

Feuille d'exercices n°5

Exercice I

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f: M_{3,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbf{R})$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Exercice II

Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice III

Notons $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer AB .
- (2) Calculer BA .

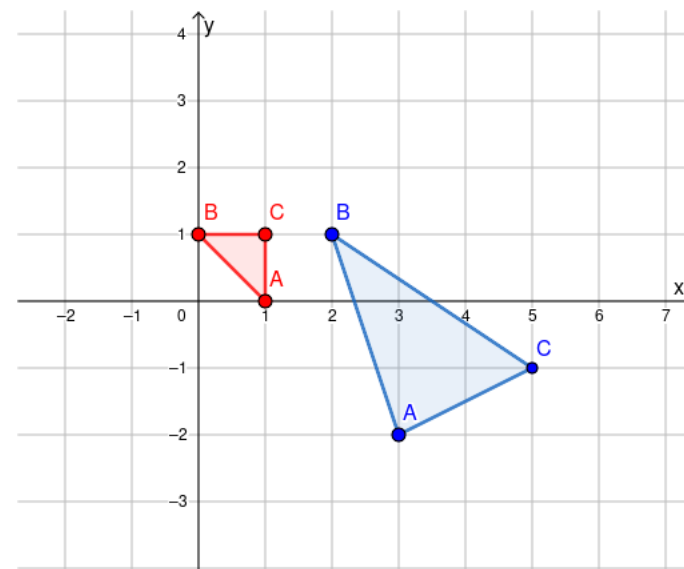
Exercice IV

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f: M_{3,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{1,1}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x + 4y + 5z$$

Exercice V

Dans cet exercice, on identifie les points du plan à des vecteurs-colonnes appartenant à $M_{2,1}(\mathbf{R})$.



(1a) Déterminer, si elle existe, la matrice M d'une application linéaire $f: M_{2,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

(1b) Calculer $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Dans les questions qui suivent, plusieurs méthodes de calcul sont envisageables.

(2) Notons $D \in M_{2,1}(\mathbf{R})$ défini par $D = C + (B - A)$. Calculer $D' := f(D)$.

(3) Notons I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer $I' := f(I)$.

(4a) Déterminer un paramétrage de la droite (AD) .

(4b) En déduire un paramétrage de l'ensemble Δ des points de la forme $f(P)$ avec $P \in (AD)$.

(5) Faire une figure.

Exercice VI

On fixe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. On note D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$$

On note $d: M_{2,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbf{R})$ l'application linéaire associée à D .

(1) Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer $d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

(2) Déterminer l'application linéaire $f: M_{2,1}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2,1}(\mathbf{R})$ associée à M .

(3) Déterminer $d \circ f$. En déduire le résultat du produit DM .

(4) Déterminer $f \circ d$. En déduire le résultat du produit MD .

Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles? Déterminer l'inverse de celles qui le sont.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice VIII

(1) En utilisant la formule directe d'inversion (particulière aux matrices carrées de taille 2), déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & -17 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les solutions éventuelles à l'équation matricielle $A_i X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

Exercice IX

(1) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante pour la mettre sous forme échelonnée réduite :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(2) En déduire les solutions éventuelles au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -3x + 8y - 4z = 4 \\ 2x + y + 17z = 2 \end{cases}$$

Exercice X

Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -5 & 26 & -42 \\ 2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$$

Exercice XI

(1) On fixe $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = b_1 \\ \quad y + 3z = b_2 \\ \quad \quad z = b_3 \end{cases}$$

(2) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$