Feuille 8 : Thèse de Tate et corps de classes

.

Exercice 1 (Première partie de l'examen 2003-2004) Soient k un corps de nombres, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_k$ son anneau des adèles et $\mathbb{I}_k$ le groupe des idèles. Pour toute place finie v de k, on note f_v^0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$ ($f_v^0 \in \mathcal{S}(k_v)$ espace de Schwartz-Bruhat de k_v). Rappelons que l'intégrale zéta de Tate est $Z(f,s) = \int_{\mathbb{I}_k} f(x)|x|^s d^\times x$ et notons $\zeta_k(s)$ la fonction zéta de Dedekind de k.

On pose $k = \mathbb{Q}$, $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$. Soit $f = h \otimes f_f^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ une fonction décomposée où $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (l'espace de Schwartz usuel) et $f_f^0 = \otimes_p f_p^0$.

1. Pour $\sigma = \Re(s) \in]0,1[$, montrer l'équivalence suivante :
$$\Big(\forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ Z(f,s) = 0\ \Big) \Longleftrightarrow \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = 0.$$
2. On montrera (ou on admettra, cf. la preuve de Tate de l'équation fonctionnelle globale) que l'on peut écrire
$$Z(f,s) = Z_+(f,s) + Z_+(\widehat{f}, 1-s) - \frac{\widehat{f}(0)}{1-s} - \frac{f(0)}{s},$$
où $Z_+(f,s) = \int_{|x|>1} f(x)|x|^s d^\times x$.
3. Montrer que
$$Z_+(f,s) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\Big(|x|^{s-1} \sum_{1\le n\le |x|} n^{-s}\Big)dx.$$
4. Soient $\sigma \in]0,1[$ et
$$H_s(x) = |x|^{s-1} \sum_{1\le n\le |x|} n^{-s} - \frac{1}{1-s}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $H_s(x) = O(|x|^{\sigma-1})$ pour $|x| \to +\infty$ (on utilisera la formule
$$\sum_{1\le n\le X} \frac{1}{n^s} = \big[[x]x^{-s}\big]_1^X - \int_0^X [x] - sx^{-s-1}dx$$
où $[x]$ est la partie entière de x et $[f]_a^b = f(b) - f(a)$).
5. Si $0 < \sigma < 1$, montrer que
$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = 0 \iff \int_{\mathbb{R}} h(x)H_s(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(x)H_{1-s}(x)dx.$$

Exercice 2 (Corps de classes de Hilbert) Soient K un corps de nombres et L son corps de classes de Hilbert de K, c'est-à-dire, la plus grande extension abélienne non ramifiée de K (aux places finies **et** infinies).

1. On rappelle que l'application de réciprocité (dite *application d'Artin*) induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq Cl(\mathcal{O}_K)$, où $Cl(\mathcal{O}_K)$ désigne le groupe des classes d'idéaux de K. Soit $\wp$ un idéal premier de K. Montrer que $\wp$ est totalement décomposé dans L si et seulement si c'est un idéal principal.

2. Soit $n > 0$ un entier sans facteur carré et tel que $n \not\equiv 3 \mod 4$. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ et L son corps de classes de Hilbert. Soit enfin p un nombre premier impair ne divisant pas n. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $p = x^2 + ny^2$ si et seulement si $p\mathcal{O}_K = \wp\overline{\wp}, \wp \neq \overline{\wp}$ et $\wp$ est totalement décomposé dans L.
3. Montrer que l'extension $L/\mathbb{Q}$ est galoisienne. En déduire que $p = x^2+ny^2$ si et seulement si p est totalement décomposé dans L.
4. Soit $L = K\sqrt{u})$ une extension quadratique avec $u \in \mathcal{O}_K$ et $\wp$ premier dans $\mathcal{O}_K$. Si $2u \notin \wp$, montrer que $\wp$ n'est pas ramifié dans L. Si $2 \in \wp$, $u \notin \wp$ et $u = b^2 - 4c$ pour $b, c \in \mathcal{O}_K$, montrer que $\wp$ n'est pas ramifié dans L.
5. On admet que le groupe des classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ est $Cl(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Montrer que le corps de classes de Hilbert de K est $L = K(\alpha)$ avec $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2} - 1}$.

Exercice 3 (Groupe des normes de $\mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$**)** Soient p un nombre premier, $n \geq 1$ un entier, K le corps des racines p^n-ièmes de l'unité sur $\mathbb{Q}$, K_p le corps des racines p^n-ièmes de l'unité sur $\mathbb{Q}_p$. On désire montrer que le groupe des normes de K_p à $\mathbb{Q}_p$, $N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(K_p^*)$ est égal à $p^{\mathbb{Z}}(1 + p^n\mathbb{Z}_p)$.

1. Prouver d'abord cette égalité en utilisant la théorie globale du corps de classes pour l'extension $K/\mathbb{Q}$.

   Dans les question suivantes, on utilise une méthode purement locale pour prouver le même résultat.

2. Soit Φ_{p^n} le polynôme cyclotomique. Prouver que $\Phi_{p^n}(1 - X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$. Quels sont les degrés d'inertie et de ramification de $K_p/\mathbb{Q}_p$? Calculer $N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(1 - \xi)$ où ξ est une racine primitive p^n-ième de l'unité dans K_p.
3. Supposons p impair. Quelle est l'image de $1+p\mathbb{Z}_p$ par $x \mapsto x^{p-1}$? l'image de $1+p\mathbb{Z}_p$ par $x \mapsto x^{p^{n-1}}$? celle de $\mathbb{Z}_p^*$ par $x \mapsto x^{p^{n-1}(p-1)}$? En déduire le résultat voulu en utilisant la théorie locale du corps de classes pour $K_p/\mathbb{Q}_p$.
4. Supposons $p = 2$, $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ est trivial pour $p = 2$). Quelle est l'image de $1 + 4\mathbb{Z}_2$ par $x \mapsto x^2$? par $x \mapsto x^{2^n-1}$? Quelle est l'image de $\mathbb{Z}_2^*$ par $x \mapsto x^{2^{n-1}}$? Montrer que $5^{2^{n-2}}$ est une norme de K_2 sur $\mathbb{Q}_2$ (on pourra commencer par $n = 2$). En déduire le résultat voulu.

Exercice 4 Soient K un corps local et L_1, L_2 deux extensions abéliennes finies de K, de groupes de normes associés $\mathcal{N}_{L_i} = N_{L_i/K}(L_i^*)$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$.
2. En déduire que $L_1 \subset L_2$ si et seulement si $\mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1}$.

Exercice 5 (Conducteur local) Soient L/K une extension abélienne de corps locaux et $n \geq 0$ le plus petit entier tel que $1 + \mathfrak{p}_K^n \subset \mathcal{N}_L$. On appelle *conducteur de* L/K l'idéal $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_K^n$.

1. Justifier l'existence de l'entier n définissant le conducteur.
2. Montrer que l'extension L/K est non ramifiée si et seulement si $\mathfrak{f} = 1$.