M2R Université de Paris-Sud
2006-2007

Feuille 3 : Dirichlet, Cebotarev et Formule analytique du nombre de classes

1. Théorème de Dirichlet
Pour $h \in \mathbb{Z}[X]$, on définit

$$\mathrm{Spl}_1(h) := \{p \text{ premier } \mid \text{ il existe } n \in \mathbb{Z}, p \,|\, h(n)\}\,.$$

Pour K un corps de nombres, on définit

$$\mathrm{Spl}_1(K) := \{p \text{ premier } \mid \text{ il existe } \mathfrak{p}|p \text{ idéal premier dans } K \text{ avec } f(\mathfrak{p}|p) = 1\}\,.$$

1. Calculer $\mathrm{Spl}_1(T^2+1)$ et $\mathrm{Spl}_1(\mathbb{Q}(i))$.
2. Montrer plus généralement que si h est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et si x est une racine de h dans une clôture algébrique, les ensembles $\mathrm{Spl}_1(h)$ et $\mathrm{Spl}_1(\mathbb{Q}(x))$ coincident à un nombre fini d'exceptions près.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ impair et K un corps de nombres. On définit

$$S_1(m,K) := \{b \bmod m \,|\, p \equiv b\text{m pour une infinité de } p \in \mathrm{Spl}_1(K)\}\,.$$

Montrer que

$$S_1(m,K) = \{q \bmod m \,|\, q \in \mathrm{Spl}_1(K) \text{ et } q \text{ non ramifié dans } K(\zeta_m)\}\,.$$

4. Montrer que $S_1(m,K)$ est l'image de $\mathrm{Gal}(K(\zeta_m)/K) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$. En déduire que pour tout corps de nombre K, $S_1(m,K)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
5. Un polynôme $h(T)$ est dit euclidien pour $a \mod m$ où $(a,m) = 1$ si presque tous les diviseurs premiers de tous les $h(n)$ satisfont $p \equiv a \mod m$ ou $p \equiv 1 \mod m$ et si une infinité d'entre eux satisfont $p \equiv a \mod m$. Montrer que s'il existe un polynôme euclidien pour $a \mod m$ alors $a^2 \equiv 1 \mod m$. (Murty 1988[1]).

2. Si L/K est une extension finie de corps de nombres, on note $\mathcal{P}(L/K)$ l'ensemble des places finies v de K non ramifiées dans L/K telles qu'il existe une place w de L au-dessus de v de degré 1, *i.e.* telle que $f(w|v) = 1$.

1. Soit L/K une extension finie de corps de nombres. Soit N une extension galoisienne finie de K contenant L ; on note G le groupe de Galois de N sur K, H celui de N sur L. Soit v une place finie de K non ramifiée dans N/K et $\sigma \in G$ un Frobenius en v, *i.e.* l'automorphisme de Frobenius correspondant à une place de N au-dessus de v. Interpréter, en termes de H et de la classe de conjugaison de σ, le fait qu'il existe une place w de L au-dessus de v de degré 1.
2. Soit L/K une extension finie de corps de nombres. Montrer que $\mathcal{P}(L/K)$ a une densité, qui est $\geq 1/[L:K]$, avec égalité si et seulement si L/K est galoisienne. Montrer que L/K est galoisienne si et seulement si tout élément de $\mathcal{P}(L/K)$ est totalement décomposé dans L.

[1] Schur avait montré la réciproque en 1912

3. Soit L/K une extension finie de corps de nombres et soit M une extension finie galoisienne de K. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) M/K est (isomorphe à) une sous-extension de L/K
   (b) $\mathcal{P}(L/K) - (\mathcal{P}(M/K) \cap \mathcal{P}(L/K))$ est de densité nulle ($i.e$, à un ensemble de densité nulle près, $\mathcal{P}(L/K)$ est inclus dans $\mathcal{P}(M/K)$).

3. Formule analytique du nombre de classes. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique complexe, δ_K son discriminant, χ le caractère de Dirichlet primitif modulo $D = |\delta_K|$ associé à K :

$$\chi(p) = \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right) & \text{si } p \text{ premier impair,} \\ (-1)^{(d-1)/2} & \text{si } p = 2 \text{ et } d \equiv 1 \mod 4, \\ 0 & \text{si } p = 2 \text{ et } d \not\equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

On rappelle que dans le cas complexe $\chi(-1) = -1$. On rappelle également la formule analytique du nombres des classes (cas complexe)

$$h_K = \frac{w_k \sqrt{|\delta_k|}}{2\pi} L(1, \chi),$$

pour w_K le cardinal des racines de l'unité de K.

1. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{D}}$ et si $a \in \mathbb{Z}$, on introduit la somme de Gauss
$$g_a(\chi) = \sum_{k=1}^{D} \chi(k) w^{ak}.$$
Si $(a, D) = 1$, montrer que $\chi(a) g_a(\chi) = g_1(\chi)$. Si $(a, D) \neq 1$, montrer que $g_a(\chi) = 0$.
2. Montrer que
$$L(1, \chi) = -\frac{g_1(\chi)}{D} \left(\sum_{(a,D)=1} \chi(a) \log(\sin(\frac{\pi a}{D})) - i\frac{\pi}{D} \sum_{(a,D)=1} \chi(a) a \right).$$
3. Montrer que $|g_1(\chi)| = \sqrt{D}$.
4. Montrer que $\sum_{(a,D)=1} \chi(a) \log(\sin(\frac{\pi a}{D})) = 0$.
5. Supposons D impair (i.e $\chi(2) \neq 0$). Posons $S = \sum_{0<a<D} a\chi(a)$. Montrer que
$$(2 - \chi(2))S = -D \sum_{0<a<\frac{D}{2}} \chi(a).$$
6. Montrer que la formule de la question 1.5 est encore vraie pour D pair.
7. En déduire que si K est un corps quadratique imaginaire,
$$h_K = \frac{w_K}{2(2 - \chi(2))} \Big| \sum_{0<a<D/2} \chi(a) \Big|.$$
8. Quel est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$?
9. Quel est le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$?