M2R Université de Paris-Sud
2006-2007 décembre 2006

Feuille 6 : Caractères, Adèles, Idèles

Exercice 1 Soit G le produit restreint de groupes localement compacts G_v relativement aux sous-groupes ouverts H_v. Si $y \in G$, on note $y_v \in G_v$ sa projection sur la v-eme composante et on plonge G_v dans G par $x \mapsto (\ldots, 1, 1, x, 1, 1, \ldots)$. Soit $\chi \in \widehat{G}$ un caractère.

1. Montrer que χ est trivial sur presque tous les H_v (*i.e.* tous sauf eventuellement un nombre fini).
2. En déduire que pour tout $y \in G$ on a
$$\chi(y_v) = 1 \text{ pour presque tout } v, \text{ et } \chi(y) = \prod_v \chi(y_v).$$

Exercice 2 Le groupe topologique $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$

1. En considérant les adèles x_p valant p à la place $\mathbb{Q}_p$ et 1 à toutes les autres places, montrer que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ muni de la restriction de la topologie de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un groupe topologique.
2. Soient K un corps de nombres et $i : \mathbb{A}_K^{\times} \hookrightarrow \mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$, $x \mapsto (x, x^{-1})$. On munit $i(\mathbb{A}_K^{\times})$ de la topologie restreinte de celle sur $\mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$ et on met sur $\mathbb{A}_K^{\times}$ la topologie telle que i est un homéomorphisme sur son image. Montrer que muni de cette topologie, le groupe $\mathbb{A}_K^{\times}$ est un groupe topologique et que l'application $j : \mathbb{A}_K^{\times} \hookrightarrow \mathbb{A}_K$ est continue.
3. En voyant $\mathbb{A}_K^{\times}$ comme le produit restreint des $K_v^{\times}$ relativement aux $\mathcal{O}_{K_v}^{\times}$ et en mettant sur $\mathbb{A}_K^{\times}$ la topologie limite inductive qui en découle, montrer que cette topologie est la même que la précédente.

Exercice 3 Soit Y un sous-ensemble de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$. Montrer que Y est d'adhérence compacte si et seulement si $Y \subset K_\infty \prod_p K_p$ où les K_p (p premier ou ∞) sont des compacts de $\mathbb{Q}_p$ tels que $K_p = \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf un nombre fini.

Exercice 4 Caractères de $\mathbb{F}_q((X))$ Soient p premier et q une puissance non nulle de p. On note $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments. On note $K := \mathbb{F}_q((X))$ le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$ (*i.e.* les séries $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{F}_q$ et $a_i = 0$ si $i \ll 0$). C'est un corps valué pour la valuation $v(\sum a_i X^i) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

1. Déterminer les caractères de $\mathbb{F}_q$.
2. Soit $\psi_0 \in \widehat{\mathbb{F}_q}$ non trivial. Montrer que l'application $\psi : \sum_i q_i X^i \mapsto \psi_0(a_{-1})$ est un caractère unitaire de K.
3. Déterminer $\widehat{K}$.

Exercice 5 Soit K un corps de nombres et $\mathbb{I}_K$ le groupe des idèles sur K. En considérant l'application volume

$$\mathrm{vol} : \mathbb{I}_K \to \mathbb{R}_+^*, \quad (x_v) \mapsto \prod_v |x_v|_v,$$

montrer que $\mathbb{I}_K/K^*$ n'est pas compact.

Exercice 6 Soit K un corps de nombres de groupe d'idèles $\mathbb{I}_K$.

1. Montrer que $\mathbb{I}_K/\mathbb{I}_K^{S_\infty} \simeq \mathrm{Div}(\mathcal{O}_K)$.
2. En déduire que $\mathbb{I}_K = \mathbb{I}_K^S \cdot K^*$ si S est un ensemble de places de K assez grand.
3. Montrer que l'on a
$$\mathbb{I}_K \Big/ (\mathbb{I}_K^{S_\infty} \cdot K^*) \simeq \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K).$$

Exercice 7 Approximation Forte (exercice 1/3 de l'examen de janvier 2006) Soit F un corps de nombres, et soit v_0 une place de F. On désire prouver le *théorème d'approximation forte* : l'image de F dans le produit restreint des F_v pour $v \neq v_0$ est **dense**.

1. Prouver que pour toute place v infinie de F il existe des nombres réels $r_v > 0$ tels que tout adèle $x \in \mathbb{A}_F$ s'écrive $x = \alpha + z$ avec $\alpha \in F$ et $z \in \mathbb{A}_F$, $|z_v|_v \leq r_v$ pour v infinie, $|z_v|_v \leq 1$ pour v finie.

   Sur le groupe localement compact $\mathbb{A}_F$, choisissons une mesure de Haar dx. Cela donne une mesure de Haar $d\bar{x}$ sur $\mathbb{A}_F/F$, telle qu'on ait
$$\int_{\mathbb{A}_F} f(x)dx = \int_{\mathbb{A}_F/F} \Big(\sum_{\xi \in F} f(\xi + x) \Big) d\bar{x}$$
   pour toute fonction mesurable positive (ou intégrable) $f : \mathbb{A}_F \to \mathbb{R}$.

2. Soit C une partie mesurable de $\mathbb{A}_F$ de volume (pour dx) strictement plus grand que celui de $\mathbb{A}_F/F$ (pour $d\bar{x}$). Prouver qu'il existe $\xi \in F^*$ tel que C rencontre $C + \xi$.
3. Soit S un ensemble fini de places de F ne contenant pas v_0. Pour $v \in S$, soit δ_v un nombre réel > 0. Prouver qu'il existe $\xi \in F^*$ tel que
$$|\xi|_v \leq \delta_v \quad \text{pour} \quad v \in S, \quad \text{et} \quad |\xi|_v \leq 1 \quad \text{pour} \quad v \notin S, \;\; v \neq v_0.$$
4. Soit S un ensemble fini de places de F ne contenant pas v_0. Pour $v \in S$ soit $a_v \in F_v$. Soit ε un nombre réel strictement positif. Prouver qu'il existe $\xi \in F$ tel que
$$|\xi - a_v|_v < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad v \in S, \quad \text{et} \quad |\xi|_v \leq 1 \quad \text{pour} \quad v \notin S, \;\; v \neq v_0.$$
   (Indication : Appliquer 1.1 à $\lambda^{-1}a$ pour $\lambda \in F$ bien choisi et a l'adèle de composante a_v pour $v \in S$ et 0 ailleurs).
5. Prouver le théorème d'approximation forte.