M2R Université de Paris-Sud
2006-2007 Séance 11 du 8 janvier 2007

Feuille 9 : Corps de classes

Exércice 1 (Compléments à l'exercice 2 de la feuille précédente) Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. On admet que le nombre de classes de K est 2.

1. Montrer que le corps de classes de Hilbert de K est $L = K(i)$.
2. En déduire que si p est un nombre premier, alors

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p = x^2 + 5y^2 \iff p = 1 \text{ ou } 9 \mod 20.$$

Exercice 2 (Compléments à l'exercice 4 de la feuille précédente)

1. Déduire de l'exercice 4 précédent que $\mathcal{N}_{L_1} \subset \mathcal{N}_{L_2} \iff L_2 \subset L_1$.
2. Montrer que $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cdot \mathcal{N}_{L_2}$.

Exercice 3 (Kronecker-Weber) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\mathcal{N}_n = \mathbb{Q}^* \cdot \left(\mathbb{R}_+^* \times \prod_{p \nmid n} \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{p \mid n} (1 + p^{v_p(n)} \mathbb{Z}_p) \right).$$

1. Montrer que si $\mathcal{N}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Q}^*$ et d'indice fini, alors $\mathcal{N}$ contient un $\mathcal{N}_n$ pour un entier n convenable.
2. En déduire le *théorème de Kronecker-Weber* : toute extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$ est contenue dans une extension cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ où ζ_n est une racine de l'unité.

Exercice 4 (**Corps de classes de rayons** selon Neukirch *Alg. Nb. theory*) Soit K un corps de nombres. On note $\{\mathfrak{p} \nmid \infty\}$ l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. À tout idéal entier de $\mathcal{O}_K$,

$$\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} \text{ avec } \quad n_\mathfrak{p} \geq 0 \quad \text{et } n_\mathfrak{p} = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{p} \text{ sauf un nombre fini,}$$

on associe un sous groupe de $\mathbb{I}_K$:

$$\mathbb{I}_K^\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} (1 + \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}) \times \prod_{v \mid \infty} U_v \quad \text{où } 1 + \mathfrak{p}^0 = \mathcal{O}_K^\times \quad \text{et où} \quad U_v = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \text{ si } v \text{ est réelle} \\ \mathbb{C}^* \text{ si } v \text{ est complexe} \end{cases}.$$

1. Montrer que les sous-groupes ouverts d'indice fini de $\mathbb{I}_K$ contenant K^* sont les sous-groupes contenant $K^* \cdot \mathbb{I}_K^\mathfrak{m}$. Les corps K_m associés aux idéaux $\mathfrak{m}$ par la théorie du corps de classes sont appelés les *corps de classes de rayons*[1], ou *ray class fields* modulo $\mathfrak{m}$.
2. Montrer que le corps de classes de rayons mod 1, noté $K^{(1)}$, est la plus grande extension abélienne de K non ramifiée en toutes les places finies de K.
3. Montrer que si $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m}'$ alors $K_m \subset K_{\mathfrak{m}'}$.
4. *(Kronecker-Weber généralisé)* Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, alors elle est contenue dans un corps de classes de rayons $K_\mathfrak{m}$ modulo $\mathfrak{m}$ pour un idéal entier $\mathfrak{m}$ convenable.

[1] cette définition est celle de Neukirch. Il en existe une autre, plus classique et un peu plus générale qui permet notamment de voir le corps de classes de Hilbert comme un corps de classes de rayons, ce qui n'est pas forcément le cas avec la définition adoptée ici.