Feuille 1 : Produit tensoriel, localisations, modules des différentielles

Dans tout la suite, on notera A un anneau commutatif, E, E' et F des A-modules.

Exercice 1 Soit $f : E \to E'$ un morphisme injectif de A-modules. Montrer sur un exemple que l'homomorphisme $f \otimes 1 : E \otimes F \to E' \otimes F$ n'est pas injectif en général.

Exercice 2 On suppose E et F libres de bases respectives $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$. Montrer que $E \otimes F$ est libre et donner une base de $E \otimes F$.

Exercice 3
1. Si I est un idéal de A, montrer l'isomorphisme $E \otimes_A A/I \simeq E/EI$ défini par $x \otimes (a + I) \mapsto xa + EI$. (On pourra par exemple introduire la suite exacte canonique $0 \to I \to A \to A/I \to 0$).
2. En déduire une forme plus simple pour $A/I \otimes A/J$ où I et J sont deux idéaux de A.
3. Montrer directement que $A/I \otimes A/J = A/(I + J)$ en étudiant l'annulateur de $\pi_I(1) \otimes \pi_J(1)$ dans $A/I \otimes A/J$.

Exercice 4 (Calculs de produits tensoriels sur $\mathbb{Z}$) On introduit les $\mathbb{Z}$-modules suivants : $\mathbb{Z}^r$ avec $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.
1. Calculer le produit tensoriel (sur $\mathbb{Z}$) de $\mathbb{Z}^r$ avec chacun des autres termes (y compris avec $\mathbb{Z}^{r'}$ pour $r' \in \mathbb{N}$).
2. Calculer le produit tensoriel de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ avec chacun des autres termes.
3. Calculer le produit tensoriel de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec chacun des autres termes (y compris avec $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).
4. Montrer que si G est un groupe abélien fini, on a $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.
5. En admettant que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

Exercice 5 Soit B une A-algèbre et $f \in A[X]$.
1. Montrer que $B \otimes_A A[X]/(f(X)) = B[X]/(f(X))$.
2. Montrer que $A[X] \otimes_A A[Y] = A[X, Y]$.
3. Déterminer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (ceci fourni un exemple de produit tensoriel de deux extensions qui n'est pas une extension).
4. Soient $K = k[\alpha]/k$ une extension finie séparable de corps et Ω une extension quelconque de k. Montrer que $K \otimes_k \Omega$ est produit d'extensions séparables de Ω
$$K \otimes_k \Omega = \Pi_{i=1}^r \Omega_i.$$
5. Est-ce encore vrai si l'extension K/k n'est pas séparable ? (Considérer un élément convenable de la forme $\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha$ dans le produit $K \otimes_k K$).

Exercice 6 (Localisation) Soient A un anneau commutatif et M et N deux A-modules. On note $S_{\mathfrak{p}} = A\backslash\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. On note $M_{\mathfrak{p}}$ le module défini comme l'ensemble des "fractions" $\frac{m}{s}$ avec $m \in M$ et $s \in S_{\mathfrak{p}}$, deux telles fractions $\frac{m}{s}$ et $\frac{m'}{s'}$ étant identifiées si et seulement si
$$\exists s'' \in S_{\mathfrak{p}} \quad s''(s'm - sm') = 0.$$
Ceci s'applique en particulier à A (non nécessairement intègre) et défini $A_{\mathfrak{p}}$. On a des applications naturelles
$$A \to A_{\mathfrak{p}}\ a \mapsto \frac{a}{1}, \quad \text{et} \quad M \to M_{\mathfrak{p}}\ m \mapsto \frac{m}{1}.$$
La multiplication $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'}$ définie une structure d'anneau sur $A_{\mathfrak{p}}$. De même $M_{\mathfrak{p}}$ est naturellement muni d'une structure de $A_{\mathfrak{p}}$-module.

On suppose donné un morphisme $\varphi : M \to N$ de A-modules. Pour tout $\mathfrak{p}$ premier, on note $\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ le morphisme de $A_{\mathfrak{p}}$-modules déduit de φ par $\varphi_{\mathfrak{p}}(\frac{m}{s}) = \frac{\varphi(m)}{s}$.

Montrer que φ est injective (respectivement surjective) si et seulement si pour tout premier $\mathfrak{p}$, le morphisme $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est injectif (respectivement surjectif).

Exercice 7 Soient $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ où $A_{\mathfrak{p}}$ est le localisé de A suivant l'ensemble multiplicatif $S_{\mathfrak{p}} = A - \mathfrak{p}$. Montrer que l'application

$$A/\mathfrak{p}^m \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}^m, \quad a + \mathfrak{p}^m \mapsto a + \mathfrak{q}^m$$

est un isomorphisme. Pour l'injectivité on montrera que l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}^m$ est local.

Exercice 8 (Foncteurs représentables)

1. Soient A un anneau commutatif et E, F deux A-modules. On note B le foncteur covariant de Mod_A (catégorie des A-modules) dans Ens (catégorie des ensembles) donné par

   $$B(G) = \mathrm{Bil}(E \times F, G).$$

   Montrer que B est représentable ; par quel A-module ?
2. Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation déquivalence sur X. Montrer que le foncteur covariant de Ens dans Ens qui à Z associe l'ensemble des applications $f : X \to Z$ telles que $(x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y))$ est représentable ; par quel objet ?
3. Soient A un anneau commutatif, E un A-module et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On note Φ le foncteur covariant de Mod_A dans Ens donné par

   $$\Phi(G) = \{f : E \to G \text{ linéaire} \mid \forall i \in I, \quad f(x_i) = 0\}.$$

   Montrer que Φ est représentable ; par quel module ?
4. Soit E un espace vectoriel normé. On note $Banach$ la catégorie des espace de Banach et Ψ le foncteur covariant de $Banach$ dans Ens donné par

   $$\Psi(F) = \{f : E \to F \mid f \text{ linéaire continue}\}.$$

   Montrer que Ψ est représentable ; par quel objet ?
5. Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble de X. On note Top la catégorie des espaces topologiques et Ψ le foncteur contravariant de Top dans Ens donné par

   $$\Psi(T) = \{f : T \to X \text{ continue} \mid f(T) \subset Y\}.$$

   Montrer que Ψ est représentable ; par quel objet ?