Feuille 10 : Courbes projectives lisses.

Dans toute la suite on note k un corps parfait, X/k une courbe projective lisse sur k, de genre g, de corps de fonctions associé $k(X)$ (tel que k est algébriquement fermé dans $k(X)$). On note K_X un diviseur canonique sur X. Par ailleurs, étant donné un diviseur $D = \sum n_P[P]$, (la somme portant sur l'ensemble X_f des points fermés de X), on note

$$D_0 := \sum_{n_P>0} n_P[P] \quad \text{et} \quad D_\infty := -\sum_{n_P<0} n_P[P].$$

Si D est un diviseur, on notera, pour soulager les notations, $\mathcal{L}(D)$ au lieu de $\mathcal{L}(D)(X)$ si il n'y a pas de confusion possible.

Exercice 1 (Weierstrass Gap Theorem) Soit P un point fermé de X.

1. Montrer que

$$\forall n \geq 2g, \quad \exists f \in k(X), \quad \text{telle que} \quad (f)_\infty = nP.$$

   Si $n \in \mathbb{N}$ est tel qu'il n'existe pas de f comme ci-dessus, on dit que n est un *nombre de saut (gap number)* pour P.

2. On suppose maintenant que P est dans $X(k)$. Montrer qu'il existe g nombres de saut pour P : $i_1 < \cdots < i_g$. Montrer de plus que $i_1 = 1$ et que $i_g \leq 2g-1$.

Exercice 2 (Courbes elliptiques) On suppose ici que E/k est une courbe elliptique au sens suivant : E est de genre 1 et munie d'un point rationnel P_0.

1. Que peut-on dire de $\mathcal{L}([P_0])$?
2. Que peut-on dire de la suite $(\ell([nP_0]))_{n\in\mathbb{N}}$?
3. On suppose maintenant que k n'est pas de caractéristique 2. Montrer qu'il existe $x, y \in k(E)$ telles que $k(E) = k(x,y)$ et $y^2 = f(x) \in k[x]$, où f est un polynôme (sans facteur carré) de degré 3.

Exercice 3 (Caractérisation des diviseurs canoniques)

1. Montrer que si il existe $g_0 \in \mathbb{N}$ et $W_0 \in \mathrm{Div}(X)$ tels que

$$\forall A \in \mathrm{Div}(X), \quad \ell(A) = \deg A + 1 - g_0 + \ell(W_0 - A),$$

   alors $g_0 = g$ et W_0 est un diviseur canonique.

2. Montrer que $W_0 \in \mathrm{Div}(X)$ est un diviseur canonique si et seulement si

$$\deg W_0 = 2g-2 \quad \text{et} \quad \ell(W_0) \geq g.$$

3. Donner un diviseur canonique si X/k est une courbe elliptique.

Exercice 4 (Théorème de Lũroth)

1. Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et $L = K(x)$ une extension finie. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K(x^{p^n})/K$ est une extension séparable et $[K(x) : K(x^{p^n})] = p^n$.
2. Soit k un corps parfait algébriquement fermé dans $k(x)$, avec x transcendant sur k. Montrer que si L est une sous-k-extension de $k(x)$ (*i.e.* si $k \subset L \subset k(x)$), alors il existe $y \in L$ tel que $L = k(y)$.

Exercice 5 (ABC pour les corps de fonctions) Soit $\overline{k}$ un corps algébriquement clos de caractérisitique nulle et $X/\overline{k}$ une courbe projective lisse de genre g. Tout élément $a \in \overline{k}(X)$ définit C comme un revêtement fini de $\mathbb{P}^1$ (justifier). On note $\deg(a)$ le degré de ce revêtement. Soit $A, B \in \overline{k}(X)$ telles que $A + B = 1$, et soit $S \subset X$ un ensemble fini de points fermés contenant les zéros et les pôles de A et B. Montrer que

$$\deg(A) \leq \mathrm{Card}(S) + 2g - 2.$$

Rappels : $\Omega^1_{X/k}$ est un $k(X)$-espace vectoriel de dimension 1. Si x est un point fermé de X d'uniformisante π_x et si $\omega \in \Omega^1_{X/k}$, il existe une unique fonction $\lambda_x \in k(X)$ telle que $\omega = \lambda_x d\pi_x$. On pose $v_x(\omega) := v_x(\lambda_x)$ et $\mathrm{div}(\omega) = \sum_x v_x(\omega)[x]$.

Exercice 6 On suppose k algébriquement clos. Soit $k(t)$ l'extension transcendante pure qui correspond à $\mathbb{P}^1$. Calculer $\mathrm{div}(dt)$.

"Rappels"

1. Soit K/k un corps de fonctions et K' une extension finie de K. Soit p un idéal maximal de K et $P_1, \ldots, P_r$ les points de K' au-dessus de p. Alors
$$\sum_{i=1}^{r} e(P_i/p)f(P_i/p) = [K' : K].$$
2. Soit K un corps et K' une extension finie de degré $n \geq 1$. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète de K, d'idéal maximal p, de corps résiduel $k(p)$. Soit $\{(\mathcal{O}_i, P_i, k(P_i)) \mid 1 \leq i \leq r\}$ l'ensemble des extensions de $(\mathcal{O}, p, k(p))$ à K'. On suppose que $K' = K(y)$ où $y \in K'$ est de polynôme minimal unitaire $g \in \mathcal{O}[X]$ et à racines distinctes modulo p. Alors
$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \quad e(P_i/p) = 1.$$

Exercice 7 (Fonctions hyperelliptiques) Soit k un corps parfait de caractéristique différente de 2. On suppose que k est algébriquement fermé dans $k(x)$ avec x transcendant sur k. On pose $L = k(x, y)$, où y vérifie $y^2 = f(x)$ avec $f = \prod_{i=1}^{r} p_i(x)$ un polynôme dans $k[x]$ non constant et sans facteur carré. Notons $X \to \mathbb{P}^1$ le revêtement de courbes projectives lisses correspondant à l'extension $L/k(x)$.

1. Montrer que k est algébriquement fermé dans L.
2. Déterminer la différente de $L/k(x)$, (*i.e.* déterminer les points fermés de X qui sont ramifiés, donner leur indice de ramification et leur degré résiduel).
3. En déduire le genre de X en fonction du degré de f.