M2R Université de Paris-Sud
décembre 2008

# Partiel de l'an passé (novembre 2007) d'une durée de 3h.

Les notes de cours sont autorisées à l'exclusion de tout autre document. Écrivez lisiblement (en français ou en anglais).

*Le premier problème est indépendant des deux autres. On pourra admettre les résultats du second pour faire le troisième.*

I – Dans ce problème, $K$ est un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel $k$ fini. On note $q = p^f$, avec $p$ premier et $f$ entier $\geq 1$ le nombre d'éléments de $k$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$. On note $v_K$ la valuation de $K$ normalisée par $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$ ainsi que son unique extension à $\overline{K}$.

Pour toute extension $L$ de $K$ contenue dans $\overline{K}$, on note $\mathcal{O}_L = \{a \in L \mid v_K(a) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de $L$, $\mathfrak{m}_L = \{a \in \mathcal{O}_L \mid v(a) > 0\}$ son idéal maximal et $k_L = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel. Si $L \subset M$ sont des extensions finies séparables de $K$, on note $\mathcal{D}_{M/L}$ la différente de l'extension $M/L$ (c'est-à-dire la différente de $\mathcal{O}_M$ relativement à $\mathcal{O}_L$) et $\delta_{M/L}$ le discriminant. Rappelons que, si $L/K$ est finie, une *uniformisante de* $L$ est un générateur de $\mathfrak{m}_L$.

On choisit une uniformisante $\pi$ de $K$ et on pose $h = \pi X + X^q \in \mathcal{O}_K[X]$. On choisit une suite

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n, \dots$$

d'éléments de $\overline{K}$ vérifiant $\pi_0 = 0$, $\pi_1 \neq 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $h(\pi_n) = \pi_{n-1}$. On pose $K_n = K(\pi_n)$.

1) Montrer que le groupe $\mu_{q-1}(K)$ des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité de $K$ est un groupe cyclique d'ordre $q-1$.

2) Montrer que $K_1/K$ est une extension totalement ramifiée de degré $q-1$ et que $\pi_1$ est une uniformisante de $K_1$. Montrer que $K_1/K$ est une extension galoisienne et déterminer la structure de son groupe de Galois (indications : que peut-on dire de $\varepsilon\pi_1$ si $\varepsilon \in \mu_{q-1}(K)$ ?).

3) Montrez par récurrence sur $n$ que, pour tout $n \geq 1$, l'extension $K_{n+1}/K_n$ est séparable, totalement ramifiée, que $\pi_{n+1}$ est une uniformisante de $K_{n+1}$ et déterminer $[K_{n+1} : K_n]$ (indication : que peut-on dire du polynôme $X^q + \pi X - \pi_n \in K_n[X]$ ?).

4) Soit $n$ un entier $\geq 1$. Montrer que $\mathcal{O}_{K_n} = \mathcal{O}_K[\pi_n]$.

5) Pour tout $m \geq 1$, déterminez $\mathcal{D}_{K_{m+1}/K_m}$. Pour tout $n \geq 1$, montrez que $\mathcal{D}_{K_n/K}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{K_n}$ engendré par $\pi^n$ (ou par $\pi_n^{n[K_n:K]}$). [1]

Dans toute la fin du problème, on suppose que $K$ est de caractéristique $p$. Rappelons que $\mathcal{O}_K$ s'identifie alors à l'anneau $k[[\pi]]$ des séries formelles en $\pi$ à coefficients dans $k$.

6) On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\overline{K}$, en posant $F_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, $F_n = \{a \in \overline{K} \mid h(a) \in F_{n-1}\}$. Montrez

a) que $F_n$ contient $F_{n-1}$,

b) que $F_n$ est un sous-$k$-espace vectoriel de $\overline{K}$,

c) que $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ est une base de $F_n$ sur $k$ et que par conséquent $F_n \subset K_n$.

7) Soit $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ le groupe des $K$-automorphismes de $\overline{K}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g \in G_K$, on a $g(F_n) = F_n$. En déduire que l'extension $K_n/K$ est galoisienne.

[1] Question supplémentaire : calculer $v_K(\delta_{K_n/K})$ (on rappelle que $\delta_{K_n/K}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_K$ norme de $K_n$ à $K$ de $\mathcal{D}_{K_n/K}$).

II – Soient $A$ un aneeau de Dedekind, $K$ son corps des fractions, $L$ une extension finie séparable de $K$ et $B$ la fermeture intégrale de $A$ dans $K$. On note $P_A$ l'ensemble des idéaux maximaux de $A$. On appelle *$A$-ordre de $L$* tout sous-anneau de $L$ contenant $A$ qui est un $A$-module de type fini. Si $R$ est un $A$-ordre de $L$ et si $\mathfrak{p} \in P_A$, on note $A_\mathfrak{p}R$ le sous-$A_\mathfrak{p}$-module de $L$ engendré par $R$. On dit que $R$ est *$\mathfrak{p}$-clos* si $A_\mathfrak{p}R = A_\mathfrak{p}B$.

1) Soit $R$ un $A$-ordre de $L$.

a) Montrer que $R \subset L$ et que, pourt tout $\mathfrak{p} \in P_A$, $A_\mathfrak{p}R$ est un $A_\mathfrak{p}$-ordre de $L$.

b) Monter que $R = B$ si et seulement si $R$ est $\mathfrak{p}$-clos pour tout $\mathfrak{p} \in P_A$.

2) Soit $R$ un sous-anneau de $B$ contenant $A$ et un élément $\alpha \in B$ tel que $L = K[\alpha]$. Soit $P$ le polynôme minimal de $\alpha$ sur $K$.

a) Montrer que $R$ est un $A$-ordre de $L$.

b) Soient $\mathfrak{p} \in P_A$, $k = A/\mathfrak{p}$ et $\overline{P}$ l'image de $P$ dans $k[X]$. Montrer que si $\overline{P}$ est séparable, alors $R$ est $\mathfrak{p}$-clos et les idéaux premiers de $B$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont non ramifiés.

III – On note $\theta$ l'unique nombre réel tel que $\theta^7 = 12$ et on pose $E = \mathbb{Q}(\theta)$. On note $\mathcal{O}_E$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $E$.

1) Déterminer l'ensemble des nombres premiers $p$ tels que l'image du polynôme $X^7 - 12$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ n'est pas séparable.

2) Pour tout nombre premier $p$, on choisit une valuation $w_p$ de $E$ telle que $w_p(p) = 1$. On identifie $E$ à un sous corps de l'anneau $E_p = \mathbb{Q}_p \otimes_\mathbb{Q} K$ en posant $a = 1 \otimes a$, pour tout $a \in E$.

a) Calculer $w_2(\theta^4/2)$, $w_3(\theta)$ et $w_7(\theta + 2)$.

b) Pour $p = 3, 2$ et $7$, montrer que $E_p$ est un corps, calculer l'indice de ramification et le degré résiduel de l'extension $E_p/\mathbb{Q}_p$. Trouver $\theta_p \in E$ tel que l'anneau des entiers de $K_p$ soit $\mathbb{Z}_p[\theta_p]$.

c) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{m}$ son image dans $\mathbb{F}_5$. Soit $\varepsilon$ une racine primitive 7-ième de l'unité dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_5[X]$ de $\mathbb{F}_5$. Montrez que, dans $\overline{\mathbb{F}}_5[X]$, on a $X^7 - \overline{12} = \Pi_{i=0}^{6}(X - \overline{3}.\varepsilon^i)$ Calculer $[\mathbb{F}_5(\varepsilon) : \mathbb{F}_5]$. Montrer que $E_5$ est le produit de deux corps et calculer le degré de chacun d'eux sur $\mathbb{Q}_5$.

d) Pour $p = 2, 3, 5$ et $7$, expliquer comment l'idéal $p\mathcal{O}_E$ se décompose.

3) Quel est l'anneau des entiers de $E$ ?