sur les paramètres a_i assurant que le groupe obstruteur H est différent du groupe trivial réduit à l'élément neutre. En particulierisant la situation en dimension 2 nous montrons qu'une condition numérique plus faible est suffisante dans ce cas. Enfin, toujours dans le cas particulier de la dimension 2, nous expliquons au paragraphe 5.3.2 (théorème 5.13) comment faire également fonctionner notre approche dans le cas d'un espace de dérivations de dimension 1 (inclus dans l'espace tangent de dimension 2).

5.2 Résultats en dimension quelconque

Définition 5.3 Soient $X/\mathbb{C}$ une variété algébrique, irréductible et projective, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur X . Pour tout ensemble fini $\Gamma \subset X$, la *constante de Seshadri* $\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L})$ est définie par

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) = \inf_{C \subset X, C \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{\mathcal{L} \cdot C}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x C},$$

où C décrit les courbes irréductibles de X contenant au moins un point de Γ .

Rappelons (cf. par exemple [Laz04] p. 271 Proposition 5.1.9) que pour toute sous-variété irréductible V de X , de dimension non nulle et contenant au moins un point de Γ , on a

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) \leq \left(\frac{\mathcal{L}^{\dim V} \cdot V}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x V} \right)^{\frac{1}{\dim V}}. \quad (5.1)$$

Définition 5.4 Une variété V réalisant l'égalité dans (5.1) est appelée *variété exceptionnelle de Seshadri de $\mathcal{L}$ relativement à Γ* . (Une telle variété existe toujours : c'est une conséquence d'un théorème de Campana-Peternell, cf. [CP90] et par exemple [Laz04] p. 271 Proposition 5.1.9).

Remarque 5.5 Notons que $\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}^{\otimes D}) = D\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L})$. Ainsi, si V est une variété exceptionnelle de Seshadri pour $\mathcal{L}$, alors, par homogénéité de ε , c'est également une variété exceptionnelle de Seshadri pour $\mathcal{L}^{\otimes D}$.

Notations : Nous notons $\mathbb{G}/\mathbb{C}$ un groupe algébrique commutatif de dimension $d \geq 1$, X une compactification de Serre de $\mathbb{G}$ et Γ un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ contenant 0 et engendrant un groupe $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. Étant donnée une sous-variété V de X , posons

$$\text{Stab}(V) = \{x \in \mathbb{G} / x + V = V\}$$

le *stabilisateur* de V . C'est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}$ de composante neutre (*i.e.* la composante connexe contenant l'identité) $\text{Stab}(V)^0$. Enfin, étant donnée une sous-variété U de $\mathbb{G}$ nous noterons $\bar{U}$ son adhérence de Zariski dans la compactification X .

Définition 5.6 Nous définissons la *constante réelle* u comme étant la solution strictement comprise entre 0 et 1 de l'équation $x^{d-1}(1+x) = 1$ avec $d = \dim X$.

Théorème 5.7 Soient T et D deux entiers strictement positifs, $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample, $S = a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ des entiers strictement positifs ordonnés de façon décroissante et V une variété exceptionnelle de Seshadri de $\mathcal{L}$ relativement à $\Gamma(S)$. On suppose que $T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$. Soit alors σ une section non nulle de

$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ s'annulant sur l'ensemble $\Gamma(S + a_1 + \dots + a_{\text{codim } V})$ le long de $T_0(\mathbb{G})$ à un ordre supérieur ou égal à $(u + \text{codim } V)T$.

1. Il existe une variété W de dimension comprise entre $\dim V$ et $\dim X - 1$ contenant un translaté de V par un point de $\Gamma(a_1 + \dots + a_{\text{codim } V-1})$ telle qu'en posant $H = \text{Stab}(W \cap \mathbb{G})^0$ on a

$$T^{\text{codim } H} \text{Card}(\Gamma(a_{\text{codim } V}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq (\deg_{\mathcal{L}}(X)) D^{\text{codim } H}.$$

2. Si on suppose de plus que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion, alors en choisissant

$$\forall i \in \{1, \dots, \text{codim } V\}, \quad |\Gamma(a_i)| > |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| (\deg_{\mathcal{L}} X) |\Gamma(S)|^{\frac{\text{codim } V}{d}},$$

on a de plus : le sous-groupe strict H obtenu au point 1. est non nul.

Remarque 5.8 Notons que les techniques et outils mis en oeuvre pour prouver ce résultat ont récemment été ré-utilisé par Nakamaye et Fischler [FN14] dans le contexte dual des lemmes d'interpolation.

Les apports de notre énoncé nous semblent être les suivants :

1. Si l'on se restreint au cas des surfaces, il permet de montrer que toute courbe exceptionnelle de Seshadri donne directement naissance, par passage au stabilisateur, à un sous-groupe obstruteur ; et est elle même un sous-groupe obstruteur si les hypothèses du point 2. sont satisfaites. En dimension quelconque, la variété que l'on construit naturellement, avant de passer au stabilisateur pour obtenir un groupe obstruteur, contient un translaté de variété exceptionnelle de Seshadri.
2. On demande une condition d'annulation plus faible que le classique $dT+1$: notre condition d'annulation est au pire de la forme $(d-1+u)T$ avec $0 < u < 1$. Ceci est dû à l'introduction de la notion de constante et de variété de Seshadri et évidemment n'est rendu possible que par l'hypothèse faite sur l'espace des dérivations : être tout l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$.
3. Dans le cas où l'on part d'un ensemble engendrant un groupe non de torsion, on prouve une version plus forte des lemmes de multiplicités en partant d'une section nulle sur un ensemble plus petit que $\Gamma(dS)$, avec un ordre moins grand que classiquement, et en assurant néanmoins l'existence d'un sous-groupe obstruteur strict *non nul* dans ce cas.
4. Si Γ n'est pas contenu dans $\mathbb{G}_{\text{tors}}$, il suffit pour obtenir les inégalités dans le point 2. du Théorème 5.7 de choisir les a_i tel que

$$|\Gamma(a_i)| = o(S).$$

Autrement dit, au lieu de supposer que σ s'annule sur $\Gamma(dS)$, il suffit dans ce cas de ne supposer l'annulation que sur $\Gamma(S + o(S))$. En fonction de S , ceci est le meilleur résultat possible.

5. La raison profonde pour laquelle le Théorème 5.7 ne se généralise pas bien au cas d'un sous-espace quelconque $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$, est que la notion d'ordre d'annulation le long de $\mathbb{E}$ s'adapte mal à une interprétation géométrique. Autrement dit, alors que la constante de Seshadri $\varepsilon(x, \mathcal{L})$ est une fonction homogène de $\mathcal{L}$, l'analogue qui mesure la positivité de $\mathcal{L}$ le long de $\mathbb{E}$ ne l'est plus.

Ceci étant dit, il convient de tempérer notre résultat : il est en général très difficile de calculer la constante de Seshadri et à plus forte raison de donner des informations sur les variétés exceptionnelles de Seshadri (dont on sait tout de même qu'elles sont au moins de dimension 1).

5.3 Cas des surfaces

5.3.1 Dérivation le long de tout l'espace tangent

Dans le cas des surfaces nous pouvons, pour le point 2. du théorème 5.7 précédent, légèrement affaiblir les hypothèses :

Théorème 5.9 *On suppose que $\dim X = 2$ et que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion. Soient $D \geq 1$ un entier, et S , a deux entiers strictement positifs tels que $|\Gamma(S)| \geq |\Gamma(a)| \geq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| \cdot |\Gamma(S)|^{\frac{1}{2}}$. Soient $T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$ un entier et $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ une section non nulle s'annulant à un ordre au moins $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})T$ sur $\Gamma(S + a)$ le long de $T_0(\mathbb{G})$. Toute sous-variété exceptionnelle de Seshadri de $\mathcal{L}$ relativement à $\Gamma(S)$ est l'adhérence d'un translaté de sous-groupe algébrique de dimension 1. De plus, si $E \subset X$ est l'une de ces courbes, alors σ s'annule le long de $\Gamma(a) + E$ à un ordre au moins T et l'on a*

$$T \cdot \text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Remarque 5.10 Ce dernier résultat n'est pas une conséquence du théorème 5.7 précédent dans le cas des surfaces car l'hypothèse faite sur la taille de $\Gamma(a)$ est plus faible que celle du théorème 5.7 : elle ne fait pas intervenir le degré $\deg_{\mathcal{L}}(X)$. La raison profonde sous-jacente est qu'en dimension 2 la variété obstructrice est nécessairement une hypersurface.

5.3.2 Dérivation le long d'une droite

On peut se demander ce qui se passe dans le théorème 5.9 quand le sous-espace $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$ est de dimension 1. C'est l'objet du théorème 5.13 ci-dessous. Le problème vient de ce que une fois que l'on considère la multiplicité le long d'un sous-espace propre, la notion de sous-variété exceptionnelle de Seshadri n'a plus de sens. En effet, pour définir la constante de Seshadri on utilise le fait que l'on peut se donner une résolution simultanée de tous les idéaux de la forme m_x^t où t est un entier, $x \in X$, et $m_x \subset \mathcal{O}_X$ est l'idéal maximal associé au point x . Cette résolution permet de faire varier le diviseur exceptionnel d'une manière continue et la définition de la constante de Seshadri exploite ce fait : en particulier, si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est l'éclatement de X en x , de diviseur exceptionnel E , alors la constante de Seshadri d'un fibré en droites ample $\mathcal{L}$ sur X peut être définie par

$$\varepsilon(x, \mathcal{L}) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{ \pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E) \text{ est nef} \}.$$

Quand il s'agit de l'ordre d'annulation d'une section le long d'un sous-espace strict $\mathbb{E}$, nous pouvons tout de même dire quelque chose : pour tout entier k , soit $\pi_k : X_k \rightarrow X$ une résolution lisse du faisceau d'idéaux

$$\mathcal{I}_k = \bigcap_{x \in \Gamma(S)} \mathcal{I}_{x,k}$$

où $\mathcal{I}_{x,k}$ est engendré par les fonctions régulières f , définies dans un voisinage de x , telles que f s'annule le long de $\mathbb{E}$ à un ordre au moins k . Autrement dit, on fait éclater simultanément chaque idéal $\mathcal{I}_{x,k}$ et puis on prend une résolution de cette variété : en particulier, l'application $\pi_k : X_k \rightarrow X$ est birationnelle et un isomorphisme hors des points $x \in \Gamma(S)$. On note E_k le diviseur exceptionnel de $\pi_k : X_k \rightarrow X$.

Définition 5.11 Nous pouvons définir un *analogue* de la constante de Seshadri par

$$\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \pi_k^*(\mathcal{L})(-E_k) \text{ est nef} \}.$$

On dira que $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ est la *constante de Seshadri de $\mathcal{L}$ relativement à $\Gamma(S)$ et $\mathbb{E}$* . Par ailleurs on appelle *sous-variété exceptionnelle de Seshadri relativement à $\Gamma(S)$ et $\mathbb{E}$* toute variété $V \subset X$ telle que

$$(\pi^*(\mathcal{L})(-E_{\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})+1}))^{\dim(V)} \cdot \tilde{V} < 0$$

où $\tilde{V}$ est la transformée stricte de V dans X_k .

Nous indiquons un lemme (prouvé dans [6]) qui nous assure que la condition d'annulation demandée dans le théorème ci-dessous : $T + \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq T + \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}) < 2T$ est plus faible que la condition classique $2T + 1$.

Lemme 5.12 *On a l'inégalité*

$$\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 5.13 *On suppose que $\dim X = 2$ et que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion. Soient $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$ un sous-espace de dimension 1, et S , a deux entiers strictement positifs tels que $|\Gamma(S)| \geq |\Gamma(a)| \geq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| \cdot |\Gamma(S)|^{\frac{1}{2}}$. Soient $T > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D})$ un entier et $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ une section non nulle s'annulant le long de $\mathbb{E}$ à un ordre au moins $T + \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ sur $\Gamma(S + a)$. Toute sous-variété exceptionnelle de Seshadri de $\mathcal{L}$ relativement à $\Gamma(S)$ et $\mathbb{E}$ est l'adhérence d'un translaté de sous-groupe algébrique de dimension 1. Soit E l'une de ces courbes.*

1. *Si $T_0(E) \neq \mathbb{E}$ alors σ s'annule sur $\Gamma(a) + E$ à un ordre le long de $\mathbb{E}$ au moins T et on a*

$$T \cdot \text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

2. *Si $T_0(E) = \mathbb{E}$ alors σ s'annule sur $\Gamma(a) + E$ et on a*

$$\text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Remarque 5.14 On peut voir dans la preuve de ce résultat (cf [6]) que l'hypothèse sur la taille de a par rapport à S (qui est la même hypothèse que celle faite dans le théorème 5.9) n'intervient que pour prouver que la courbe exceptionnelle est l'adhérence d'un groupe algébrique, autrement dit pour prouver que le groupe obstruteur qui intervient est *non nul*. Cette hypothèse n'intervient pas dans la preuve de l'inégalité numérique sur le degré de la courbe obstructrice.

Chapitre 6

Manin-Mumford et Zilber-Pink

Ce chapitre est composé de deux paragraphes, correspondant respectivement à l'article [4] et à une partie de l'article [5]. Le premier concerne la conjecture de Manin-Mumford (théorème de Raynaud [Ray83]) dont nous avons redonné une preuve en collaboration avec Ullmo. Le second concerne la conjecture de Zilber-Pink, vaste généralisation de Manin-Mumford. Utilisant mon résultat de minoration de hauteur (théorème 4.8 rappelé au chapitre 4) ainsi qu'un résultat concernant la borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type CM (explicité ultérieurement dans ce mémoire, cf. théorème 8.13 et corollaire 8.14), j'ai obtenu les premiers résultats concernant Zilber-Pink pour des variétés abéliennes CM (autre que des produits de courbes elliptiques CM, cas déjà traité dans [Via03] et par une approche simplifiée dans [9]).

6.1 Manin-Mumford

Rappelons tout d'abord l'énoncé de la conjecture de Manin-Mumford.

Théorème 6.1 *Soient K un corps de nombres, A/K une variété abélienne sur K et V/K une sous-variété géométriquement irréductible de A . Si $V(\bar{K})$ contient un ensemble de points de torsion dense dans V pour la topologie de Zariski alors V est un translaté par un point de torsion d'une sous-variété abélienne.*

Dans [4] nous avons redonné une preuve de cet énoncé en suivant une idée de la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Yafaev et Ullmo [UY], [KY]. De nombreuses preuves de la conjecture de Manin-Mumford ont été obtenues. La première preuve donnée par Raynaud [Ray83] utilise des méthodes p -adiques. Hindry [Hin88] donne une preuve utilisant la théorie de Galois et l'approximation diophantienne. Hrushovski montre la conjecture en utilisant des idées provenant de la logique (théorie des modèles des corps). Pink et Roessler [PR02] donnent une preuve par des techniques de géométrie algébrique qui s'inspire de la preuve de Hrushovski. Enfin une preuve utilisant la théorie d'Arakelov via l'équidistribution des orbites sous Galois des points de petite hauteur d'une conjecture plus forte due à Bogomolov est obtenue par Zhang [Zha98] et Ullmo [Ull98].

La preuve obtenue dans [4] s'inspire de stratégies de preuve de la conjecture d'André-Oort qui est un analogue dans le cadre des variétés de Shimura de la conjecture de Manin-Mumford. Dans le cadre des variétés abéliennes nous combinons des résultats galoisiens dus à Serre à des techniques élémentaires d'équidistribution de sous-variétés abéliennes. Les résultats galoisiens utilisés ici sont au centre de la méthode de Hindry et la preuve donnée ici ne peut qu'être considérée comme une variante de la preuve de Hindry. Il est notable que la traduction dans le cadre abélien des idées d'Edixhoven et Yafaev [EY03] donne assez naturellement la preuve de Hindry de la conjecture de Manin-Mumford et qu'il n'est pas utile d'utiliser les techniques ergodiques dans ce cadre.

6.2 Zilber-Pink

6.2.1 Énoncés

Soit $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne (définie) sur $\overline{\mathbb{Q}}$, soit $X/\overline{\mathbb{Q}}$ une courbe irréductible de A et soit r un entier positif ou nul. Suivant Bombieri, Masser et Zannier [BMZ99] dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$ et Rémond [Rém05] dans le cas des variétés abéliennes, on s'intéresse au problème suivant : on considère l'ensemble

$$A^{[r]} := \bigcup_{\text{codim } G \geq r} G(\overline{\mathbb{Q}})$$

où l'union porte sur les sous-groupes algébriques non nécessairement connexes de A de codimension au moins r . À quelles conditions sur r et sur X peut-on garantir que l'ensemble $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[r]}$ est fini ? C'est essentiellement à ce problème qu'est consacré l'article de Rémond. Notons que dans le cas le plus faible possible, si $r = \dim A$, on retombe sur un problème du type Manin-Mumford. Si A est une puissance d'une courbe elliptique, on peut voir que $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[1]}$ est infini, donc on doit nécessairement prendre $r \geq 2$. De manière indépendante, Zilber ([Zil02] Conjecture 2) pour les variétés semi-abéliennes et Pink ([Pin] Conjecture 1.3) pour les variétés de Shimura mixtes, ont formulé une conjecture qui, dans le cas des courbes incluses dans une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ se spécialise en la suivante :

Conjecture 6.2 (Zilber-Pink, cas particulier) *Soient $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne et $X/\overline{\mathbb{Q}}$ une courbe dans A irréductible. Si X n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de A , alors l'ensemble $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[2]}$ est fini.*

Rémond [Rém05] a montré que la conjecture précédente est vraie si une très bonne minoration (conjecturale) des points d'ordre infini de A est vraie : il s'agit d'une conjecture de David généralisant le problème de Lehmer. Par ailleurs dans le cas des variétés abéliennes de type CM, Rémond [Rém05] obtient un résultat inconditionnel, mais sensiblement plus faible que la conjecture 6.2 : soit A une variété abélienne de type CM, isogène au produit $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ où les A_i sont des variétés abéliennes simples de dimension respective g_i , deux à deux non isogènes.

Théorème 6.3 (Rémond) [Rém05] *Soient $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne de type CM et $X/\overline{\mathbb{Q}}$ une courbe dans A qui n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne stricte de A , alors $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[2+\sum_{i=1}^m g_i]}$ est fini.*

Comme je l'explique dans [5], et en suivant la stratégie de Rémond (et Bombieri-Masser-Zannier) : utilisant le corollaire ci-dessous 8.14 (de mon article [7]) rappelé dans un chapitre ultérieur concernant la borne sur les points de torsion pour les variétés abéliennes de type CM, ainsi que mon résultat de minoration de hauteur sur le problème de Lehmer (théorème 4.8 de ce mémoire), j'ai amélioré le résultat de Rémond précédent, obtenant ainsi le premier résultat optimal dans le cas d'une puissance d'une variété abélienne simple de type CM (de dimension au moins 2) :

Théorème 6.4 *La conjecture 6.2 est vraie si A est une puissance d'une variété abélienne de type CM, simple de dimension quelconque.*

Le théorème 6.4 ci-dessus étend au cas d'une puissance d'une variété abélienne de type CM simple de dimension quelconque le résultat de Viada [Via03] et Rémond-Viada ([RV03] théorème 1.7), valable pour une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe. On peut même donner un résultat un peu plus général en fonction des exposants $\gamma(A_i)$ correspondant aux différents facteurs simples de A : voir pour cela la remarque 1.5. de l'article [5]. Notons que suite à la thèse de Carrizosa [Car09] sur le problème de Lehmer relatif pour des variétés abéliennes de type CM, ce théorème est maintenant généralisé au cas d'un produit quelconque de variétés abéliennes CM.

6.2.2 Esquisse de preuve du théorème 6.4

Dans toute la suite de ce paragraphe, on fixe A/K une variété abélienne de type CM et X une courbe qui est transverse dans A , ie. contenue dans aucun translaté de sous variété abélienne stricte.

La preuve repose essentiellement sur trois points :

1. En relisant la preuve de Rémond, on peut dans le cas CM utiliser une estimation du cardinal des points de torsion meilleure que celle qu'il utilise : là où il utilise une estimation de Masser, j'utilise mon corollaire 1.2 de [7] (corollaire 8.16 de ce mémoire).
2. Dans une variété abélienne A^n , avec A simple, les sous-groupes algébriques sont de dimension un multiple de la dimension de A .
3. Mon résultat (théorème 4.8) sur le problème de Lehmer permet de gagner 1 dans l'estimation finale.

Notons tout d'abord que le problème que l'on considère est stable par isogénies. Dans la suite on se restreint donc au cas d'une variété abélienne de type CM produit de variétés abéliennes géométriquement simples, $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$, les A_i étant de dimension g_i et deux à deux non isogènes. En appliquant le théorème 1.5 de David-Hindry [DH00], Rémond obtient le théorème 5.3 précédent que nous réécrivons ici en mettant en avant une inégalité numérique. Il s'agit du résultat incondionnel suivant (c'est le corollaire 1.2., page 529, de [Rém05]) :

Théorème 6.5 =Théorème 5.3, (Rémond) *L'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini dès que*

$$r \geq 2 + \sum_{i=1}^m g_i.$$

Remarque 6.6 Dans l'énoncé précédent (théorème 6.5) nous savons maintenant, en utilisant le corollaire 1.1 de [Rém07] et sa preuve, que l'on peut remplacer l'hypothèse X *transverse* par l'hypothèse plus faible X *contenue dans aucun sous-schéma en groupes de A , distinct de A* . La même chose est vraie pour notre théorème 5.4 que nous avons donc énoncé directement sous cette forme.

En relisant la preuve de Rémond, on constate en fait qu'il prouve un résultat un peu plus fin. On utilise pour cela la notation que j'ai introduite dans [7] :

Notation. Soit A/K_0 une variété abélienne, on note

$$\gamma(A) = \inf \{ b > 0 \mid \exists C(A) > 0 \forall K/K_0 \text{ finie}, |(A(K)_{\text{tors}})| \leq C(A/K_0)[K : K_0]^b \}.$$

Proposition 6.7 (Rémond) *L'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini dès que*

$$r > 1 + \sum_{i=1}^m \gamma(A_i).$$

Dans sa preuve du théorème 6.5 ci-dessus, Rémond utilise la majoration due à Masser [Mas84]

$$\text{Card}(A_i(K)_{\text{tors}}) \ll D^{g_i + \varepsilon}$$

avec ε assez petit. En prenant le produit, on voit que $\gamma(A) \leq \sum_{i=1}^m g_i + \varepsilon$ d'où, vue la proposition 6.7, le choix de r dans le théorème 6.5. Précisément, dans son article l'utilisation du résultat de Masser est faite dans le corollaire 5.1., page 540, de [Rém05].

Il y a donc deux manières de raffiner ce résultat. La première consiste à remplacer le terme $1 + \sum \gamma(A_i)$ par un terme plus petit. Le théorème principal de mon article sur le problème de Lehmer [5] permet précisément d'améliorer ceci : remplaçant $1 + \sum \gamma(A_i)$ par $\sum \gamma(A_i)$. La seconde amélioration possible consiste à obtenir une majoration plus précise que celle de Masser pour l'exposant $\gamma(A)$ dans le cas d'une variété abélienne simple de type CM. C'est ensuite la conjonction de ces deux améliorations qui me permet de prouver le théorème 6.4.

Chapitre 7

Mumford-Tate et Propriété μ

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler la notion de groupe de Mumford-Tate ainsi que la conjecture de Mumford-Tate. Ceci sera utilisé dans la suite de ce mémoire. Le second paragraphe concerne deux situations produits dans lesquelles, en collaboration avec Hindry nous avons obtenus dans [3] et [2] des résultats concernant cette conjecture. Enfin le dernier paragraphe concerne une question d'une nature indépendante sur les points de torsion dans les variétés abéliennes, mais dont les énoncés et résultats, que l'on trouve également dans [3] et [2], utilisent les notions introduites à la première section.

7.1 Rappels sur Mumford-Tate

Commençons par rappeler la définition des groupes de Hodge et Mumford-Tate associés à une variété abélienne A de dimension $g \geq 1$ définie sur un corps de nombres $K \subset \mathbb{C}$. On note $V = H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ le premier groupe de cohomologie singulière de la variété analytique complexe $A(\mathbb{C})$. C'est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension $2g$. Il est naturellement muni d'une structure de Hodge de type $\{(1, 0), (0, 1)\}$, c'est-à-dire d'une décomposition sur $\mathbb{C}$ de $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ donnée par $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ telle que $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$ où $\overline{}$ désigne la conjugaison complexe. On note $\mu : \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{GL}_{V_{\mathbb{C}}}$ le cocaractère tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^{\times}$, $\mu(z)$ agit par multiplication par z sur $V^{1,0}$ et agit trivialement sur $V^{0,1}$. On définit le groupe de Mumford-Tate en suivant [Pin98].

Définition 7.1 Le *groupe de Mumford-Tate* $\mathrm{MT}(A)/\mathbb{Q}$ de A est le plus petit $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique G de GL_V (vu comme $\mathbb{Q}$ -schéma en groupes) tel que, après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, le cocaractère μ se factorise à travers $G_{\mathbb{C}} := G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Le *groupe de Hodge* $\mathrm{Hdg}(A)/\mathbb{Q}$ de A est $(\mathrm{MT}(A) \cap \mathrm{SL}_V)^0$, la composante neutre de $\mathrm{MT}(A) \cap \mathrm{SL}_V$.

Notations : Soit ℓ un nombre premier. Notons $T_{\ell}(A)$ le module de Tate, $V_{\ell} := T_{\ell}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$ et $\rho_{\ell^{\infty}} : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \mathrm{Aut}(T_{\ell}(A)) \subset \mathrm{GL}(V_{\ell})$ la représentation ℓ -adique associée à l'action de Galois sur les points de ℓ^{∞} -torsion de A . On définit $\overline{G}_{\ell}$ comme étant l'adhérence de Zariski de l'image G_{ℓ} de $\rho_{\ell^{\infty}}$ dans le groupe algébrique $\mathrm{GL}_{V_{\ell}} \simeq \mathrm{GL}_{2g, \mathbb{Q}_{\ell}}$. C'est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_{\ell}$ dont on notera $\overline{G}_{\ell}^0$ la composante neutre (composante connexe de l'identité). Nous noterons par ailleurs ρ_{ℓ} la version modulo ℓ de la représentation $\rho_{\ell^{\infty}}$.

Les théorèmes de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique (cf. [sga73] XI) d'une part, et la comparaison entre le premier groupe de cohomologie étale et le module de Tate (cf. [Mil86] 15.1 (a)) d'autre part donnent pour tout premier ℓ l'isomorphisme canonique :

$$V_{\ell} = T_{\ell}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell} \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell}.$$

Nous fixons une fois pour toute dans la suite un tel isomorphisme. Ceci permet de comparer $\mathrm{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell}$ et $\overline{G}_{\ell}^0$: on sait par les travaux de Borovoi [Bor74], Deligne [DMOS82] Exp I, 2.9, 2.11, et Pjateckiĭ-Šapiro [PŠ71] que l'inclusion suivante est toujours vraie :

Théorème 7.2 (B-D-P-Š) *Pour tout ℓ premier, $\overline{G}_\ell^0 \subset \text{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$.*

La conjecture de Mumford-Tate assure qu'il s'agit en fait d'une égalité.

Conjecture 7.3 (Mumford-Tate) *Pour tout ℓ premier, on a $\overline{G}_\ell^0 = \text{MT}(A) \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$.*

Remarque 7.4 Il existe une variante forte de cette conjecture, due à Serre ([Ser77] conjecture C.3.7.a), affirmant que le groupe ℓ -adique G_ℓ est d'indice fini, borné indépendamment de ℓ , dans $\text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell)$. De fait dans un travail en cours de rédaction avec Hindry nous vérifions, en appliquant les résultats de Faltings [Fal83], les techniques de Serre, notamment [Ser00a], ainsi que les travaux de Wintenberger [Win02], que cette conjecture forte est en fait une conséquence de la conjecture ci-dessus. Nous n'utiliserons pas cette remarque dans la suite.

Définition 7.5 Après avoir choisi une polarisation, on sait que le groupe de Mumford-Tate de A est un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ du groupe des similitudes symplectiques noté GSp_{2g} . Nous dirons que A est de type GSp si son groupe de Mumford-Tate est générique, c'est-à-dire si $\text{MT}(A) = \text{GSp}_{2g}$. Nous dirons que A est pleinement de type GSp si A est telle que

$$\text{pour tout premier } \ell \text{ assez grand, } \rho_\ell(G_K) = \text{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell).$$

On sait par exemple après Serre [Ser72] que toute courbe elliptique sans CM, ie à anneau d'endomorphismes (sur $\bar{K}$) $\text{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$, est pleinement de type GSp (il s'agit même dans ce cas d'une condition équivalente à être sans CM sur $\bar{K}$). En dimension quelconque, une condition nécessaire est d'avoir $\text{End}_{\bar{K}} A = \mathbb{Z}$; cette condition n'est pas en général suffisante, mais on sait qu'elle l'est (cf. théorème 7.6 ci-dessous) si g n'appartient pas à l'ensemble exceptionnel Σ défini comme suit :

$$\Sigma = \left\{ g \geq 1 \mid \exists k \geq 3, \text{ impair}, \exists a \geq 1, 2g = (2a)^k \text{ ou } 2g = \binom{2k}{k} \right\}. \quad (7.1)$$

Un certain nombre de résultats concernant la conjecture de Mumford-Tate précédente sont connus. Disons simplement ici que cette conjecture (ainsi que la variante forte mentionnée dans la remarque 6.4 ci-dessus) est un théorème pour les variétés abéliennes de type CM (travaux de Shimura-Taniyama [ST61]) et que dans ce cas le groupe de Mumford-Tate est un tore algébrique. Un autre exemple important de variétés abéliennes vérifiant la conjecture est un théorème de Serre ([Ser00d] Théorème 3 et [Ser00b] Théorème 3) complété par Pink ([Pin98] Theorem 5.14) et dans une autre direction par Hall ([Hal11] Theorem 1) :

Théorème 7.6 (Serre, Pink, Hall) *Si A/K est une variété abélienne de dimension g n'appartenant pas à Σ , définie sur un corps de nombres, telle que $\text{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbb{Z}$, alors A est pleinement de type GSp . Si g est quelconque mais l'on suppose que le groupe de Mumford-Tate $\text{MT}(A) = \text{GSp}$ et que le modèle de Néron de A sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ possède une fibre semistable avec dimension torique égale à un, la même conclusion vaut.*

Rappelons enfin un fait sans doute bien connu des experts mais que nous n'avons pas trouvé dans la littérature et que nous avons donc rédigé dans [3] (proposition 2.11).

Proposition 7.7 *Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Le groupe de Mumford-Tate $\text{MT}(A)$ est de dimension 2 si et seulement si A est isogène à une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe.*

Question 7.8 *Peut-être peut-on démontrer qu'en fait pour une variété abélienne A sans facteur carré on a*

$$\dim \text{MT}(A) \geq 2 + \log_2 \dim A \quad ?$$

Nous renvoyons à [Orr] pour des résultats en lien avec cette question.

7.2 Deux cas produits

Il y a deux situations dans lesquelles, suivant essentiellement Serre, nous avons (légèrement) étendu les résultats connus concernant Mumford-Tate : le cas d'un produit de courbes elliptiques (pour la variante forte) et le cas d'un produit de variétés abéliennes pleinement de type GSp au sens de la définition 6.5 ci-dessus.

7.2.1 Produit de courbes elliptiques

Serre donne dans [Ser72] une preuve de cette conjecture forte pour un produit de deux courbes elliptiques non-isogènes, Ribet [Rib75] l'en déduit pour un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes sans multiplication complexe, et, dans une lettre à Masser (cf. [Ser80]), Serre donne une preuve pour un produit de courbes elliptiques deux à deux non-isogènes à multiplication complexe. Il est alors essentiellement formel d'en déduire le résultat pour un produit de courbes elliptiques. C'est le théorème 2.10 de notre article [3] que nous énonçons ici sous forme d'une proposition :

Proposition 7.9 *Soient $g \geq 1$ et $E_1, \dots, E_g/K$ des courbes elliptiques. Posons $A = \prod_{i=1}^g E_i$. Pour tout ℓ premier on a*

$$G_{\ell,A} = \text{Im}(\rho_{\ell^\infty}) \subset \text{MT}(A)(\mathbb{Z}_\ell),$$

cette inclusion étant d'indice fini, borné indépendamment de ℓ .

7.2.2 Produit de variétés abéliennes pleinement de type GSp

Suivant l'approche de Serre pour un produit de courbes elliptiques sans CM, nous démontrons dans [2] (théorème 1.4) que la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour un tel produit de variétés abéliennes :

Théorème 7.10 *Soient r et $n_1, \dots, n_r$ des entiers strictement positifs. Soient A_i des variétés abéliennes de dimension g_i non isogènes deux à deux telles que $\text{Hdg}(A_i) = \text{Sp}_{2g_i}$. Posons $A := A_1^{n_1} \times \dots \times A_r^{n_r}$ et, pour tout premier ℓ , notons $\rho_{\ell^\infty, i}$ (respectivement $\rho_{\ell^\infty} = \rho_{\ell^\infty, 1} \times \dots, \rho_{\ell^\infty, r}$) les représentations ℓ -adiques associées aux A_i (respectivement à A) alors :*

1. *l'inclusion naturelle suivante est un isomorphisme :*

$$\text{Hdg}(A) \cong \text{Hdg}(A_1 \times \dots \times A_r) \hookrightarrow \text{Sp}_{2g_1} \times \dots \times \text{Sp}_{2g_r}.$$

2. *soit ℓ un nombre premier. Si pour tout i , on a $\rho_{\ell^\infty, i}(\text{Gal}(K(A_i[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty}))) \cong \text{Sp}_{2g_i}(\mathbb{Z}_\ell)$ (à indice fini près) alors, on a (à indice fini près) :*

$$\rho_{\ell^\infty}(\text{Gal}(K(A[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty}))) \cong \text{Sp}_{2g_1}(\mathbb{Z}_\ell) \times \dots \times \text{Sp}_{2g_r}(\mathbb{Z}_\ell).$$

3. *si de plus l'indice fini pour chaque A_i est borné indépendamment de ℓ , il en est de même pour A .*

Remarque 7.11 On peut résumer le théorème en disant que si la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A_i de type GSp, alors la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour $A = \prod_i A_i^{n_i}$. Sous la dernière hypothèse (point 3.), on montre même dans [2] qu'il y a en fait égalité pour tout ℓ suffisamment grand.

7.3 Propriété μ pour les variétés abéliennes

Soit A/K une variété abélienne principalement polarisée. Soit ℓ un nombre premier. Notons e_ℓ l'accouplement de Weil correspondant. Étant donné un sous-groupe H fini de $A[\ell^\infty]$, introduisons l'invariant suivant :

$$m_1(H) = \max \{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \geq 0, \exists P, Q \in H \text{ d'ordre } \ell^n, e_{\ell^n}(P, Q) \text{ engendre } \mu_{\ell^k}\}.$$

On peut noter que, sur la définition, il est évident que $m_1(H)$ est supérieur à la valeur m suivante :

$$m(H) := \max \{k \in \mathbb{N} \mid \exists P, Q \in H \text{ d'ordre } \ell^k, \quad e_{\ell^k}(P, Q) \text{ engendre } \mu_{\ell^k}\}.$$

Lorsque H est de la forme $A[\ell^n]$, on a visiblement $m_1(H) = m(H) = n$.

Dans le cas général, si H contient deux points d'ordre ℓ^n , tel que l'accouplement de Weil de ces deux points est une racine primitive k -ième de l'unité, alors comme cet accouplement est Galois-équivariant, on obtient que

$$K(\mu_{\ell^k}) \subset K(H).$$

Définition 7.12 Nous appelons *propriété* (μ) pour une variété abélienne le fait d'avoir, pour tout sous-groupe fini $H \subset A[\ell^\infty]$, l'égalité (à indice fini près, borné uniformément en ℓ) :

$$K(\mu_{\ell^{m_1(H)}}) = K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}).$$

Question 7.13 *Est-il vrai que toute variété abélienne A/K sur un corps de nombres vérifie la propriété (μ) ?*

Notons $\lambda : \mathrm{GSp} \rightarrow \mathbb{G}_m$ le morphisme multiplicateur, de noyau Sp . Utilisant le fait que la conjecture de Mumford-Tate est vraie dans ce cas (et que le groupe est GSp), nous montrons dans [2] proposition 3.9, que les variétés abéliennes de type GSp ont la propriété (μ) . Notons que, vu notre définition de l'invariant $m_1(H)$, on a toujours l'inclusion

$$K(\mu_{\ell^{m_1(H)}}) \subset K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}).$$

Théorème 7.14 *Soit A une variété abélienne de dimension g , définie sur un corps de nombres K . En notant $\delta(H) := (\mathbb{Z}_\ell^\times : \lambda(G_0(H)))$ où $G_0(H) = \rho_{\ell^\infty}(\mathrm{Gal}(K(A[\ell^\infty])/K(H)))$, on a, à indice fini près, pour tout H sous-groupe fini de $A[\ell^\infty]$,*

$$[K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K] = \delta(H).$$

Si on suppose de plus que la variété abélienne A est telle que G_ℓ s'identifie, à indice fini près, avec $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$, alors, pour tout H sous-groupe fini de $A[\ell^\infty]$, on a l'égalité à indice fini près :

$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^{m_1(H)}}).$$

Dans le cas général d'une variété abélienne quelconque, la question 7.13 reste pour l'instant ouverte. Par contre on peut répondre à la question pour des groupes H particuliers : quand $H = A[\ell^n]$ est le groupe de ℓ^n torsion entier, avec ℓ premier et n entier quelconques variables, la propriété (μ) est vérifiée. En effet, l'existence de l'accouplement de Weil implique que, pour toute variété abélienne A définie sur K , on $\mu_N \subset K(A[N])$ et en particulier $K(\mu_{\ell^m}) \subset K(A[\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty})$. Utilisant notamment le théorème de Serre et Bogomolov [Bog80] et [Ser00d] disant que l'image de la représentation ℓ -adique de Galois contient un sous-groupe d'indice fini des homothéties, l'indice étant borné indépendamment de ℓ , nous montrons dans [3] proposition 6.8, que l'inclusion précédente est en fait une égalité, à indice fini près.

Théorème 7.15 *Soient A une variété abélienne définie sur K , il existe c_A telle que :*

$$\forall \ell \text{ premier}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad [K(A[\ell^m]) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K(\mu_{\ell^m})] \leq c_A.$$

Chapitre 8

Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes

8.1 Introduction

Soient K un corps de nombres et A/K une variété abélienne sur K de dimension $g \geq 1$. Le classique théorème de Mordell-Weil assure que le groupe $A(K)$ des points K -rationnels de A est de type fini. Un problème naturel qui se pose alors est de comprendre le sous-groupe de torsion $A(K)_{\text{tors}}$. Dans le cas où A est une courbe elliptique (définie) sur $\mathbb{Q}$, Mazur [Maz78] a classifié les groupes de torsion possibles. Ceci étant, ce problème semble tout à fait hors de portée dans le cas général et un sous-problème plus raisonnable consiste à essayer de comprendre le cardinal de $A(K)_{\text{tors}}$ lorsque A et K varient. Il y a essentiellement deux approches possibles pour ce problème : soit l'on fixe le corps de nombres K et l'on s'intéresse à la variation du cardinal lorsque A décrit les variétés abéliennes sur K de dimension g fixée. Dans cette direction citons le célèbre résultat de Merel [Mer96] : si E est une courbe elliptique sur un corps de nombres K , le cardinal de $E(K)_{\text{tors}}$ est borné par une constante ne dépendant que du degré de K sur $\mathbb{Q}$. Parent [Par00] a rendu effectif le résultat de Merel, obtenant une borne doublement exponentielle en le degré $[K : \mathbb{Q}]$. En dimension, supérieure essentiellement rien n'est connu concernant ce problème connu sous le nom de conjecture de borne uniforme. La seconde approche possible concernant le cardinal de $A(K)_{\text{tors}}$ consiste à fixer une variété abélienne A définie sur un corps de nombres K_0 et à faire varier K parmi les extensions finies de K_0 ; l'objectif étant cette fois-ci d'obtenir une borne par une constante $C(A/K_0, [K : K_0])$ avec une dépendance explicite (la meilleure possible) en le degré $[K : K_0]$ (ou, ce qui revient au même en le degré $[K : \mathbb{Q}]$). Concernant ce second problème, Masser [Mas] et [Mas84] a montré dans le cas général que la dépendance est polynomiale en $[K : \mathbb{Q}]$; plus précisément il montre l'énoncé suivant :

Théorème 8.1 (Masser) *Soit A une variété abélienne de dimension g , définie sur un corps de nombres K_0 , il existe une constante c_A telle que, pour toute extension finie K de K_0 on a :*

$$|A(K)_{\text{tors}}| \leq c_A [K : \mathbb{Q}]^g (\log [K : \mathbb{Q}])^g.$$

Masser indique d'ailleurs que l'exposant g n'est probablement pas le meilleur possible (sauf pour le cas d'une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe). La question naturelle qui se pose est alors de savoir quel est le plus petit exposant $\gamma(A)$ possible dans cette borne polynomiale. J'ai donné, une réponse à cette question dans un certain nombre de cas : seul dans le cas des variétés abéliennes CM [7], en collaboration avec Hindry dans le cas d'un produit de courbes elliptiques [3] ainsi que dans le cas générique d'une variété abélienne dont le groupe de Mumford-Tate est GSp et pour laquelle la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée (par exemple les variétés abéliennes dont l'anneau d'endomorphismes est trivial et dont la dimension est 2, 6 ou impaire).

Soit A/K une variété abélienne de dimension $g \geq 1$ sur un corps de nombres K . On utilise la notation $\ll$ pour dire à une constante multiplicative près ne dépendant que de A/K et on pose

$$\gamma(A) = \inf \{x > 0 \mid \forall F/K \text{ finie, } |A(F)_{\text{tors}}| \ll [F : K]^x\}.$$

Dans le cas général, la meilleure estimation de ce nombre est due à Masser, via le théorème 8.1 ci-dessus qui montre que

$$\gamma(A) \leq g.$$

Cette borne est optimale lorsque A est une puissance d'une courbe elliptique avec multiplication complexe ; il est fort probable que la borne de Masser n'est jamais optimale dans les autres cas. Le problème analogue pour les modules de Drinfeld est traité dans [Bre10]. Ces calculs nous ont amené à poser la question suivante en dimension supérieure. Soit $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne, isogène au produit $\prod_{i=1}^n A_i^{n_i}$ où les A_i sont des variétés abéliennes simples deux à deux non-isogènes et où les n_i sont des entiers strictement positifs.

Définition 8.2 On définit l'invariant $\alpha(A)$ par

$$\alpha(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \text{MT} \left(\prod_{i \in I} A_i \right)}.$$

Question 8.3 Soit A/K est une variété abélienne sur un corps de nombres. A-t-on

$$\alpha(A) = \gamma(A) ?$$

On remarquera (cf. la proposition 7.7 de ce mémoire) que, sauf dans le cas d'une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe (i.e. $A = A_1^n$ avec $\dim A_1 = 1$ et $\dim \text{MT}(A) = \dim \text{MT}(A_1) = 2$), l'invariant $\alpha(A)$ est strictement plus petit que $\dim A$.

Notons tout d'abord qu'une des deux inégalités est toujours vraie (la preuve est essentiellement donnée au théorème 1.4 de [7], cf. également paragraphe 3 de [3]).

Théorème 8.4 Si $A/\overline{\mathbb{Q}}$ est une variété abélienne quelconque, l'inégalité $\gamma(A) \geq \alpha(A)$ est vraie.

8.2 Cas des extensions $K(A[n])/K$

Dans le cas des variétés abéliennes simples de type CM, Ribet a donné une minoration de $\gamma(A)$. Précisément, en notant $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n et $A[n]$ l'ensemble des points de $A(\overline{K})$ d'ordre divisant n , Ribet [Rib81] montre que :

Théorème 8.5 (Ribet) Si A/K est une variété abélienne de type CM, alors, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 ne dépendant que de A et K telles que : pour tout entier $n \geq 1$,

$$C_1^{\omega(n)} \leq \frac{[K(A[n]) : K]}{n^d} \leq C_2^{\omega(n)},$$

où $d = \dim \text{MT}(A)$. De plus si A est géométriquement simple on a $d \geq 2 + \log_2 g$.

Une conséquence immédiate de la proposition 2.2 de notre article [2] est que la première partie de l'énoncé précédent vaut en fait pour toute variété abélienne satisfaisant la conjecture de Mumford-Tate. Précisément :

Théorème 8.6 Soit A/K est une variété abélienne sur un corps de nombres. Si la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A , alors, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 ne dépendant que de A et K telles que : pour tout entier $n \geq 1$,

$$C_1^{\omega(n)} \leq \frac{[K(A[n]) : K]}{n^d} \leq C_2^{\omega(n)},$$

où $d = \dim \text{MT}(A)$.

8.3 Cas de type CM

Rappelons la notion de groupe des caractères d'un tore algébrique sur un corps k (*i.e.* d'un groupe algébrique G/k isomorphe sur $\bar{k}$ au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}^{\dim G}$).

Définition 8.7 Soit T/k un tore algébrique sur un corps k . On note $\bar{k}$ la clôture séparable de k . On appelle *groupe des caractères de T* et on note $X^*(T)$ le groupe $\text{Hom}_{\bar{k}}(T_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,\bar{k}})$. On définit de même le *groupe des cocaractères de T* et on note $X_*(T)$ le groupe $\text{Hom}_{\bar{k}}(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, T_{\bar{k}})$.

Une variété abélienne A est *sans facteur carré* si dans la décomposition $\prod A_i^{n_i}$, à isogénie près, en produit de facteurs simples deux à deux non isogènes, les entiers n_i valent tous 1.

Si A/K est de type CM sans facteur carré, on note T son groupe de Mumford-Tate : c'est un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$ et on note

$$I = \{\chi_1, \dots, \chi_{2g}\}$$

l'ensemble des caractères diagonalisant (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) l'action de T sur l'espace vectoriel $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de dimension $2g$ donné par $V = H^1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. L'hypothèse *sans facteur carré* est faite pour assurer que les χ_i sont deux à deux distincts.

Définition 8.8 Soit A/K de type CM sans facteur carré. Soit W un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de $X^*(T) \otimes \mathbb{Q}$. On pose

$$n(W) = |I \cap W| = \text{Card}(\{i \in \{1, \dots, 2g\} \mid \chi_i \in W\}).$$

Définition 8.9 On définit un invariant $\beta(A)$ comme suit :

$$\beta(A) = \sup \left\{ \frac{n(W)}{\dim W} \mid W \text{ sous-}\mathbb{Q}\text{-espace vectoriel non nul de } X^*(T) \otimes \mathbb{Q} \right\}.$$

Remarque 8.10 On voit sur la définition que le nombre $\beta(A)$ ne dépend que des caractères $\chi_1, \dots, \chi_{2g}$. En particulier, étant donnée une variété abélienne de type CM, *i.e.* étant donné un type CM le nombre $\beta(A)$ est calculable explicitement et algorithmiquement. De fait il est clair que si l'on note $W_S = \text{Vect}(S)$ pour tout sous-ensemble S de I , alors

$$\beta(A) = \max \frac{n(W_S)}{\dim W_S}$$

le max portant sur la collection finie des sous-ensembles S de I . Ceci se calcule en déterminant les relations entre les différents caractères $\chi \in I$.

Avec ces notations, suivant une stratégie suggérée par Serre, nous pouvons maintenant en venir au résultat principal que je prouve dans [7] :

Théorème 8.11 Soit A/K une variété abélienne sans facteur carré, de type CM. On a

$$\gamma(A) = \beta(A).$$

Remarque 8.12 Notons quelque chose qui n'était pas évident *a priori* sur la définition de $\gamma(A)$: dans le cas de type CM sans facteur carré, l'exposant $\gamma(A)$ est un nombre rationnel (puisque'il est clair sur la définition que $\beta(A)$ l'est, avec un numérateur compris entre 2 et $2g$ et un dénominateur compris entre 1 et $\dim T$).

Par ailleurs ce résultat est d'autant plus intéressant qu'il est possible de calculer une bonne majoration de $\beta(A)$ en fonction de g voire dans certains cas particuliers de calculer sa valeur exacte en fonction de g et $d = \dim T$. Pour cela je montre dans [7] que :

Théorème 8.13 Soit A/K une variété abélienne sans facteur carré, de type CM, de dimension $g \geq 1$. On a

$$\beta(A) \leq \frac{2g}{2 + \log_2(g)},$$

où l'on a noté $\log_2$ le logarithme en base 2.

En conséquence de mes théorèmes 8.11 et 8.13, j'obtiens :

Corollaire 8.14 *Soit A/K une variété abélienne de type CM de dimension $g \geq 1$, sans facteur carré. On a*

$$\gamma(A) \leq \frac{2g}{2 + \log_2(g)},$$

où l'on a noté $\log_2$ le logarithme en base 2.

Remarque 8.15 On sait (cf. par exemple [Dod87] theorem 1.0) que pour tout g de la forme 2^n , avec $n \geq 2$, il existe une variété abélienne CM simple telle que la dimension de son groupe de Mumford-Tate est précisément $2 + \log_2(g)$. En utilisant le théorème 8.4, ceci prouve que la borne du corollaire précédent sur $\gamma(A)$ est optimale en général.

On voit ainsi que dès lors que la dimension de la variété abélienne est strictement supérieure à 1, ceci raffine le résultat de Masser (dans le cas de type CM) :

Corollaire 8.16 *Soit A/K une variété abélienne sans facteur carré, de type CM et de dimension $g \geq 2$. Alors,*

$$\gamma(A) < g.$$

Passons maintenant aux cas particuliers dans lesquels on peut calculer explicitement la constante $\beta(A)$ et donc $\gamma(A)$.

Définition 8.17 Une variété abélienne A de type CM, de dimension g est *de type non dégénéré* si la dimension du groupe de Mumford-Tate T de A est $g + 1$ et *de type quasi non dégénéré* si la dimension de T est g ou $g + 1$.

Remarque 8.18 Soit A une variété abélienne quelconque de dimension g , de groupe de Mumford-Tate de dimension d . On sait que $d \leq g + 1$. Par ailleurs si A est géométriquement simple de type CM, alors Ribet [Rib81] a montré que

$$2 + \log_2(g) \leq d.$$

De plus un autre résultat de Ribet (cf. [Rib83] Theorem 2) dit que si A est une variété abélienne géométriquement simple de type CM et de dimension un entier g premier, alors A est de type non dégénéré. Je montre (cf. proposition 1.18 et paragraphe 8 de [7]) que :

Proposition 8.19 *Soit A/K une variété abélienne géométriquement simple, de type CM, de dimension g . Si le type de A est quasi non dégénéré ou si g est inférieur ou égal à 7, alors*

$$\beta(A) = \frac{2g}{d} = \alpha(A)$$

où d est la dimension du groupe de Mumford-Tate de A .

Enfin il y a également un dernier cas où l'on sait calculer la valeur de $\gamma(A)$: si A est une courbe elliptique sans multiplication complexe. Dans ce cas on connaît le groupe de Mumford-Tate de A , c'est le groupe algébrique GL_2 sur $\mathbb{Q}$. Je vérifie dans [7] que :

Proposition 8.20 *Si E/K est une courbe elliptique sans multiplication complexe, alors*

$$\gamma(E) = \frac{1}{2} = \alpha(E).$$

Une question assez intrigante reste pour l'instant ouverte :

Question 8.21 *Soit A/K une variété abélienne simple de type CM. Est-il vrai que $\alpha(A) = \beta(A)$?*

8.4 Cas d'un produit de courbes elliptiques

Dans l'article [3] nous donnons une réponse affirmative à la question 8.3 ci-dessus si A est un produit de courbes elliptiques.

Théorème 8.22 *Si $A = \prod_{i=1}^m E_i$ est un produit de courbes elliptiques sur $\overline{\mathbb{Q}}$, isogènes ou non, alors*

$$\gamma(A) = \alpha(A).$$

De plus, si les E_i sont deux à deux non-isogènes, ce nombre vaut $2m/(1+3m)$ si toutes les E_i sont sans multiplication complexe et $2r/(1+r)$ si $E_1, \dots, E_r$ sont à multiplication complexe et $E_{r+1}, \dots, E_m$ sont sans multiplication complexe.

Notons que dans le cas d'un produit de courbes elliptiques sans facteur carré (*i.e.* A isogène à un produit $\prod_{i=1}^m E_i$, les E_i étant deux à deux non-isogènes) ce théorème nous donne notamment la majoration

$$\gamma(A) \leq \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } A \text{ est sans CM} \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors que le résultat de Masser donnait simplement $\gamma(A) \leq \dim A$.

8.5 Cas générique de type GSp

Soit A une variété abélienne de dimension $g \geq 1$ définie sur un corps de nombres K plongé dans $\mathbb{C}$.

Théorème 8.23 *Si A/K est une variété abélienne de dimension g telle que, pour tout premier ℓ , le groupe de Galois associé G_ℓ est d'indice fini dans $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$, alors*

$$\gamma(A) = \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{MT}(A)} = \frac{2g}{2g^2 + g + 1} = \alpha(A). \quad (8.1)$$

Utilisant les résultats et notations du chapitre précédent (cf. théorème notamment 7.6 de ce mémoire), on en déduit :

Corollaire 8.24 *Si A/K est une variété abélienne définie sur un corps de nombres K , de dimension g telle que $\mathrm{End}_{\overline{K}} A = \mathbb{Z}$. Supposons l'une des deux conditions suivantes réalisée :*

1. *la dimension g n'appartient pas à Σ ,*
2. *le modèle de Néron de A sur $\mathcal{O}_K$ possède une fibre semistable avec dimension torique égale à 1,*

alors

$$\gamma(A) = \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{MT}(A)} = \frac{2g}{2g^2 + g + 1} = \alpha(A). \quad (8.2)$$

En fait, utilisant notre résultat (théorème 7.10 de ce mémoire) sur la conjecture de Mumford-Tate pour un produit, nous pouvons également, via un argument combinatoire supplémentaire, (cf. [2] pour les détails), obtenir la valeur de $\gamma(A)$ pour un produit de variétés abéliennes de type GSp vérifiant Mumford-Tate (fort).

Théorème 8.25 *Soit A_i/K des variétés abéliennes non isogènes deux à deux, de dimension g_i définies sur un corps de nombres, de type GSp telles que, pour tout premier ℓ , le groupe de Galois associé G_ℓ est d'indice fini dans $\mathrm{GSp}_{2g_i}(\mathbb{Z}_\ell)$. Soit $A := A_1^{n_1} \times \dots \times A_r^{n_r}$ avec des entiers $n_i \geq 1$. On a alors*

$$\gamma(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, r\}} \left\{ \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \mathrm{MT}(\prod_{i \in I} A_i)} \right\} = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, r\}} \left\{ \frac{2 \sum_{i \in I} n_i g_i}{1 + \sum_{i \in I} 2g_i^2 + g_i} \right\} = \alpha(A). \quad (8.3)$$

Corollaire 8.26 *Soit A_i/K des variétés abéliennes non isogènes deux à deux, de dimension g_i définies sur un corps de nombres, telles que $\text{End}_{\overline{K}} A_i = \mathbb{Z}$. Soit $A := A_1^{n_1} \times \cdots \times A_r^{n_r}$ avec des entiers $n_i \geq 1$. Supposons que pour chaque A_i l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :*

1. *la dimension g_i n'appartient pas à Σ ,*
 2. *le modèle de Néron de A_i sur $\mathcal{O}_K$ possède une fibre semistable avec dimension torique égale à 1,*
- alors*

$$\gamma(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \left\{ \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \text{MT}(\prod_{i \in I} A_i)} \right\} = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} \left\{ \frac{2 \sum_{i \in I} n_i g_i}{1 + \sum_{i \in I} 2g_i^2 + g_i} \right\} = \alpha(A). \quad (8.4)$$

Chapitre 9

Classes d'isogénie de variétés abéliennes

En 1983, Faltings a prouvé le résultat suivant pour deux variétés abéliennes A et B définies sur un corps de nombres : une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient K -isogènes est qu'il existe un ensemble S de densité un de premiers $\mathfrak{p}$ de K (de bonne réduction pour A et B) tels que les facteurs locaux des séries L de A et B soit égaux. Ce résultat a été récemment amélioré dans [HP] pour les courbes elliptiques de la façon suivante : plutôt que demander que les réductions $A_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{p}}$ aient le même nombre de points sur le corps résiduel $k_{\mathfrak{p}}$ (condition équivalente à l'égalité des facteurs locaux des séries L dans le cas de dimension 1), il suffit (pour des courbes elliptiques) de demander que le nombre de points de $A(k_{\mathfrak{p}})$ et de $B(k_{\mathfrak{p}})$ aient le même ensemble de diviseurs premiers. De plus il suffit de savoir ceci non pour tous les nombres premiers mais seulement pour une famille infinie. Dans la prépublication [1] je raffine le résultat de Faltings de la même façon pour les variétés abéliennes pleinement de type GSp (au sens de la définition 6.5 ci-dessus), famille contenant les variétés abéliennes ayant un anneau d'endomorphismes $\mathbb{Z}$ et de dimension 2 ou impaire. Je suis pour cela la stratégie de Hall-Perucca [HP], elle même basée sur des travaux antérieurs de Serre [Ser72] et de Frey-Jarden [FJ02]. Dans la prépublication [1], je montre :

Théorème 9.1 *Soit K un corps de nombres et soient $A_1, A_2/K$ deux variétés abéliennes pleinement de type GSp. Considérons S un sous-ensemble de places finies v de K , de corps résiduel $\mathbb{F}_v$, de bonne réduction pour A_1 et A_2 , de densité analytique 1 et supposons également donné un sous-ensemble Λ infini de l'ensemble des nombres premiers. Alors A_1 est K -isogène à A_2 si et seulement si*

$$\forall v \in S, \forall \ell \in \Lambda \quad (\ell \mid \text{Card}(A_1(\mathbb{F}_v))) \iff \ell \mid \text{Card}(A_2(\mathbb{F}_v)).$$

Notons que l'on sait après Faltings [Fal83] que la classe d'isogénie d'une variété abélienne A/K est donnée par sa fonction ζ qui donne en particulier les valeurs $\text{Card}(A(\mathbb{F}_v))$. Le théorème 9.1 (dont la preuve utilise néanmoins [Fal83]) prouve qu'une donnée sensiblement plus faible est en fait suffisante (au moins pour les variétés abéliennes pleinement de type GSp).

S'il est clair qu'un tel résultat doit se borner à des variétés abéliennes sans facteur carré (ie A isogène à un produit $\prod A_i$ les A_i deux à deux non isogènes), il doit être possible, en utilisant les résultats connus sur les images de Galois (cf. notamment [Ser72] et [3]) d'étendre d'une autre manière ce résultat en traitant le cas des produits de courbes elliptiques sans facteur carré. Nous comptons revenir sur ce problème dans un article ultérieur. Notons par ailleurs que ce résultat n'est certainement pas vrai en général, même pour une variété abélienne simple quelconque, le cardinal de $A(\mathbb{F}_v)$ avec v variable ne caractérisant pas en général la classe d'isogénie de la variété abélienne.

Idée de la preuve : Nous suivons, en l'adaptant en dimension supérieure, l'argument de Hall-Perucca [HP] et les idées de Serre [Ser72] et Frey-Jarden [FJ02]. La structure de la preuve de l'implication *si* (l'autre implication étant facile) du théorème 9.1 est en trois étapes :

1. Montrer, pour ℓ variant dans un sous-ensemble infini Λ_1 de Λ , que $K(A_1[\ell]) = K(A_2[\ell])$, puis en déduire que A_1 et A_2 sont $\bar{K}$ -isogènes.
2. Montrer qu'il existe un caractère quadratique $\varepsilon : G_K \rightarrow \{\pm 1\}$ tel que pour tout ℓ variant dans un sous-ensemble infini Λ_2 de Λ_1 les représentations ρ_{ℓ, A_1} et $\varepsilon \otimes \rho_{\ell, A_2}$ sont isomorphes.
3. Montrer que pour tout ℓ variant dans un sous-ensemble infini Λ_3 de Λ_2 , la représentation ρ_{ℓ, A_1} est en fait isomorphe à ρ_{ℓ, A_2} , puis conclure que A_1 et A_2 sont K -isogènes.

Pour l'étape 1 j'ai besoin de prouver un résultat d'un intérêt indépendant : le théorème d'isogénies horizontales 9.2 (suivant la terminologie de [FJ02]) pour la classe de variétés abéliennes considérées.

Théorème 9.2 *Soient $A_1, A_2/K$ deux variétés abéliennes pleinement de type GSp , sur un corps de nombres K . Soit $c > 0$ telle qu'il existe un ensemble infini Λ de nombres premiers, vérifiant*

$$\forall \ell \in \Lambda, \quad [K(A_1[\ell], A_2[\ell]) : K(A_1[\ell])] \leq c.$$

Alors A_1 est $\bar{K}$ -isogène à A_2 .

Remarque 9.3 Dans le cas de dimension 1, ceci est un résultat de Frey-Jarden [FJ02] basé sur les travaux de Serre [Ser72]. En fait le résultat de [FJ02] est plus général car il vaut pour des courbes elliptiques quelconques sur un corps K de type fini sur son sous-corps premier.

Le théorème 9.2 ci-dessus peut se voir comme un corollaire du théorème 1.6 de [2] (ie théorème 7.10 du présent mémoire) prouvant la conjecture de Mumford-Tate forte pour le produit $A_1 \times A_2$ de telles variétés abéliennes. Il remplace dans la preuve l'usage fait par [HP] du Theorem A de [FJ02]. Par ailleurs ayant également besoin d'un raffinement de ce résultat, j'en donne dans [1] une preuve alternative, dans l'esprit de [FJ02] et [Ser72].

La preuve de l'étape 2 est une adaptation en dimension supérieure du paragraphe 6.2 de [Ser72], en utilisant les résultats de Raynaud [Ray74] en lieu et place du paragraphe 1 de [Ser72]. L'étape 3 se prouve comme dans [HP] et utilise notamment Faltings [Fal83].

Chapitre 10

Projet de Recherches

Voici trois points qui me semblent être naturellement reliés à mes différents travaux et sur lesquels je compte maintenant travailler.

10.1 Problème de Lehmer pour une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ sans multiplication complexe

Dans le cadre du problème de Lehmer classique, on sait (cf. chapitre 4 de ce mémoire) que les méthodes de transcendance donnent d'excellents résultats dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. ([Lau83], [DH00], [5]), et donnent des résultats sensiblement plus faibles dans le cas général ([Mas84] et [Mas]). Une idée qui paraît intéressante serait d'essayer de mettre en oeuvre une méthode de transcendance dans le cadre de ce problème sur les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ en utilisant les congruences d'Eichler-Shimura. En effet, une preuve de transcendance consiste essentiellement en la chose suivante : construction d'une fonction auxiliaire s'annulant avec un grand ordre en un point ne vérifiant pas la conclusion attendue (ici un point de hauteur supposée exceptionnellement petite) ; extrapolation en montrant que la fonction auxiliaire s'annule encore avec un ordre assez grand en un certain nombre de transformés $\varphi_i(P)$, i décrivant un ensemble convenable. Dans le cas du problème de Lehmer sur les variétés abéliennes de type C.M., on prend pour φ_i des endomorphismes de la variété abélienne relevant le Frobenius en caractéristique fini p_i . On extrapole alors en utilisant le petit théorème de Fermat. Les endomorphismes précédents n'existent pas en général pour des variétés abéliennes non C.M., d'où l'hypothèse C.M. Dans le cas des courbes elliptiques sur $E/\mathbb{Q}$, on sait depuis les travaux de Wiles [Wil95], Taylor-Wiles [TW95] et Breuil, Conrad, Diamond, Taylor [BCDT01], que ces courbes sont toutes munies d'un morphisme surjectif d'une courbe modulaire $X_0(N)$ vers E . Or sur $X_0(N)$, les correspondances de Hecke T_p vérifient une relation de congruence très spéciale en caractéristique p : les congruences d'Eichler-Shimura [Shi58]. L'idée serait donc d'utiliser ces correspondances, pour fabriquer des transformés du point P , vérifiant toujours de "bonnes" propriétés en vue d'une extrapolation. On pourrait commencer par tester cette idée dans le cas des courbes modulaires qui sont en même temps des courbes elliptiques. Si cette méthode marche dans ce cas, il est raisonnable de penser qu'elle pourra s'étendre au cas général.

Concernant le problème de Lehmer sur les courbes elliptiques, une autre question naturelle se pose : est-il possible d'adapter le résultat de Smyth concernant le problème de Lehmer original (sur la minoration de la hauteur de Weil des nombres algébriques qui ne sont pas des racines de l'unités) : Smyth [Smy71] a montré que si x est un point dont le polynôme minimal n'est pas réciproque¹, alors la meilleure minoration possible pour x est vraie (sa hauteur est minorée par une constante absolue divisée par le degré du polynôme minimal). Dans le cas des courbes elliptiques (ou même des variétés abéliennes) l'hypothèse de Smyth sur le point d'ordre

1. *i.e.* P est réciproque si : z racine de $P \Rightarrow z^{-1}$ racine de P

infini P se traduit naturellement de la manière suivante : on suppose que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$, on a $\sigma(P) \neq [-1]P$ où $[-1]$ est la multiplication par -1 sur la variété abélienne.

10.2 Représentations galoisiennes

10.2.1 Avec Mumford-Tate

Dans la continuité naturelle du chapitre 8 de ce mémoire, et en plus des diverses questions déjà soulevées dans ledit chapitre ainsi que dans le chapitre 7 (questions 6.13 et 7.21 notamment), on peut s'intéresser à calculer l'exposant $\gamma(A)$ (faisant le lien entre le cardinal de $A(K)_{\text{tors}}$ et $[K : \mathbb{Q}]$, cf. paragraphe 1 du chapitre 8) pour d'autres classes de variétés abéliennes pour laquelle la conjecture de Mumford-Tate est connue. Dans un travail en cours avec Hindry, nous traitons le cas des variétés abéliennes de type GL_2 (ie dont l'anneau d'endomorphismes sur $\mathbb{Q}$, $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$, est un corps totalement réel F de degré $\dim(A)$ sur $\mathbb{Q}$). Après les travaux de Ribet [Rib76] pour ces variétés abéliennes, on sait que le groupe de Hodge n'est autre que la restriction des scalaires à la Weil de F à $\mathbb{Q}$ de $\text{SL}_{2,\mathbb{Q}}$. Utilisant la notion de représentation λ -adique (ie moralement en travaillant sur F plutôt que sur $\mathbb{Q}$) il nous semble possible d'adapter la preuve du calcul de l'exposant $\gamma(A)$ pour les courbes elliptiques sans CM au cas des variétés de type GL_2 . Une fois cet objectif atteint il nous semble plus que raisonnable de croire que les mêmes arguments, basés cette fois sur l'extension du canevas de preuve fourni par notre article [2] sur les variétés de type GSp , devraient permettre de traiter les cas des variétés abéliennes de type I et II dont la dimension g vérifie $g = hed$, où h est un entier impair, $e = [F : \mathbb{Q}]$ est le degré du centre F de $D := \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ et où $d^2 = [D : F]$. Nous comptons pour cela utiliser les résultats de [BGK03] et [BGK06] sur la conjecture de Mumford-Tate pour de telles variétés abéliennes. Le cas des variétés de type III dont la dimension vérifie $g = 2eh$, avec les notations précédentes, devrait aussi être accessible (utilisant cette fois les résultats de [BGK10]) mais des idées nouvelles seront sans doute nécessaires, le groupe de Hodge n'étant plus la restriction des scalaires de Sp mais la restriction du groupe spécial orthogonal. Dans le cas des variétés abéliennes de type I, II et III nous restons dans le monde d'un groupe de Hodge semi-simple. Le cas des variétés de type IV semble pour l'instant plus mystérieux ; néanmoins il semble assez probable que ce cas puisse se traiter en utilisant un mélange de techniques galoisiennes type GSp (comme dans notre article [2]) pour la partie semi-simple de Hodge et de techniques abéliennes type variétés à multiplication complexes (comme dans mon article [7]) pour la partie abélienne de Hodge.

10.2.2 Sans Mumford-Tate

Sans supposer la conjecture de Mumford-Tate, il doit tout de même être possible d'avoir un certain nombre de résultats en direction du calcul de l'exposant $\gamma(A)$: étant donné un sous-groupe fini H_ℓ de $A[\ell^\infty]$, il devrait être possible, utilisant les travaux de Serre, Faltings et Wintenberger [Win02] et les techniques que j'ai précédemment développées d'obtenir une borne entre le cardinal de H_ℓ et le degré $[\mathbb{Q}(H_\ell) : \mathbb{Q}]$; notons toutefois que sans hypothèse d'uniformité en ℓ de type Mumford-Tate, cette borne dépendra a priori certainement de ℓ .

10.3 Représentations galoisiennes + transcendance

À plus longue échéance on aimerait bien réussir à mixer les méthodes sur les représentations galoisiennes, à la Serre, avec les méthodes de transcendance. Les méthodes de transcendance, de par leur nature ont pour elles l'énorme avantage d'être extrêmement robustes. Par exemple, la seule majoration raisonnable que l'on connaisse actuellement de l'exposant $\gamma(A)$ précédent dans le cas général d'une variété abélienne quelconque est l'exposant $\gamma(A) \leq \dim A$, dû à Masser [Mas84] et [Mas] par une méthode de transcendance. Ceci étant, ces preuves de transcendance n'utilisent qu'une faible partie de l'information disponible. De fait dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. (qui est probablement le cas le plus défavorable), j'ai montré en utilisant des techniques de représentations galoisiennes, comment sensiblement raffiner le résultat de Masser.

Évidemment les méthodes de représentations galoisiennes, étant plus fines, sont également plus délicates à mettre en oeuvre. On ne sait même parfois pas les appliquer.

Un exemple où il serait intéressant de mélanger les deux approches est le suivant : Si $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$ et $\dim A = 4$, le groupe de Mumford-Tate est soit GSp_8 soit $\mathbb{G}_m \cdot \text{SL}_2 \times \text{SL}_2 \times \text{SL}_2$ (cf. un exemple de Mumford [Mum70]). Dans le second on sait que les groupes de Galois ℓ -adiques G_ℓ sont de la forme $\mathbb{G}_m \cdot \text{SL}_2 \times \text{SL}_2 \times \text{SL}_2$. Par contre dans le premier cas, on conjecture ([Ser00c] note 4 p. 23), mais sans savoir le prouver, que G_ℓ est effectivement GSp_8 . S'il semble tout à fait irréaliste de montrer ceci avec des méthodes de transcendance, il ne semble pas impossible de montrer, en combinant représentations galoisiennes et transcendance que la dimension de ces groupes ℓ -adiques est strictement supérieure à 10, ce qui suffirait à entraîner le résultat.

Bibliographie

- [AD99] F. Amoroso and S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. *J. Reine Angew. Math.*, 513 :145–179, 1999.
- [AD04] F. Amoroso and S. David. Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(2) :325–348, 2004.
- [AZ00] F. Amoroso and U. Zannier. A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(3) :711–727, 2000.
- [BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor. On the modularity of elliptic curves over $\mathbf{Q}$: wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4) :843–939 (electronic), 2001.
- [BGK03] G. Banaszak, W. Gajda, and P. Krasoń. On Galois representations for abelian varieties with complex and real multiplications. *J. Number Theory*, 100(1) :117–132, 2003.
- [BGK06] G. Banaszak, W. Gajda, and P. Krasoń. On the image of l -adic Galois representations for abelian varieties of type I and II. *Doc. Math.*, (Extra Vol.) :35–75 (electronic), 2006.
- [BGK10] G. Banaszak, W. Gajda, and P. Krasoń. On the image of Galois l -adic representations for abelian varieties of type III. *Tohoku Math. J. (2)*, 62(2) :163–189, 2010.
- [BMZ99] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier. Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices*, (20) :1119–1140, 1999.
- [Bog80] F. Bogomolov. Sur l’algébricité des représentations l -adiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(15) :A701–A703, 1980.
- [Bor74] M. Borovoi. The action of the Galois group on the rational cohomology classes of type (p, p) of abelian varieties. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136) :649–652, 656, 1974.
- [Bos96] J.-B. Bost. Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d’après D. Masser et G. Wüstholz). *Astérisque*, (237) :Exp. No. 795, 4, 115–161, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [Bre10] F. Breuer. Torsion bounds for elliptic curves and Drinfeld modules. *J. Number Theory*, 130(5) :1241–1250, 2010.
- [BZ96] E. Bombieri and U. Zannier. Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 23(4) :779–792 (1997), 1996.
- [Car09] M. Carrizosa. Petits points et multiplication complexe. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16) :3016–3097, 2009.
- [CP90] F. Campana and T. Peternell. Algebraicity of the ample cone of projective varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 407 :160–166, 1990.
- [DH00] S. David and M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. *J. Reine Angew. Math.*, 529 :1–74, 2000.
- [DMOS82] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, and K. Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [Dob79] E. Dobrowolski. On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial. *Acta Arith.*, 34(4) :391–401, 1979.

- [Dod87] B. Dodson. On the Mumford-Tate group of an abelian variety with complex multiplication. *J. Algebra*, 111(1) :49–73, 1987.
- [DP02] S. David and P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II. *Comment. Math. Helv.*, 77(4) :639–700, 2002.
- [EY03] B. Edixhoven and A. Yafaev. Subvarieties of Shimura varieties. *Ann. of Math. (2)*, 157(2) :621–645, 2003.
- [Fal83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3) :349–366, 1983.
- [FJ02] G. Frey and M. Jarden. Horizontal isogeny theorems. *Forum Math.*, 14(6) :931–952, 2002.
- [FN14] S. Fischler and M. Nakamaye. Seshadri constants and interpolation on commutative algebraic groups. *À Paraître aux Annales de l’Institut Fourier*, disponible à l’adresse <http://www.math.u-psud.fr/fischler/interp.pdf>, 2013–2014.
- [Hal11] C. Hall. An open-image theorem for a general class of abelian varieties. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4) :703–711, 2011. With an appendix by Emmanuel Kowalski.
- [Hin88] M. Hindry. Autour d’une conjecture de Serge Lang. *Invent. Math.*, 94(3) :575–603, 1988.
- [HP] C. Hall and A. Perucca. Radical characterizations of elliptic curves. *Prépublication disponible à l’adresse arxiv.org/abs/1109.2440*, publiée dans une version courte sous le titre *On the prime divisors of the numbers of points on an elliptic curve*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013), 1–3.
- [KY] B. Klingler and A. Yafaev. The andré-oort conjecture. *Prépublication 2006*.
- [Lau83] M. Laurent. Minoration de la hauteur de Néron-Tate. In *Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982)*, volume 38 of *Progr. Math.*, pages 137–151. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [Laz04] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.
- [Mas] D. Masser. Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.
- [Mas84] D. Masser. Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety. *Compositio Math.*, 53(2) :153–170, 1984.
- [Maz78] B. Mazur. Rational isogenies of prime degree (with an appendix by D. Goldfeld). *Invent. Math.*, 44(2) :129–162, 1978.
- [Mer96] L. Merel. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Invent. Math.*, 124(1-3) :437–449, 1996.
- [Mil86] J. Milne. Abelian varieties. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 103–150. Springer, New York, 1986.
- [Mum70] D. Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [Nak07] M. Nakamaye. Multiplicity estimates on commutative algebraic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 607 :217–235, 2007.
- [Orr] M. Orr. Lower bounds for ranks of mumford-tate groups. *Prépublication disponible à l’adresse <http://arxiv.org/abs/1110.6816>*.
- [Par00] P. Parent. Torsion des courbes elliptiques sur les corps cubiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3) :723–749, 2000.
- [Phi86] P. Philippon. Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114(3) :355–383, 1986.

- [Pin] R. Pink. A common generalization of the conjectures of andré-oort, manin-mumford, and mordell-lang. *Prépublication disponible à l'adresse <http://www.math.ethz.ch/~pink/ftp/AOMMML.pdf>*.
- [Pin98] R. Pink. l -adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 495 :187–237, 1998.
- [PR02] R. Pink and D. Roessler. On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, pages 539–546, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [PŠ71] I. Pjateckiĭ-Šapiro. Interrelations between the Tate and Hodge hypotheses for abelian varieties. *Mat. Sb. (N.S.)*, 85(127) :610–620, 1971.
- [Ray74] M. Raynaud. Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :241–280, 1974.
- [Ray83] M. Raynaud. Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion. In *Arithmetic and geometry, Vol. I*, volume 35 of *Progr. Math.*, pages 327–352. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [Rém05] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. I. *Math. Ann.*, 333(3) :525–548, 2005.
- [Rém07] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. II. *J. Inst. Math. Jussieu*, 6(2) :317–348, 2007.
- [Rib75] K. Ribet. On l -adic representations attached to modular forms. *Invent. Math.*, 28 :245–275, 1975.
- [Rib76] K. Ribet. Galois action on division points of Abelian varieties with real multiplications. *Amer. J. Math.*, 98(3) :751–804, 1976.
- [Rib83] K. Ribet. Hodge classes on certain types of abelian varieties. *Amer. J. Math.*, 105(2) :523–538, 1983.
- [Rib81] K. Ribet. Division fields of abelian varieties with complex multiplication. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (2) :75–94, 1980/81. Abelian functions and transcendental numbers (Colloq., École Polytech., Palaiseau, 1979).
- [RV03] G. Rémond and E. Viada. Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Int. Math. Res. Not.*, (35) :1915–1931, 2003.
- [Ser72] J.-P. Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15(4) :259–331, 1972.
- [Ser77] J.-P. Serre. Représentations l -adiques. In *Algebraic number theory (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976)*, pages 177–193. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.
- [Ser80] J.-P. Serre. Annexe : Deux lettres. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, 2 :95–102, 1980.
- [Ser00a] J.-P. Serre. *Lettre à Ken Ribet, Œuvres. Collected papers. IV*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [Ser00b] J.-P. Serre. *Lettre à Marie-France Vignéras (10 février 1986), Œuvres. Collected papers. IV*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [Ser00c] J.-P. Serre. *Oeuvres, collected papers*, volume IV, 1985–1998. Springer-Verlag, 2000.
- [Ser00d] J.-P. Serre. *Résumé des cours au Collège de France de 1985–1986, Œuvres. Collected papers. IV*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.
- [sga73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.

- [Shi58] G. Shimura. Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques. *J. Math. Soc. Japan*, 10 :1–28, 1958.
- [Smy71] C.J. Smyth. On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bulletin of the London Math. Soc.*, 3 :169–175, 1971.
- [ST61] G. Shimura and Y. Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, volume 6 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.
- [TW95] R. Taylor and A. Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :553–572, 1995.
- [Ull98] E. Ullmo. Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. *Ann. of Math. (2)*, 147(1) :167–179, 1998.
- [UY] E. Ullmo and A. Yafaev. Galois orbits and equidistribution of special subvarieties of shimura varieties : towards the andré -oort conjecture. *Prépublication 2006*.
- [Via03] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(1) :47–75, 2003.
- [Wal87] M. Waldschmidt. Nombres transcendants et groupes algébriques. *Astérisque*, (69-70) :218, 1987. With appendices by Daniel Bertrand and Jean-Pierre Serre.
- [Wil95] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.
- [Win02] J.-P. Wintenberger. Démonstration d’une conjecture de Lang dans des cas particuliers. *J. Reine Angew. Math.*, 553 :1–16, 2002.
- [Zha98] S.-W. Zhang. Equidistribution of small points on abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 147(1) :159–165, 1998.
- [Zil02] B. Zilber. Exponential sums equations and the Schanuel conjecture. *J. London Math. Soc. (2)*, 65(1) :27–44, 2002.