Feuille 2 : Valuations et complétion

Dans toute cette feuille, si l'on ne précise rien, p est un nombre premier.

Exercice 1 (clôture intégrale et localisation)

1. On rappelle tout d'abord deux définitions : soit A un anneau intègre inclus dans un corps L. On dit que $x \in L$ est *entier sur* A si l'une des deux conditions équivalentes (preuve !) est vérifiée :
   (i) Il existe $P \in A[X]$ unitaire de degré ≥ 1 tel que $P(x) = 0$,
   (ii) Il existe un A-module $M \subset L$, de type fini, non-nul, tel que $xM \subset M$.
   L'anneau A est dit *intégralement clos* si tout élement de $\mathrm{Frac}(A)$ qui est entier sur A est en fait dans A.
2. Soient $A \subset B$ deux anneaux intègres, avec B entier sur A. Soit $S \subset A$ un ensemble multiplicatif contenant 1 et pas 0. Montrer que $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$ et que si A est intégralement clos alors $S^{-1}A$ aussi.

Exercice 2 (Formule du produit sur $k(X)$) Soient k un corps et $K = k(X)$.

1. Montrer qu'il y a bijection entre l'ensemble des valuations v de K (normalisées telles que $v(K^*) = \mathbb{Z}$), triviales sur k, telles que $v(X) \geq 0$ et l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $k[X]$ (*i.e.* l'ensemble des idéaux maximaux de $k[X]$). On note $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation qui correspond à l'idéal $\mathfrak{p}$.
2. Si v est une valuation de K, triviale sur k, telle que $v(X) < 0$, montrer que
$$\forall h \in k[X], \quad v(h) = -\deg h.$$
   On note v_∞ l'unique telle valuation.
3. Montrer que pour tout $h \in K^*$, on a
$$v_\infty(h) + \sum_{\mathfrak{p}} [k[X]/\mathfrak{p} : k]\, v_{\mathfrak{p}}(h) = 0.$$

Exercice 3 (Approximation faible)

Soit K un corps de nombres (*i.e.* une extension finie de $\mathbb{Q}$) et soient $\sigma_i : K \hookrightarrow \mathbb{R}$, m plongements de corps, deux à deux distincts. Soient ε_i pour $1 \leq i \leq m$ des signes, *i.e.* des éléments de $\{-1, 1\}$. Montrer qu'il existe $a \in K^*$ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \ \ \mathrm{sign}(\sigma_i(a)) = \varepsilon_i.$$

Exercice 4 (Calculs)

1. Calculer la limite de $\frac{n!}{n!+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout premier p.
2. On ordonne les nombres premiers par ordre croissant et on forme ainsi la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ où p_n est le n-ieme nombre premier. On note $p_\infty := \infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, soient $a_n \in \mathbb{Z}_{p_n}$ des entiers p_n-adiques et $a_\infty = 0$. Montrer qu'il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n \in \mathbb{Q}$ telle que
$$\forall i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}, \quad \lim_{n\to+\infty} |x_n - a_{p_i}|_{p_i} = 0.$$
   On pourra par exemple écrire $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ et poser $v_n = 2^n f(n) + 1$ avec $f(n) = (\prod_{i=1}^n p_i)^n$.

Exercice 5 ($\mathbb{Q}$ n'est pas complet)

1. **(Théorème de Baire)** Soit E un espace topologique. On suppose que E est localement compact, ou que E est muni d'une distance d qui en fait un espace métrique complet. Montrer que toute intersection dénombrable $\bigcap_{n\geq 1} V_n$ d'ouverts denses dans E est dense dans E (on pourra construire une suite d'ouverts non vides (B_n) telle que $\overline{B}_{n+1} \subset V_n \cap B_n$).
2. Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué (*i.e.* muni d'une valeur absolue *ultramétrique*) complet, avec $|\cdot|$ une valeur absolue non-triviale. Montrer que K est indénombrable (on pourra utiliser le théorème de Baire).
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue p-adique n'est pas complet.

Exercice 6 ($\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos)
Montrer que le complété, $\mathbb{Q}_p$, de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique, n'est pas algébriquement clos (on considerera un polynôme convenable de degré 2 de $\mathbb{Z}_p[X]$).

Exercice 7 Soient U un ouvert non-vide de $\mathbb{Z}_p$. Montrer que U n'est pas connexe.

Exercice 8 (Développement de Hensel)
Soient K un corps complet pour une valuation discrète, d'anneau A, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, de corps de fractions $k := A/\mathfrak{p}$. Soit π une uniformisante de $\mathfrak{p}$ (*i.e.* un élément π de A tel que $v(\pi) = 1$) et soit S un système de représentants de k dans A. Montrer que tout élément de $a \in A$ s'écrit de façon unique comme une série convergente

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \pi^n \quad \text{avec} \quad s_n \in S.$$

Exercice 9 (Description de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$)
On rappelle que tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet le développement de Hensel suivant

$$x = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i p^i \quad \text{avec} \quad x_i \in \{0, \dots, p-1\} \quad \text{et } x_i = 0 \text{ pour tout } i \ll 0.$$

On note

$$[x] := \sum_{i\geq 0} x_i p^i \quad \text{sa partie entière, et} \qquad < x >:= \sum_{i<0} x_i p^i \quad \text{sa partie fractionnaire.}$$

1. Supposant l'existence et l'unicité du développement de Hensel sur $\mathbb{Z}_p$ acquis, le démontrer pour $\mathbb{Q}_p$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est un groupe topologique discret.
3. Montrer que l'application $\tau : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \exp(2i\pi < x >)$ est bien définie et est un morphisme de groupes.
4. À quoi est isomorphe le groupe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$?

Exercice 10 (Compacité)

1. Soit K un corps valué ultramétrique de valuation discrète, complet, d'anneau de valuation A. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Montrer que A est compact si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est fini.
2. En déduire que si K un corps valué ultramétrique de valuation discrète, complet, d'anneau de valuation A, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, d'uniformisante π et de corps résiduel fini, alors pour tout entier $n \geq 0$, les ensembles $\mathfrak{p}^n$, $1 + \mathfrak{p}^n$, $A^\times \pi$ sont compacts.