Galois + Équidistribution = Manin-Mumford

Nicolas Ratazzi[*], Emmanuel Ullmo[†]

24 septembre 2007

1 Introduction

Le texte qui suit est une version rédigée du premier exposé donné par le second auteur durant l'école d'été "Arithmetic Geometry" à l'université de Göttingen à l'été 2006. C'est un plaisir d'avoir l'occasion de remercier les organisateurs pour leur invitation. Les exposés avaient pour but de donner une idée de la preuve récente de la conjecture d'André–Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Yafaev et le second auteur [20], [12].

La conjecture d'André–Oort est un analogue pour les variétés de Shimura de la conjecture de Manin-Mumford démontré par Raynaud [15]. Il était donc naturel d'essayer d'adapter la stratégie de preuve de la conjecture d'André-Oort dans le cas des variétés abéliennes. Le texte qui suit propose cette traduction et donne donc une démonstration de la conjecture de Manin-Mumford.

Rappelons tout d'abord l'énoncé de la conjecture de Manin-Mumford.

Théorème 1.1 *Soient K un corps de nombres, A/K une variété abélienne sur K et V/K une sous-variété géométriquement irréductible de A. Si $V(\overline{K})$ contient un ensemble de points de torsion dense dans V pour la topologie de Zariski alors V est un translaté par un point de torsion d'une sous-variété abélienne.*

De nombreuses preuves de cette conjecture ont été obtenues. La première preuve donnée par Raynaud [15] utilise des méthodes p-adiques. Hindry [10] donne une preuve utilisant la théorie de Galois et l'approximation diophantienne. Hrushovski montre la conjecture en utilisant des idées provenant de la logique (théorie des modèles des corps). Pink et Roessler [14] donnent une preuve par des techniques de géométrie algébrique qui s'inspire de la preuve de Hrushovski. Enfin une preuve utilisant la théorie d'Arakelov via l'équidistribution des orbites sous Galois des points de petite hauteur d'une conjecture plus forte due à Bogomolov est obtenue par Zhang [23] et le deuxième auteur de cette note [18].

[*]nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr
[†]emmanuel.ullmo@math.u-psud.fr

La preuve présentée ici s'inspire des récentes stratégies de preuve de la conjecture d'André-Oort qui est un analogue dans le cadre des variétés de Shimura de la conjecture de Manin-Mumford. Dans ce cadre les méthodes Galoisiennes dues à Edixhoven et Yafaev [8] se combinent aux méthodes issues de la théorie ergodique développées par Clozel et le second auteur [4]. Cette stratégie est expliquée de manière générale dans un travail récent de Yafaev et le second auteur [20] et présentée dans un cas particulier simple de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann dans ce volume [21].

Dans le cadre des variétés abéliennes nous combinons des résultats galoisiens dus à Serre à des techniques élémentaires d'équidistribution de sous-variétés abéliennes. Les résultats galoisiens utilisés ici sont au centre de la méthode de Hindry et la preuve donnée ici ne peut qu'être considérée comme une variante de la preuve de Hindry. Il est notable que la traduction dans le cadre abélien des idées d'Edixhoven et Yafaev [8] donne assez naturellement la preuve de Hindry de la conjecture de Manin-Mumford et qu'il n'est pas utile d'utiliser les techniques ergodiques dans ce cadre. Nous ne savons pas si il est possible de s'en dispenser aussi dans une preuve de la conjecture d'André-Oort.

Nous espérons que la preuve de la conjecture de Manin-Mumford présentée dans cette note pourra aider le lecteur intéressé par la conjecture d'André-Oort à comprendre la stratégie mise en oeuvre pour les variétés de Shimura. Pour rendre la présentation plus agréable et naturelle nous avons utilisé un résultat non publié de Daniel Bertrand d'effectivité dans le lemme de Poincaré pour les variétés abéliennes. Nous le remercions pour les notes qu'il a eu la gentillesse de nous transmettre ainsi que pour la permission de présenter ici ses résultats que nous avons insérés en appendice.

1.1 Notations et conventions

On dira que V/k est une *variété (définie) sur un corps* k si V est un k-schéma de type fini, géométriquement réduit. Si V/k est une variété définie sur un corps k et si L est une k-algèbre, on notera V_L la variété produit fibré de V et $\mathrm{Spec}\,(L)$ au dessus de $\mathrm{Spec}\,(k)$.

Dans toute la suite, on fixe $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne. On se donne K un corps de nombres sur lequel A est définie ainsi que toutes ses sous-variétés abéliennes (un tel corps existe et peut-être choisi de degré $3^{(2\dim A)^4}$ sur un corps de définition de A, *cf.* par exemple [13] lemma 2.2.). On se donne également un fibré en droites $\mathcal{L}$ très ample sur A/K de sorte à avoir une notion de degré projectif deg relativement à $\mathcal{L}$.

Si E est un ensemble de points de $A(\overline{\mathbb{Q}})$, on notera $\overline{E}$ son adhérence de Zariski dans A/K. Enfin on notera A_{tors} l'ensemble des points de torsion de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ et, si V est une sous-variété de A, on notera V_{tors} l'ensemble $V(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A_{\mathrm{tors}}$ des points de torsion de A situés sur V.

Définition 1.1. Soit $V/\overline{\mathbb{Q}}$ une sous-variété irréductible de A. On dit que V est une *variété de torsion* s'il existe une sous-variété abélienne B de A et un point de torsion $\xi \in A_{\mathrm{tors}}$ tels que $V = B + \xi$.

Une variété V/K définie sur un corps de nombres K est dite *de torsion* si $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est une réunion de sous-variétés de torsion.

On utilisera les symboles $\ll$ et $\gg$ pour dire inférieur à (respectivement supérieur à), à une constante ne dépendant que de $(A, K, \mathcal{L}, V)$ près.

2 Effectivité dans le lemme de Poincaré

Supposant connu le lemme de réductibilité de Poincaré, qui affirme que toute variété abélienne est isogène à un produit de variétés abéliennes simples, nous donnons ici une version effective de ce résultat due à Bertrand. Cet énoncé (plus fort que ce dont nous aurions réellement besoin) permet de présenter les choses de façon naturelle dans la preuve du résultat principal (cf. la remarque 3.1. du paragraphe 3). Nous en donnons en appendice la preuve, telle qu'on la trouve dans l'appendice de [1].

Proposition 2.1 (Bertrand) *Pour toute sous-variété abélienne B de A, il existe une sous-variété abélienne B' de A telle que*

$$A = B + B' \text{ et telle que } \operatorname{card}(B \cap B') \ll 1.$$

3 Preuve du théorème 1.1

Notons

$$\Sigma_V = \left\{ X/\overline{\mathbb{Q}} \text{ sous-variété de torsion de } A \ \ / \ X \subset V_{\overline{\mathbb{Q}}} \right\}.$$

Définition 3.1. Une suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ_V est *générique pour V* si pour toute sous-variété W de $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$, distincte de $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ \Sigma_n \subset W\}$ est fini.

Soit $(\Sigma_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite générique pour V (une telle suite existe d'après l'hypothèse faite sur V_{tors}. En fait il existe même une suite générique constituée de points de torsion.). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ choisissons arbitrairement une représentation

$$\Sigma_n = A_n + \xi_n$$

où A_n est une sous-variété abélienne de A et ξ_n un point de torsion de A.

En notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, A'_n la variété associée à A_n par la proposition 2.1, on voit qu'il existe $(a_n, a'_n) \in A_n \times A'_n$ de torsion tels que $\xi_n = a_n + a'_n$. Quitte à remplacer ξ_n par a'_n on peut supposer (et nous le ferons dans la suite) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Sigma_n = A_n + \xi_n \quad \text{ avec } \xi_n \text{ de torsion dans } A'_n.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note d_n l'ordre du point ξ_n ainsi obtenu. Deux situations peuvent alors apparaître :

1. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Dans ce cas un argument ergodique va nous permettre de conclure.

2. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-bornée. Dans ce cas la combinaison d'un argument galoisien et d'un argument diophantien vont nous permettre de conclure par un procédé itératif.

Remarque 3.1. Notons que le fait que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou n'est pas bornée ne dépend pas du choix du point ξ_n pris dans A'_n (ceci précisément grâce au résultat de Bertrand). En effet soient ξ_n et ξ'_n deux points de torsion de A'_n, d'ordre respectifs d_n et d'_n, tels que $\Sigma_n = A_n + \xi_n = A_n + \xi'_n$. On a

$$\xi_n - \xi'_n \in A_n \cap A'_n.$$

En notant C une borne sur le cardinal de $A_n \cap A'_n$ quand n varie, on constate donc que

$$\frac{1}{C} d_n \leq d'_n \leq C d_n.$$

Autrement dit avec ce choix de variétés abéliennes (A'_n), les suites (d_n) et (d'_n) obtenues sont (ou non) bornées en même temps.

3.1 Cas borné

L'ensemble des points de torsion de A d'ordre borné (par une constante donnée M) étant fini, on peut, en passant à une sous-suite, supposer qu'il existe $\xi \in A_{\text{tors}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Sigma_n = \xi + A_n.$$

Soient C une variété abélienne complexe et μ_C la mesure de Haar sur $C(\mathbb{C})$.

Proposition 3.1 *Quitte à extraire une sous-suite, la suite $(\mu_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers la mesure μ_B où B est une sous-variété abélienne de A, contenant A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration : La preuve de cette proposition est donnée à la section 4. Le lecteur peut aussi consulter [19] proposition 4.1. □

De cette proposition on déduit que, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Sigma_n \subset \xi + B \subset V_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

Par généricité, $\xi + B$ ne peut être strictement incluse dans $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$, donc V est de torsion, ce qui conclut. □

3.2 Cas non-borné

La preuve de ce cas utilise essentiellement les outils développés par Hindry [10]. Ceci étant la stratégie est légèrement différente. Étant donné un corps de nombres K nous noterons G_K le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K.

Théorème 3.1 (Serre) *Soit A/K une variété abélienne définie sur un corps de nombres K.*

1. *Il existe une constante $c(A,K) > 0$ telle que pour tout point $x \in A_{\mathrm{tors}}$ d'ordre n et pour tout entier m premier à n, il existe $\sigma \in G_K$ tel que*
$$\left[m^{c(A,K)}\right] x = \sigma(x).$$
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_1(A,K,\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in A_{\mathrm{tors}}$ d'ordre n on a*
$$|G_K \cdot x| \geq C_1(A,K,\varepsilon) n^{1-\varepsilon}.$$

Démonstration : Le point 1. est un théorème difficile de Serre (*cf.* [16] Théorème 2' p. 34) dont on peut trouver une preuve dans [22] (Théorème 3 paragraphe 2.3) et dans [17]. Le second point est un corollaire du premier. En effet, soit x un point de torsion de A d'ordre n. Par le point 1., il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout entier m ne divisant pas n, on a $[m^c]x \in G_K \cdot x$. En particulier en notant $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n, on a
$$|G_K \cdot x| \geq \left|\left\{x^c \mid x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right\}\right| = \frac{\varphi(n)}{|\{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid x^c = 1\}|}.$$
On sait que $\varphi(n) \gg n^{1-\varepsilon}$, il suffit donc de savoir minorer le cardinal de l'ensemble de $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tels que $x^c = 1$. Écrivons la décomposition de n est facteurs premiers, $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$, et posons pour tout $i \leq r$, $n_i = p_i^{k_i-1}(p_i - 1)$. En écrivant la décomposition de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ en produit de groupes cycliques selon les p_i, on voit que
$$\left|\left\{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid x^c = 1\right\}\right| \leq 2\prod_{i=1}^r \mathrm{pgcd}(c, n_i) \leq 2c^r$$
le facteur 2 étant là pour ne pas avoir d'ennui si 2 intervient dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par ailleurs le nombre $r = \omega(n)$ de premiers divisant n est tel que $\omega(n) \ll \log n / \log\log n$. Ainsi $c^r \ll n^\varepsilon$ ce qui permet de conclure. □

Lemme 3.1 (Hindry) *Soient n un entier et $X/\overline{\mathbb{Q}}$ une sous-variété irréductible de A. On a*
$$\deg[n]X = \frac{n^{2\dim X}}{|\mathrm{Stab}(X) \cap \ker[n]|} \deg X.$$

Démonstration : *cf.* [10] lemme 6.(ii) ou [6] proposition 2.3. □

Lemme 3.2 *Soient $X/\overline{\mathbb{Q}}$ une sous-variété irréductible de A et $d \geq 2$ un entier. Si $[d]X \subset X$ alors X est de torsion.*

Démonstration : C'est une conséquence du calcul du degré précédent. En effet soient $s \in \mathbb{N}$ et $G_X = \text{Stab}X$. La variété G_X^0 est une variété abélienne d'indice fini $|G_X : G_X^0|$ dans G_X et on a

$$|\text{Stab}(X) \cap \ker[d^s]| \leq \left|G_X : G_X^0\right| \left|G_X^0 \cap \ker[d^s]\right| = d^{2s \dim G_X^0} \left|G_X : G_X^0\right|.$$

Or l'hypothèse nous assure donc que

$$\deg X = \deg[d^s]X \geq \frac{d^{2s \dim X}}{|G_X : G_X^0|\, d^{2s \dim G_X^0}} \deg X.$$

Prenant s assez grand on en déduit que $\dim X = \dim G_X^0 = \dim G_X$. Or $G_X = \bigcap_{x \in X} X - x$, donc X est de la forme $G_X^0 + x$ où x est un point de A. L'hypothèse $[d]X \subset X$ entraine que $[d]X = X$ et donc que $[d-1]x \in G_X^0$. Notamment en notant B la variété abélienne G_X^0, il existe un point ξ de $(d-1)$-torsion dans A tel que $X = \xi + B$. Donc X est de torsion. $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit p premier à d_n et on pose $d = p^{c(A,K)}$ comme dans le théorème 3.1 précédent. Considérons l'intersection $V^1 := V \cap [d]V$. Si $\dim V^1 = \dim V$ on a $V^1 = [d]V$ par irréductibilité de V et donc $[d]V \subset V$. Mais alors le lemme 3.2 prouve que V est de torsion. Sinon V^1 est de dimension strictement inférieure à V. Par ailleurs, on a :

Lemme 3.3 *La variété Σ_n est incluse dans $V^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$.*

Démonstration : On a $[d]\Sigma_n = [d]A_n + [d]\xi_n = A_n + \sigma(\xi_n)$ par le point 1. du théorème 3.1. Par ailleurs, A_n et V sont définie sur K donc

$$\Sigma_n = \sigma^{-1}\left([d]\Sigma_n\right) \subset \sigma^{-1}\left([d]V\right) = [d]V.$$

Ainsi Σ_n est bien incluse dans $[d]V$ donc dans $V^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$. $\square$

On note désormais V_1 une composante K-irréductible de V^1 telle que $(V_1)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ contient Σ_n.

Lemme 3.4 (Bézout) *Soient X et Y deux sous-variétés d'un espace projectif $\mathbb{P}_n$. En notant $Z_1, \ldots Z_r$ des composantes irréductibles de $X \cap Y$, on a*

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(Z_i) \leq \deg(X) \cdot \deg(Y).$$

Démonstration : Il s'agit d'un résultat type Bézout que l'on trouve par exemple dans Fulton [9] Example 8.4.6. $\square$

On va donc calculer un majorant du degré de V_1. Pour cela il sufit de savoir estimer (grossièrement) le degré de $[d]V$. Ceci est une conséquence immédiate du lemme 3.1 précédent. On a :

$$\deg[d]X \leq d^{2g} \deg(X). \tag{1}$$

Utilisant le lemme 3.4 et l'inégalité (1) on obtient la majoration suivante pour V_1 :

$$\deg V_1 \ll d^{2g}.$$

Partant de V_1 en lieu et place de V et itérant ceci au plus $m := \dim V - \dim \Sigma_n$ fois on aboutit à l'alternative suivante :

1. *ou bien* on a construit une variété de torsion contenant strictement Σ_n,
2. *ou bien* on a fabriqué une variété V_m telle que Σ_n est une composante irréductible de V_m sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et vérifiant de plus
$$\deg V_m \ll d^c \tag{2}$$
pour une certaine constante c ne dépendant que de V.

Si on est dans le cas 2. de l'alternative, alors la variété V_m étant définie sur K elle contient comme composante la variété $\bigcup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \sigma(\Sigma_n)$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 3.5 *Avec les notations précédentes on a*

$$\mathcal{O}(\Sigma_n) := \mathrm{card}\left\{\sigma(\Sigma_n)\ /\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\right\} \gg \frac{d_n^{\frac{1}{2}}}{\deg A_n}.$$

Démonstration : Par le point 2. du théorème 3.1 appliqué avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on a

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\cdot \xi_n\right) \gg d_n^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, le point ξ_n étant choisi dans A'_n, et les variétés A_n et A'_n étant des variétés abéliennes sur K, on a

$$\sigma(\Sigma_n) = \Sigma_n \iff \xi_n - \sigma(\xi_n) \in A_n \cap A'_n.$$

La proposition 2.1 bornant le cardinal de $A_n \cap A'_n$ permet donc de conclure. □

En combinant l'équation 2 et le lemme 3.5, on obtient finalement

$$d_n^{\frac{1}{2}} \ll \mathcal{O}(\Sigma_n)\deg(A_n) = \deg\left(\bigcup_{\sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \sigma(\Sigma_n)\right) \leq \deg V_m \ll d^c.$$

Par le théorème des nombres premiers, on peut prendre d de l'ordre de $(\log d_n)^{c(A,K)}$. Avec un tel choix de d, on voit que pour n assez grand ceci est impossible. C'est donc que l'on est dans le cas 1. de l'alternative indiquée précédemment.

3.3 Conclusion

Partant d'une suite Σ_n, soit l'on est dans le cas borné auquel cas, la preuve s'arrête immédiatement, soit l'on est dans le cas non-borné. Dans ce cas, on a vu que l'on peut alors construire une nouvelle suite générique $(\Sigma'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-variétés de torsion incluses dans V, avec pour tout $n \gg 0$

$$\dim \Sigma'_n \geq \dim \Sigma_n + 1.$$

On réeffectue toute la preuve avec cette nouvelle suite, et au bout d'au plus $\dim V$ étapes on aboutit à la conclusion : V est de torsion. □

4 Preuve de la proposition 3.1

Le but de cette section est de donner la preuve de la proposition 3.1. Cette preuve élémentaire repose essentiellement sur la théorie des séries de Fourier.

4.1 Le cas plat

Dans cette partie on note $G = \mathbb{Q}^n$, $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ et $X = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$. Soit $\pi : \mathbb{R} \to X$ la surjection canonique. On dit qu'une sous-variété S de X est spéciale si elle est de la forme

$$S = \pi(H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$$

pour un sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel H de G. On dispose alors sur X d'une mesure de probabilité μ_S, $(H \otimes \mathbb{R})$-invariante, de support S. On notera alors $\mu = \mu_X$ la mesure de Lebesgue normalisée sur X

On notera par abus de langage de la même manière une fonction sur X et la fonction $\mathbb{Z}^n$-invariante sur $\mathbb{R}^n$ correspondante.

On dit qu'une suite de sous-variétés Y_n de X est stricte si pour toute sous-variété spéciale S_1,

$$\{n \in \mathbb{N},\ Y_n \subset S_1\}$$

est un ensemble fini.

Proposition 4.1 *Soit T_n une suite stricte de sous-variétés spéciales de X. Soit μ_n la mesure invariante normalisée de support T_n. Pour toute fonction continue sur X, on a*

$$\int_{T_n} f \ d\mu_n \longrightarrow \int_X f \ d\mu. \tag{3}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\overline{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$. Pour $(k_1, \ldots, k_n)$, on note $\chi_{k_1,\ldots,k_n}$ le caractère de X défini par

$$\chi_{k_1,\ldots,k_n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \exp(2i\pi \sum_{j=1}^{n} k_j x_j).$$

On obtient ainsi tous les caractères de X. Si $\chi = \chi_{k_1,\ldots,k_n}$ pour $(k_1, \ldots, k_n)$ non tous nuls, on note

$$H_\chi = H_{k_1,\ldots,k_n}$$

le $\mathbb{Q}$-hyperplan de G d'équation

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j = 0.$$

Remarquons que $H_\chi = H_{\chi'}$ avec $\chi = \chi_{k_1,\ldots,k_n}$ et $\chi' = \chi_{k'_1,\ldots,k'_n}$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $k'_i = \alpha k_i$ pour tout i.

On note alors

$$S_\chi = S_{k_1,\ldots,k_n} = \pi(H_{k_1,\ldots,k_n} \otimes \mathbb{R})$$

la sous-variété spéciale maximale associée. De même on note

$$\widetilde{S_\chi} = H_{k_1,\dots,k_n} \otimes \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi toute les sous-variétés spéciales maximales de X. Par ailleurs la théorie élémentaire des séries de Fourier nous donne

Lemme 4.1 *Une suite de mesure ν_n sur X converge faiblement vers une mesure ν si et seulement si pour tout caractère de X, on a :*

$$\nu_n(\chi) \longrightarrow \nu(\chi). \tag{4}$$

Lemme 4.2 *Soit S une variété spéciale et χ un caractère non trivial de X. La restriction χ_S de χ à S est un caractère de S et $\chi_S = 1$ si et seulement si $S \subset S_\chi$.*

Preuve. La restriction de χ à S_χ est triviale donc si $S \subset S_\chi$ alors la restriction de χ à S est triviale.

Réciproquement On peut écrire $S = \pi(\widetilde{S})$ pour un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $\widetilde{S}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{S}$ et χ un caractère trivial sur S. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\chi(\pi(tx)) = 1$ car $tx \in \widetilde{S}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $t\sum_{I=1}^n k_i x_i \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\sum_{I=1}^n k_i x_i = 0$ donc que $(x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{S_\chi}$. D'ou $\pi(x) \in S_\chi$ et donc $S \subset S_\chi$.

Preuve de la proposition 4.1. Soit S une variété spéciale et μ_S sa mesure invariante normalisée. Pour tout caractère χ de X, $\int_S \chi d\mu_S = 1$ si la restriction de χ à S est le caractère trivial 1 et vaut 0 sinon. D'après le lemme 4.2 $\int_S \chi d\mu_S = 1$ si $S \subset S_\chi$ et 0 sinon.

Soient donc T_n une suite stricte de sous-variétés spéciales de X. et μ_n la mesure invariante normalisée de T_n. Soit χ un caractère non trivial de X. Comme T_n est une suite stricte, pour tout n assez grand (dépendant de χ), T_n n'est pas contenu dans S_χ. D'après ce qui précède, on voit que pour tout n assez grand on a

$$\int_{T_n} \chi d\mu_n = 0.$$

on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_n} \chi d\mu_n = 0.$$

On termine la preuve de la proposition 4.1 en utilisant le lemme 4.1

Une conséquence de la proposition 4.1 est l'énoncé :

Corollaire 4.1 *Soit S_n une suite de sous-variétés spéciales de $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$. En passant au besoin à une sous-suite, il existe une sous-variété spéciale S contenant les S_n telle que la suite de mesures canoniques μ_n de S_n converge faiblement vers la mesure canonique de S.*

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-variétés spéciales contenant une infinité de termes de la suite. Soit S un élément minimal de $\mathcal{E}$. En passant à une sous-suite on peut supposer que les S_i sont contenus dans S pour tout i. La variété S est de la forme $\mathbb{Z}^k \backslash \mathbb{R}^k$ et par définition les S_n forment une suite stricte de sous-variétés spéciales de S. Le résultat se déduit alors de la proposition 4.1.

4.2 Application aux variétés abéliennes

Soit $A = \Gamma\backslash\mathbb{C}^n$ une variété abélienne. En identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, on peut appliquer la théorie de la partie précédente. Les sous-variétés abéliennes sont des sous-variétés spéciales. On obtient alors la proposition 3.1

Proposition 4.2 *Soit B_n une suite de sous-variétés abéliennes de A. En passant au besoin à une sous-suite, il existe une sous-variété abélienne B de A, telle que telle que pour tout n $B_n \subset B$ et telle que la suite de mesures μ_n canoniquement associées converge vers la mesure μ_B canoniquement associée à B.*

Preuve. On sait déja qu'il existe une sous-variété spéciale S de A ayant la propriété du théorème, il faut voir que S est une variété abélienne. Les B_i sont de la forme $\Gamma \cap V_i \backslash V_i$ pour des sous-$\mathbb{C}$ espaces vectoriels V_i de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs $S = \Gamma \cap V \backslash V$ pour un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Comme les B_n forment une suite stricte de S, S est engendré comme groupe par un nombre fini des B_i et V est somme d'un nombre fini des V_i. On en déduit que V est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel donc que B est un tore complexe puis que B est une sous-variété abélienne de A car d'après ([2] p 73) un sous-tore complexe d'une variété abélienne est une variété abélienne.

5 Appendice : effectivité dans le lemme de Poincaré, selon Bertrand [1]

Nous donnons ici la preuve, reprise de l'appendice de [1], de la proposition 2.1. Pour l'énoncé lui-même, voir aussi [2], Chap. 5, Exercice 5.

5.1 Rappels

On fixe une $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{D}$ de dimension finie que l'on suppose être une algèbre à division, c'est-à-dire munie d'un élément unité 1 et telle que tous ses éléments non nuls sont inversibles pour la multiplication. Dans notre situation, avec une variété abélienne simple A, nous utiliserons ceci pour $\mathbb{D} := \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Le centre de $\mathbb{D}$ ne jouera pas de rôle.

Définition 5.1. Un anneau $\mathcal{O}$ est un *ordre dans* $\mathbb{D}$ si

1. il est de type fini sur $\mathbb{Z}$,
2. il est contenu dans $\mathbb{D}$,
3. il contient 1,
4. $\mathcal{O} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{D}$ (où $\mathcal{O} \cdot \mathbb{Q}$ désigne l'image de l'application naturelle de $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{D}$).

Définition 5.2. Soit $\mathcal{O}$ un ordre dans $\mathbb{D}$. On dit que Λ est un *$\mathcal{O}$-réseau* si c'est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini qui est sans $\mathbb{Z}$-torsion.

Donnons maintenant un cas particulier du théorème de Jordan-Zassenhaus (cf. par exemple [5] p.534).

Théorème 5.1 (Jordan-Zassenhaus) *Soient $\mathbb{D}$ une algèbre à division de dimension finie, $\mathcal{O}$ un ordre dans $\mathbb{D}$, et V un $\mathbb{D}$-module à droite de rang fini. Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}$-réseaux L contenus dans V tels que $V = L \cdot \mathbb{Q}$.*

5.2 Le résultat de Bertrand

Lemme 5.1 *Soient $\mathbb{D}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre à division de dimension finie, $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{O}$ un ordre maximal dans $\mathbb{D}$. Il existe un entier $c_1 = c_1(\mathcal{O}, n) > 0$ telle que pour tout sous-$\mathcal{O}$-module à droite L de $\mathcal{O}^n$, on a :*

1. *Il existe un sous-$\mathcal{O}$-module libre F de L tel que $|L/F|$ divise c_1.*
2. *Si $\mathcal{O}^n/L$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion, alors il existe un sous-$\mathcal{O}$-module libre M de $\mathcal{O}^n$ tel que $L \cap M = \{0\}$ et tel que $L + M$ est d'indice divisant c_1 dans $\mathcal{O}^n$.*

Démonstration : Le module L est de rang fini, m, comme $\mathcal{O}$-module. De plus, c'est un sous-module de $\mathcal{O}^n$ qui est sans $\mathbb{Z}$-torsion. C'est donc un $\mathcal{O}$-réseau. Par le théorème de Jordan-Zassenhaus 5.1, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de sous-$\mathcal{O}$-réseaux M de $\mathbb{D}^m$ tels que $M \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{D}^m \simeq L \cdot \mathbb{Q}$. Ainsi, L est isomorphe à un élément M_0 appartenant à cette famille, finie de cardinal ne dépendant que de $\mathcal{O}$ et de $m \leq n$, de $\mathcal{O}$-réseaux. Pour chaque élément de cette famille, on choisit un sous-$\mathcal{O}$-module libre d'indice fini et on prend l'image dans L du sous-module correspondant à M_0. On obtient ainsi un sous-$\mathcal{O}$-module libre de L, d'indice fini borné indépendamment de L. Ceci prouve le 1.

Pour le point 2. : le module $\mathcal{O}^n/L$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion donc c'est un $\mathcal{O}$-réseau. De plus par maximalité de l'ordre $\mathcal{O}$, le $\mathcal{O}$-réseau $\mathcal{O}^n/L$ est un $\mathcal{O}$-module projectif (cf. [5] Theorem 26.12 (ii) p.565). Ainsi L admet un $\mathcal{O}$-réseau supplémentaire M_1 dans $\mathcal{O}^n$. Par le point 1., et quitte à remplacer c_1 par son carré, on en déduit un sous-$\mathcal{O}$-module M de M_1 comme annoncé. □

Proposition 5.1 (= Proposition 2.1) *Il existe un entier $c_2 = c_2(A) > 0$ ne dépendant que de A tel que pour toute sous-variété abélienne B de A, il existe une sous-variété B' de A telle que*

$$A = B + B' \text{ et } \operatorname{card}(B \cap B') \leq c_2.$$

Démonstration : Notons tout d'abord que si $\varphi : A \to \widetilde{A}$ est une isogénie de degré N, l'énoncé sur $\widetilde{A}$ l'entraîne sur A, avec $c_2(A) = c_2(\widetilde{A})N$. D'après le théorème de réductibilité de Poincaré, on peut donc supposer sans perte de généralité que A est un produit de puissances de variétés abéliennes deux à deux non isogènes.

En deuxième lieu, notons que si A_1 et A_2 sont deux variétés abéliennes telles que $Hom(A_1, A_2) = 0$, alors, toute sous-variété abélienne B de $A = A_1 \times A_2$ est de la forme $B_1 \times B_2$, où B_1 et B_2 sont les projections de B sur A_1 et A_2. Par conséquent, $c_2(A_1 \times A_2) := c_2(A_1) \times c_2(A_2)$ convient, et on peut sans perte de généralité supposer que notre variété abélienne A est une puissance A_0^n d'une variété abélienne simple. Alors, $\mathrm{End}(A_0)$ est un ordre d'une algèbre à division $\mathbb{D}$, et il existe une variété abélienne $\widetilde{A}_0$, isogène à A_0, telle $\mathrm{End}(\widetilde{A}_0)$ est un ordre maximal $\mathcal{O}$ de $\mathbb{D}$.

On peut finalement supposer sans perte de généralité que la variété abélienne ambiante est de la forme A^n avec A simple et telle que $\mathcal{O} := \mathrm{End}(A)$ est un ordre maximal dans l'algèbre à division $\mathbb{D} = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$.

Soit alors B une sous-variété abélienne de A^n. Elle est isogène à A^m avec $m \leq n$. On a $\mathcal{O}^n \simeq \mathrm{Hom}(A, A^n)$. Notons

$$L_B = \{f \in \mathcal{O}^n \mid f(A) \subset B\} \simeq \mathrm{Hom}(A, B).$$

C'est un sous-$\mathcal{O}$-module à droite de $\mathcal{O}^n$. On peut donc appliquer le point 1. du lemme 5.1 précédent qui fournit un sous-$\mathcal{O}$-module libre L de L_B d'indice divisant l'entier $c_1(A)$. Par ailleurs, A étant un groupe divisible on voit également sur la définition de L_B que $\mathcal{O}^n/L_B$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion.

Le point 2. du même lemme 5.1 fournit alors un sous-$\mathcal{O}$-module libre de type fini M de $\mathcal{O}^n$ tel que $M \cap L_B = \{0\}$ et tel que $L_B + M$ est d'indice divisant $c_1(A)$ dans $\mathcal{O}^n$. Ainsi L et M sont deux sous-$\mathcal{O}$-modules libres de $\mathcal{O}^n$ tels que $L \cap M = 0$ et $L + M$ est d'indice $\leq c_1(A)2$ dans $\mathcal{O}^n$.

Notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ une base de L sur $\mathcal{O}$ et $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ une base de M sur $\mathcal{O}$ (avec $m + r = n$). Considérons de plus l'homomorphisme de A^m dans A^n

$$\underline{\lambda} : A^m \to A^n \text{ défini par } \underline{\lambda}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x_i),$$

et notons de même $\underline{\mu} : A^r \to A^n$. On pose $B' := \underline{\mu}(A^r)$. Quant à l'image de $\underline{\lambda}$, c'est B elle-même, puisque L étant contenu dans L_B, elle est par définition contenue dans B, tandis que les λ_i étant linéairement indépendants sur $\mathcal{O}$, sa dimension est égale à $m \dim(A) = \dim(B)$.

Considérons maintenant l'endomorphisme de A^n

$$(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) : A^n \to A^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1} \lambda_i(x_i) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_{m+i}),$$

dont l'image est par définition $B + B'$. Comme les λ_i, μ_j sont linéairement indépendants sur $\mathcal{O}$, son image a pour dimension $(m + r)\dim(A) = \dim(A^n)$. Il est donc surjectif et $B + B' = A^n$. D'autre part, $L + M$ est d'indice $\nu \leq c_1(A)2$ dans $\mathcal{O}^n$, donc il existe une matrice carrée γ d'ordre n à coefficients dans $\mathcal{O}$ telle que $(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \circ \gamma = \nu I_n$. D'après [7] p.131, on a alors aussi $\gamma \circ (\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \nu I_n$, de sorte que le noyau de $(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ est composé de points de torsion d'ordre divisant ν. Finalement, $(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ est une isogénie de degré borné par $\nu^{2n^2 dim(A)2} := c_2(A)$. Enfin, $(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ est la composée des isogénies $\underline{\lambda} \times \underline{\mu} : A^m \times A^r \to B \times B'$ et $+ : B \times B' \to A^n$, donc

$$|B \cap B'| = |\ker(+)| \leq c_2(A).$$

Ainsi, la sous-variété abélienne B' de la variété ambiante A^n répond à la question. $\square$

Références

[1] D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on abelian varieties MSRI, Preprint 06220-87, Berkeley, June 1987.

[2] C. Birkenhacke, H. Lange. Complex abelian varieties. *Springer-Verlag*, volume 302 1992.

[3] E. Bombieri et U. Zannier. Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 23(4) :779–792 (1997), 1996.

[4] L. Clozel, E. Ullmo. Equidistribution de sous-variétés spéciales, *Ann. of Math* **161** (2005), 1571–1588.

[5] C. W. Curtis et I. Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.

[6] S. David et M. Hindry, Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M., *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), 1–74.

[7] P. Draxl. *Skew Fields*, volume 81 of *London Math. Soc. Lecture Note Series.* Cambridge University Press, 1983.

[8] B. Edixhoven et A. Yafaev. Subvarieties of Shimura varieties. *Ann. of Math. (2)*, 157(2) :621–645, 2003.

[9] W. Fulton. Intersection Theory. *Springer, Second edition*, 1998.

[10] M. Hindry. Autour d'une conjecture de Serge Lang. *Invent. Math.*, 94(3) :575–603, 1988.

[11] Hrushovski, E. The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields *Ann. Pure Appl. Logic* **112** (2001), no. 1 43–115.

[12] B. Klingler, A. Yafaev. The André-Oort conjecture. preprint 2006.

[13] D. Masser et G. Wüstholz. Periods and minimal abelian subvarieties. *Ann. of Math. (2)*, 137(2) :407–458, 1993.

[14] R. Pink, D.Roessler. On Hrushovski proof of the Manin-Mumford conjecture *J. Algebraic Geom.* **13**, (2004), no. 4, 771–798.

[15] Raynaud, M. Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, *Arithmetic and Geometry*, Vol. I Progr. Math. 35, Birkhauser Boston, MA, (1988).

[16] J.-P. Serre. *Œuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. 1985–1998.

[17] J.-P. Serre. Notes de E. Bayer-Fluckiger sur le cours donné par Jean-Pierre Serre au Collège de France de janvier à mars 1986 "*Groupes linéaires modulo p et points d'ordre fini des variétés abéliennes.*" Accessible en ligne à l'adresse http ://alg-geo.epfl.ch/ bayer/html/notes.html

[18] E. Ullmo. Positivité et discrètion des points algébriques des courbes, *Annals of Maths* **147** (1998), 167–179.

[19] E. Ullmo. Manin-Mumford, André-Oort, the equidistribution point of view. Notes de cours à l'école d' été Equidistribution en théorie des nombres, Montréal, disponible à l'adresse
http ://www.math.u-psud.fr/ ullmo/Prebublications/coursMontrealfinal.pdf, 2005.

[20] E. Ullmo, A. Yafaev. Galois orbits and equidistribution of special subvarieties of Shimura varieties : towards the André-Oort conjecture. preprint 2006.

[21] E. Ullmo, A. Yafaev. The André-Oort conjecture for products of modular curves. ce volume.

[22] J.-P. Wintenberger. Démonstration d'une conjecture de Lang dans des cas particuliers. *J. Reine Angew. Math.*, 553 :1–16, 2002.

[23] S. Zhang Equidistribution of small points on abelian varieties *Annals of Maths* **147** (1998), p. 159–165.