# Feuille 7

**Exercice 1** Soit $K$ un corps complet pour une valuation discrète d'uniformisante $\pi$. Un polynôme $f(X) \in K[X]$ est dit *polynôme d'Eisenstein* si

$$f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$$

avec $|a_0| = 1, |a_i| < 1, |a_n| = |\pi|$.

1. Soit $L$ une extension finie de $K$. Montrer que $L/K$ est totalement ramifiée si et seulement si $L = K[\alpha]$ avec $\alpha$ racine d'un polynôme d'Eisenstein.
2. Supposons que $L/K$ est totalement ramifiée. Soit $A$ et $B$ les anneaux de valuations discrètes de $K$ et $L$. Soit $\Pi$ un élément premier dans $B$. Montrer que $B = A[\Pi]$.

**Exercice 2 Le groupe topologique $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$**

1. En considérant les adèles $x_p$ valant $p$ à la place $\mathbb{Q}_p$ et 1 à toutes les autres places, montrer que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ muni de la restriction de la topologie de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un groupe topologique.
2. Soient $K$ un corps de nombres et $i : \mathbb{A}_K^{\times} \hookrightarrow \mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$ , $x \mapsto (x, x^{-1})$. On munit $i(\mathbb{A}_K^{\times})$ de la topologie restreinte de celle sur $\mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$ et on met sur $\mathbb{A}_K^{\times}$ la topologie telle que $i$ est un homéomorphisme sur son image. Montrer que muni de cette topologie, le groupe $\mathbb{A}_K^{\times}$ est un groupe topologique et que l'application $j : \mathbb{A}_K^{\times} \hookrightarrow \mathbb{A}_K$ est continue.
3. En voyant $\mathbb{A}_K^{\times}$ comme le produit restreint des $K_v^{\times}$ relativement aux $\mathcal{O}_{K_v}^{\times}$ et en mettant sur $\mathbb{A}_K^{\times}$ la topologie limite inductive qui en découle, montrer que cette topologie est la même que la précédente.

**Exercice 3** Soit $K$ un corps de nombres et $\mathbb{I}_K$ le groupe des idèles sur $K$. En considérant l'application volume

$$\mathrm{vol} : \mathbb{I}_K \to \mathbb{R}_+^*, \quad (x_v) \mapsto \prod_v |x_v|_v,$$

montrer que $\mathbb{I}_K/K^*$ n'est pas compact.

**Exercice 4 ($\mathbb{I}_K^1/K^*$ compact $\Rightarrow$ $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ fini)** Soit $K$ un corps de nombres. On rappelle que l'on a un morphisme de groupes entres les idèles de $K$ et les idéaux fractionnaires de $K$ :

$$\varphi : \mathbb{I}_K \to \mathrm{Div}(\mathcal{O}_K), \quad x = (x_v) \mapsto \prod_{v \nmid \infty} \mathfrak{p}_v^{\mathrm{val}(x_v)}.$$

Montrer que si l'on munit $\mathrm{Div}(\mathcal{O}_K)$ de la topologie discrète, ce morphisme est continu et que $\varphi_{|\mathbb{I}_K^1}$ est surjectif. En déduire la finitude du groupe des classes $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$.

**Exercice 5 ($\mathbb{I}_K^1/K^*$ compact $\Rightarrow$ Théorème des unités)** Soient $K$ un corps de nombres et $S$ un ensemble fini de places, contenant les places à l'infini. On note

$$H_S = \{x \in K \mid \ \forall v \notin S \ \ |x|_v = 1\}$$

le *groupe des $S$-unités*.

1. Vérifier que $H_S$ est un sous-groupe de $K^*$.
2. Soient $0 < c \leq C < +\infty$. Montrer que l'ensemble des $S$-unités $x$ vérifiant $c \leq |x|_v \leq C$ pour tout $v \in S$ est fini.
3. Notons $\mu_\infty(K)$ le groupe des racines de l'unités dans $K$. Déduire de la question précédente que si $x \in K$, on a

$$|x|_v = 1 \ \ \forall v \iff x \in \mu_\infty(K).$$

4. On suppose désormais que $S = S_\infty$ est l'ensemble des places archimédiennes de $K$. On note $J_S = \{x \in \mathbb{I}_K \mid \ \forall v \notin S \ |x_v|_v = 1\}$ et on pose $J_S^1 = J_S \cap \mathbb{I}_K^1$. On introduit également le plongement logarithmique

$$\lambda : J_S \to (\mathbb{R})^s, \quad \alpha \mapsto (\log |\alpha_i|_i)_{1 \leq i \leq s} \quad \text{avec } s = \mathrm{Card}(S).$$

   Montrer que $\lambda$ est surjective, continue. Montrer que $\ker(\lambda_{|H_S})$ est cyclique et que $\lambda(H_S)$ est discret.
5. Considérant $\lambda(J_S^1)$ montrer que $\lambda(H_S)$ est libre de rang $s - 1$.