Variétés abéliennes et Jacobiennes

Exposé au séminaire des doctorants en théorie des nombres de Chevaleret

Nicolas Ratazzi

16 avril 2002

Résumé : Dans cet exposé on introduit la notion de variété abélienne sur un corps, d'isogénie et de polarisation. On donne également une définition de la variété Jacobienne et on explique en introduisant les foncteurs $\mathfrak{M}_g$ et $\mathcal{A}_g$ qu'il existe des variétés abéliennes qui ne sont pas des Jacobiennes. Enfin en utilisant ces divers objets on explique comment la conjecture de Mordell se déduit de celle de Schafarevitch.

Table des matières

Soit K un corps. Dans toute la suite, on appellera *variété sur* K tout schéma X/K, de type fini, géométriquement intègre. Si X/K est une variété sur K, et si L est une extension de K, on notera X_L la variété sur L déduite de X par extension des scalaires.

1 Variétés abéliennes

Les références générales concernant les variétés abéliennes sont [HS00], [Mil86a] et [Mum75].

1.1 Cas général

Définition 1.1 On dit que A/K est *une variété abélienne sur* K si A est un K-schéma en groupes qui est une variété propre et lisse sur K.

Proposition 1.1 *Si A/K est un K-schéma en groupes de type fini connexe propre et lisse, alors A est géométriquement intègre et pour toute extension L/K, A_L est une variété abélienne sur L.*

Démonstration : Le schéma A est lisse sur K donc régulier. Il est en particulier localement intègre. De plus, localement intègre et connexe entraine intègre. Il reste à voir que A reste irréductible par extension des scalaires à la clôture algébrique. Soit L/K une extension de corps. Le fait d'être propre et lisse est stable par changement de base, donc A_L est un L-schéma en groupes propre et lisse sur L. De plus A_L est connexe (c'est vrai mais non classique, cf. [Gab63] prop 2.2.1). La première partie du raisonnement entraîne que A_L est intègre. En appliquant ceci à $L = \overline{K}$, on en déduit que A est géométriquement irréductible, et en prenant $L_1 = \overline{L}$ on en déduit la même chose pour A_L. Donc pour toute extension L/K, A_L est une variété abélienne sur L. □

Remarque 1.1 Une variété abélienne est un schéma en groupes qui est toujours commutatif (ce qui est rassurant au vu du nom !). De plus la proposition 1.1 nous dit qu'au lieu de supposer A géométriquement irréductible, on peut se contenter de supposer A connexe. L'intrêt étant qu'il est plus facile de vérifier qu'un objet est connexe plutôt que géométriquement intègre. Ceci est réellement intéressant et je le prouve :

Proposition 1.2 *Soient A et B deux variétés abéliennes sur un corps K parfait et $\varphi : A \to B$ un morphisme. Alors le K-schéma $(\mathrm{Ker}\ \varphi)^0$ est une sous-variété abélienne de A/K.*

Démonstration : Par définition, $(\mathrm{Ker}\ \varphi)^0$ est un sous-K-schéma en groupes connexe de A/K. Il est de plus de type fini et propre sur K (une immersion fermée est propre et la composée de deux morphismes propres est encore propre). De plus, par un résultat de Cartier (cf. [Sha86] p.44 pour un énoncé et une preuve) le schéma $(\mathrm{Ker}\ \varphi)^0$ est réduit donc le raisonnement de la remarque qui suit nous permet de conclure. □

Remarque 1.2 On sait que tout K-schéma de type fini, réduit et séparé admet un ouvert non vide de points réguliers. Si ce schéma est un K-schéma en groupes, alors par translation on en déduit qu'il est régulier et donc, si K est un corps parfait, lisse sur K. Finalement, dans le cas d'un corps parfait, une définition possible d'une variété abélienne est : K-schéma en groupes de type fini, propre sur K, réduit et connexe.

On conclut cette section par le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.1 *Toute variété abélienne est projective.*

Démonstration : Cf. par exemple [Mil86a] Theorem 7.1. □

On indique un corollaire qui est tout aussi fondamental, il permet par exemple de fabriquer les hauteurs de Néron-Tate.

Corollaire 1.1 *Toute variété abélienne admet un diviseur symétrique ample.*

Démonstration : Le théorème 1.1 précédent nous indique l'existence d'un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$. La multiplication par $[-1]$ est un isomorphisme, donc $[-1]^*\mathcal{L}$ est ample et donc, la somme de deux diviseurs ample étant ample, $\mathcal{L} \otimes [-1]^*\mathcal{L}$ est ample et symétrique. □

1.2 Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$

On peut montrer que si A est une variété abélienne sur $\mathbb{C}$, alors l'ensemble de ses points complexes $A(\mathbb{C})$ est un tore complexe.

Esquisse de preuve : par définition $A(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie complexe, connexe et compact (car projectif). On note T un tel groupe de Lie. Soit V l'espace tangent de T à l'origine. L'application exponentielle

$$\exp : V \to T$$

est surjective de noyau un groupe discret Λ. Ainsi, T est isomorphe à V/Λ. C'est donc un tore complexe.

La question naturelle est dès lors : est-ce-que la réciproque est vraie, *i.e.*, est-ce que tout tore complexe est l'ensemble des points complexes d'une variété abélienne complexe ? En dimension 1, la réponse est affirmative : c'est la théorie des courbes elliptiques.

Esquisse de preuve : soit $E(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe de dimension 1 (une surface de Riemann dirait un géomètre différentiel). En notant $\mathcal{M}(E)$ le corps des fonctions méromorphes sur $E(\mathbb{C})$, un théorème classique d'analyse nous dit que $\mathcal{M}(E)$ est engendré par la fonction de Weierstrass $\wp(.,\Lambda)$ et sa dérivée $\wp'(.,\Lambda)$. De plus ces deux fonctions sont reliées par l'équation

$$\wp' = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad \text{où } g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

L'application $z \mapsto [1 : \wp(z,\Lambda) : \wp'(z,\Lambda)]$ donne un plongement de E dans $\mathbb{P}^2$, ce qui conclut.

En dimension supérieure c'est plus subtil. Pour traiter le cas de la dimension supérieure, on rappelle la notion de *forme hermitienne* H sur un espace vectoriel V de dimension finie. C'est une forme linéaire à gauche qui vérifie

$$\forall u, v \in V \quad H(u,v) = \overline{H(v,u)}.$$

On écrit $H = S + iE$, où S, et E sont des formes réelles bilinéaires, symétrique pour S, et antisymétrique pour E. Pour tout $u, v \in V$, on a $S(u, v) = E(iu, v)$.

Définition 1.2 Soit $T = V/\Lambda$ un tore complexe. Une *forme de Riemann* sur T est une forme hermitienne H sur V telle que $E = \mathrm{Im}(H)$ prend des valeurs entières (dans $\mathbb{Z}$) sur Λ. Si de plus $H(u, u) \geq 0$ pour tout $u \in V$, on dit que H est une *forme de Riemann positive.* Si H est définie positive, on dit que H est une *forme de Riemann non-dégénérée* sur T.

On peut maintenant énoncer le théorème caractérisant (les ensembles de points complexes de) variétés abéliennes parmi les tores complexes.

Théorème 1.2 *Un tore complexe T est la variété des points complexes d'une variété abélienne si et seulement si T possède une forme de Riemann non-dégénérée.*

Démonstration : C'est une conséquence d'un théorème de Lefchetz. Cf. par exemple [Deb99] Théorème 3.5 p. 68 $\square$

On peut montrer que dès que la dimension d est strictement supérieure à 1, il existe des tores complexes qui ne sont pas des ensembles de points complexes de variétés abéliennes. Pour cela, on commence par noter que si $T = A(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{M}(T) \simeq \mathcal{R}(A)$ où $\mathcal{R}(A)$ est le corps des fonctions rationelles sur A. Notamment, c'est un corps de degré de transcendance d sur $\mathbb{C}$. À titre d'exemple on va expliciter un tore complexe de dimension $d = 2$ et de corps de fonctions méromorphes de degré 1 sur $\mathbb{C}$.

$$\text{Posons } \Omega = \begin{pmatrix} \alpha + i & \beta & 1 & 0 \\ \gamma & \delta + i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont des réels algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On peut alors montrer que le tore $T = \mathbb{C}^2 / < \Omega >$ est tel que $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}$ (cf [Ros86] p. 99).

2 Isogénies et polarisations

2.1 Isogénies

Soit K. Dans ce qui suit, si on ne précise pas, on considère toujours des variétés abéliennes sur K.

Définition 2.1 Soient A et B deux variétés abéliennes, et f un morphisme entre A et B. On dit que f est *une isogénie* si f est surjectif et de noyau fini.

Lemme 2.1 (théorème sur la dimension des fibres) *Soient K un corps et $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre variétés sur K. Il existe un ouvert non-vide U de Y tel que*

$$\forall y \in U \quad \dim\, f^{-1}(y) = \dim\, X - \dim\, Y.$$

Démonstration : Cf. [Har77] Exercise II 3.22., ou [Mum99] Corollary 1. p.50. $\square$

Proposition 2.1 *Soit $f : A \to B$ un morphisme de variétés abéliennes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f est une isogénie.
2. $\dim A = \dim B$ *et f est surjective.*
3. $\dim A = \dim B$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$ *est fini.*

Démonstration : On utilise le théorème sur la dimension des fibres :

1.$\Rightarrow$ 2. : f est surjectif et $\dim A - \dim B = \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$.

2.$\Rightarrow$ 3. : $\dim A = \dim B$ et par sujectivité de f, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 0, donc fini.

3.$\Rightarrow$ 1. : l'image continue d'un ensemble irréductible est encore irréductible, donc $f(A)$ est irréductible. Or $\dim f(A) = \dim A = \dim B$, donc $f(A) = B$. $\square$

Définition 2.2 On définit le *degré d'une isogénie* comme étant le cardinal de son noyau.

2.2 Polarisations

Soit A une variété abélienne sur un corps K. On note Pic(A) le groupe de Picard de A, *i.e.*, le groupe des diviseurs de A à équivalence linéaire près, ou encore, le groupe des faisceaux inversibles à isomorphisme près. On note t_a l'opérateur de translation par a sur A. Si on se fixe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ alors l'application

$$\varphi_{\mathcal{L}} \ : \ A(K) \to \mathrm{Pic}(A), \qquad a \mapsto t_a^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

est un morphisme de groupe (ceci n'est pas trivial, c'est le théorème du carré qui le dit).

Définition 2.3 Soit A/K une variété abélienne. On définit $\mathrm{Pic}^0(A)$ comme étant le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(A)$ constitué des classes de diviseurs invariants par translation :

$$\mathrm{Pic}^0(A) = \left\{ \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A) \ / \ \forall a \in A(\overline{K}) \ \ t_a^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \right\}.$$

Remarque 2.1 Si A/K est une courbe elliptique, on peut vérifier que $\mathrm{Pic}^0(A)$ est le groupe des diviseurs de degré 0. Dans le cas général ce n'est plus vrai, il s'agit du groupe des diviseurs algébriquement équivalents à zéro.

Remarque 2.2 Il existe une variété abélienne sur K, appelée *variété abélienne duale de* A, et notée $\widehat{A}$, telle que pour tout corps L, $\widehat{A}(L) = \mathrm{Pic}^0(A_L)$. Rigoureusement on a la définition et le théorème suivant :

Définition 2.4 Soit A/K une variété abélienne. Une variété abélienne $\widehat{A}$ est la *variété duale* de A, s'il existe un faisceau inversible $\mathcal{P}$ (le *fibré de Poincaré*) sur $A \times \widehat{A}$ vérifiant :

(i) $\mathcal{P}|_{\{0\}\times\widehat{A}}$ est trivial et pour tout $a \in \widehat{A}$, le faisceau $\mathcal{P}|_{A\times\{a\}}$ appartient à $\mathrm{Pic}^0(A_{K(a)})$.

(ii) Pour tout k-schéma T, et pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $A \times T$ vérifiant la propriété (i), il existe un unique morphisme

$$f \ : \ T \to \widehat{A} \ \text{ tel que } \quad (1 \times f)^* \mathcal{P} \simeq \mathcal{L}.$$

Théorème 2.1 *La variété abélienne duale, munie du faisceau de Poincaré, existe et est unique à unique isomorphisme près.*

Définition 2.5 Une *polarisation* λ sur une variété abélienne A/K, est une isogénie $A \to \widehat{A}$ telle qu'il existe un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $A_{\overline{K}}$ tel que $\lambda_{\overline{K}} = \varphi_{\mathcal{L}}$. Le *degré d'une polarisation* est son degré en tant qu'isogénie. Si la polarisation est de degré 1, on dit que c'est une *polarisation principale*.

On peut se demander quel est le lien entre le degré d'une polarisation λ et le degré du diviseur ample $\mathcal{L}$ associé. La réponse est fournie par le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch pour les fibrés en droites. Dans le cas des variétés abéliennes, ce théorème prend une expression particulièrement agréable.

Théorème 2.2 *Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur une variété abélienne A/K de dimension g et D le diviseur associé à $\mathcal{L}$. On note $\chi(\mathcal{L})$ la caractéristique d'Euler-Poincaré.*

1. $\deg \varphi_{\mathcal{L}} = \chi(\mathcal{L})^2$.
2. *(Riemann-Roch-Hirzebruch)* $\chi(\mathcal{L}) = \frac{\deg D}{g!}$.

Démonstration : Cf le paragraphe 16 p.150 de [Mum75]. □

On déduit notamment de ceci que se donner une polarisation principale sur une variété abélienne A/K de dimension g équivaut à se donner un diviseur ample sur $A_{\overline{K}}$ de degré $g!$.

3 Jacobiennes

On va maintenant définir la jacobienne d'une courbe projective lisse C sur un corps K. Une référence pour ce paragraphe est l'article de Milne [Mil86b]. On voudrait définir une variété abélienne J/K, appelée variété Jacobienne de C, telle que $J(K) = \mathrm{Pic}^0(C_K)$. Malheureusement ceci n'est pas toujours possible. Toutefois cela marche toujours dès que $C(K)$ est non vide, ce qui est souvent le cas en arithmétique (penser par exemple à la conjecture de Mordell). Rigoureusement on va définir la Jacobienne comme étant la variété abélienne représentant le foncteur $\mathrm{Pic}^0_{C/K}$ que l'on définit maintenant (on rappelle la notion de représentabilité dans la section suivante) :

$$\text{Pour toute variété lisse } T/K\text{, on pose } \ \mathrm{Pic}^0_{C/K}(T) = \mathrm{Pic}^0\left(C \times T\right)/\mathrm{pr}_2^*\mathrm{Pic}^0(T).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Si la courbe C/K admet un point K-rationnel, alors, le foncteur* $\mathrm{Pic}^0_{C/K}$ *est représentable par une variété abélienne* $\mathrm{Jac(C)}/K$*. Si C est de genre g, alors* $\mathrm{Jac(C)}$ *est de dimension g.*

Définition 3.1 La variété Jac(C) du théorème précédent est appelée *variété Jacobienne de C.*

Remarque 3.1 Contrairement à ce qui se passe en dimension supérieure (où l'on remplace la courbe C/K par une variété V/K, et la Jacobienne par la variété d'Albanese), la variété Jacobienne existe toujours, même quand $C(K)$ est vide, mais la définition est moins belle...

Remarque 3.2 Si L est une extension de K, on a par définition de $\mathrm{Pic}^0_{C/K}$,

$$\mathrm{Jac}(C)(L) = \mathrm{Pic}^0(C_L).$$

Si la courbe C/K admet un point K-rationnel P_0, on peut définir un plongement (une immersion fermée en fait) j de C dans sa Jacobienne Jac(C). On appelle ce morphisme le *plongement jacobien de C dans* Jac(C). Il est définit de manière unique (dépendant évidemment de P_0) par une propriété universelle que je ne donnerai pas mais que le lecteur intéressé peut trouver dans [Mil86b] p.168-171. La chose importante à savoir concernant ce morphisme est la suivante : au niveau des points K-rationnels, j donne un morphisme

$$j(K) \ : \ C(K) \to \mathrm{Jac}(C)(K), \quad \text{défini par} \quad Q \mapsto [Q - P_0].$$

On donne une dernière propriété indiquant que les variétés Jacobiennes sont naturellement munies d'une structure de variétés abéliennes principalement polarisées.

Proposition 3.1 *On suppose comme précédemment que C admet un point K-rationnel P_0, et on note Θ le diviseur $j(C)^{g-1}$. Alors, Θ est un diviseur ample sur* $\mathrm{Jac}(C)_{\overline{K}}$*, de degré $g!$.*

4 Les espaces de modules $\mathfrak{M}_g$ et $\mathcal{A}_g$

Plutôt que de regarder les variétés abéliennes séparément, il peut être intéréssant de regarder la collection de toutes les variété abéliennes de dimension g en même temps, éventuellement avec certaines structures rigidificatrices suplémentaires, telles qu'un choix de polarisation ou des strucures de niveau. Par exemple dans le cas des courbes elliptiques on construit ainsi les courbes $X(1)$, $X_0(N)$, $X_1(N)$, ... C'est également en introduisant ce type de considérations que Faltings a pu le premier prouver la conjecture de Mordell.

4.1 Espaces de modules, définition

On note **Schémas** la catégorie des schémas localement noethériens, et **Ens** la catégorie des ensembles. Étant donné un foncteur contravariant

$$F \ : \ \textbf{Schémas} \ \to \textbf{Ens} \ ,$$

une question naturelle est *sa représentabilité* dans la catégorie **Schémas** .

Définition 4.1 Un foncteur $\mathcal{A}$ est dit représentable s'il existe un schéma A tel que $\mathcal{A} \simeq h_A$ où h_A est le foncteur point défini par

$$\forall S \in \textbf{Schémas} \ , \quad h_A(S) = \mathrm{Mor}(S, A).$$

Définition 4.2 Si $\mathcal{A}$ est représentable par un schéma A. On dit que A est *l'espace de module fin* de $\mathcal{A}$.

Malheureusement la plupart des foncteurs contravariants intéressants ne sont pas représentables (au moins dans la catégorie des schémas). C'est par exemple le cas de $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{M}_g$ définis un peu plus loin. Pour pallier ce problème, on introduit la notion d'espace de module grossier.

Définition 4.3 Soit $\mathcal{A}$: **Schémas** $\to$ **Ens** un foncteur contravariant. Un schéma A est appelé *espace de module grossier* pour $\mathcal{A}$ s'il existe une transformation naturelle (*i.e.* un morphisme de foncteurs) $F : \mathcal{A} \to h_A$ telle que

1. Pour tout $X \in$ **Schémas** et pour toute transformation naturelle G, il existe un unique morphisme $g \ : \ A \to X$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & h_X . \\ h_A \arrow[ur, "h_g"'] & \end{tikzcd}$$

2. Pour tout corps algébriquement clos K, $F(\mathrm{Spec}\ K) \ : \ \mathcal{A}(K) \to A(K)$ est une bijection.

4.2 Les espaces $\mathfrak{M}_g$ et $\mathcal{A}_g$

Bien que les seuls objets qui nous concernent réellement dans la suite soient $\mathfrak{M}_g(K)$ et $\mathcal{A}_g(K)$, pour définir rigoureusement les espaces $\mathfrak{M}_g$ et $\mathcal{A}_g$ on est obligé de généraliser la notion de variété abélienne sur un corps en une notion plus relative :

Définition 4.4 Soient $S \in$ **Schémas** et A/S un schéma. On dit que A/S est un *schéma abélien* si c'est un S-schéma en groupes propre et lisse à fibres géométriques connexes.

Remarque 4.1 Un tel schéma abélien n'est pas nécessairement projectif.

Il nous faut également étendre la notion de polarisation sur un schéma abélien.

Définition 4.5 On dit que λ est une *polarisation* du schéma abélien A/S si λ est un S-morphisme de A/S vers $\widehat{A}/S$ (le schéma abélien dual qui existe toujours) tel que pour tout point $s \in S$, le morphisme indui sur les fibres $\lambda_s : A_s \to \widehat{A}_s$ est une polarisation de variétés abéliennes sur $k(s)$. Si λ est un isomorphisme on dit que c'est une *polarisation principale.*

Définition 4.6 On définit le foncteur des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g par :

$$\forall S \in \textbf{Schémas}, \mathcal{A}_g(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphismes de schémas abéliens principa-} \\ \text{lement polarisés} \quad f : A \to S, \quad \text{de dimension relative } g \end{array} \right\},$$

où $(A, D_A) \simeq (B, D_B)$ (isomorphisme de variété abélienne principalement polarisée) signifie

$$\exists \ \ \varphi \ : \ A \to B, \ \ S\text{-isomorphisme tel que } \varphi(D_A) = D_B.$$

On définit de même le foncteur $\mathfrak{M}_g$ des classes d'isomorphismes de courbes projectives lisses de genre g.

Théorème 4.1 *Les foncteurs $\mathfrak{M}_g$ et $\mathcal{A}_g$ sont des problèmes de modules, d'espaces de modules grossiers respectivement M_g et A_g. Les schémas M_g et A_g sont des variétés quasi-projectives sur* Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ *pour tout nombre premier p, de dimensions relatives respectives $3g-3$ et $\frac{1}{2}g(g+1)$.*

Démonstration : Il y a essentiellement deux preuves de ceci. La première approche consiste à recourir aux champs algébriques. C'est l'approche adoptée par Artin dans [Art69] et [Art70]. La seconde approche (la première historiquement) repose sur la théorie des invariants géométrique de Mumford [Mum65]. La preuve du théorème est d'ailleurs l'un des résultats principaux de ce livre. La quasi-projectivité de M_g et A_g est un sous-produit de l'existence de ces espaces de modules. □

5 Variétés abéliennes vs. Jacobiennes

Soit K un corps. On supposera désormais toujours que les courbes C/K considérées admettent un point K-rationnel.

On peut définir un morphisme

$$t_g(K) \ : \ \mathfrak{M}_g(K) \to \mathcal{A}_g(K)$$

en posant $t_g(K)(C) = (\mathrm{Jac}(C), \Theta)$. Les questions naturelles sont alors l'injectivité et la surjectivité de ce morphisme. On commence par la question de la surjectivité.

Théorème 5.1 *Si K est algébriquement clos, le morphisme $t_g(K)$ n'est pas surjectif pour $g \geq 4$. Autrement dit, il existe des variétés abéliennes (principalement polarisées) qui ne sont pas des Jacobiennes de courbes.*

Démonstration : On utilise les résultats concernant la dimension des espaces M_g et A_g, et le fait que $\mathfrak{M}_g(K) = M_g(K)$ et $\mathcal{A}_g(K) = A_g(K)$:

$$\dim A_g = \frac{g(g+1)}{2}, \text{ et, } \dim M_g = 3g - 3.$$

Ainsi dès que g est supérieur (ou égal) à 4 on peut conclure. □

Problème de Schottky. Caractériser l'image de l'adhérence de $\mathfrak{M}_g(K)$ par $t_g(K)$.

Enfin on donne un dernier résultat concernant la surjectivité et le lien variété abélienne - Jacobienne :

Théorème 5.2 *Si A est une variété abélienne sur un corps infini K, alors, il existe une variété Jacobienne J et un morphisme surjectif $J \twoheadrightarrow A$.*

On peut maintenant passer à la question de l'injectivité de l'application $t_g(K)$. Cette fois, la réponse est positive, du moins dans certains cas : c'est le théorème de Torelli. On l'admettra pour les corps algébriquement clos.

Théorème 5.3 (Torelli) *Si K est un corps algébriquement clos, alors le morphisme $t_g(K)$ est injectif. Plus précisément, soient C et C' deux courbes projectives lisses sur K, et j_C et $j_{C'}$ les plongements jacobiens associés, définis par les points P et P' respectivement. Soit φ un isomorphisme de $(\mathrm{Jac}(C), \Theta_C)$ sur $(\mathrm{Jac}(C'), \Theta_{C'})$. Alors,*

1. Il existe $c \in \mathrm{Jac}(C')(K)$ et un isomorphisme $\alpha : C \to C'$ tel que $j_{C'} \circ \alpha = \pm\varphi \circ j_C + c$.

2. On suppose de plus que C est de genre $g \geq 2$. Si C n'est pas hyperelliptique, alors α, c et le signe $\pm$ sont uniquement déterminés par φ, P et P'. Si C est hyperelliptique, α et c sont uniquement déterminés, et le signe peut être choisi arbitrairement.

Corollaire 5.1 *Si K est un corps parfait (notamment si K est de caractéristique 0), et si $g \geq 2$, alors $t_g(K)$ est injectif.*

Démonstration : Soit $\varphi : (\mathrm{Jac}(C), \Theta_C) \to (\mathrm{Jac}(C'), \Theta_{C'})$ un isomorphisme de K-variétés abéliennes principalement polarisées, défini sur K. D'après le théorème de Torelli, pour tout choix de points P et P' dans $C(\overline{K})$, respectivement $C'(\overline{K})$, il existe un unique isomorphisme $\alpha : C \to C$ tel que

$$j_{C',P'} \circ \alpha = \pm\varphi \circ j_{C,P} + c.$$

Dans le cas hyperelliptique on choisit + pour le signe indéterminé. Notons que si, au lieu du couple (P, P') on avait choisi le couple (Q, Q'), alors, $j_{C,P} = j_{C,Q} + x$ avec $x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$, et de même pour P' et Q'. Ainsi,

$$j_{C',Q'} \circ \alpha = j_{C',P'} \circ \alpha + x' = \pm\varphi \circ j_{C,P} + c + x' = \pm\varphi \circ j_{C,Q} \mp \varphi(x) + c + x'.$$

On en déduit en particulier que α est indépendant du choix du couple (P, P'). On applique alors $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ à l'équation précédente. On obtient

$$\sigma j_{C',P'} \circ \sigma\alpha = \pm\varphi \circ \sigma j_{C,P} + \sigma c.$$

Or par définition des morphismes $j_{C,P}$, on a $\sigma j_{C,P} = j_{C,\sigma P}$. L'indépendance de α nous donne donc $\sigma\alpha = \alpha$, i.e., α est défini sur K. Donc C et C' sont isomorphes sur K, ce qui conclut. □

6 Autour de la conjecture de Mordell

Théorème 6.1 Conjecture de Mordell, Théorème de Faltings) *Soit C est une courbe de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K, alors l'ensemble $C(K)$ est fini.*

On peut étendre la construction des Jacobiennes au cas des courbes projectives lisses relatives C/S sur une base localement noetherienne : on obtient ainsi le schéma Jacobien $\mathcal{J}ac(C)/S$. Il s'agit d'un schéma abélien, et la construction commute au chagement de base : $\mathcal{J}ac(C) \times_S T \simeq \mathcal{J}ac(C \times_S T)$.

En utilisant ce qu'on a vu sur les Jacobiennes et en utilisant le théorème de Torelli, on va maintenant montrer une des étapes de la preuve de la conjecture de Mordell pour les courbes de genre $g \geq 2$ (en fait il s'agit de ce que l'on savait faire avant Faltings). On commence par un corollaire du théorème de Torelli.

Corollaire 6.1 *Soit K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K. On note $\mathfrak{M}_{g,S}(K)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de K-courbes ayant bonne réduction en dehors de S, et de même pour $\mathcal{A}_{g,S}(K)$. Le morphisme $t_g(K)$ définit une injection de $\mathfrak{M}_{g,S}(K)$ dans $\mathcal{A}_{g,S}(K)$ dès que $g \geq 2$.*

Démonstration : La seule chose à voir est le fait que si C a bonne réduction en dehors de S, alors il en est de même de $\mathrm{Jac}(C)$. Le reste découle du corollaire précédent 5.1. Soit donc $\mathfrak{p}$ un premier de K où C admet bonne réduction, et soit $\mathcal{C}/\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ un modèle propre et lisse de C/K (un tel modèle existe par définition de la bonne réduction), où $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ est le localisé en $\mathfrak{p}$ de l'anneau des entiers de K. On a

$$\mathcal{J}\mathrm{ac}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}} \mathrm{Spec}\ K \simeq \mathrm{Jac}(C) \text{ et } \mathcal{J}\mathrm{ac}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}} \mathrm{Spec}\ k(\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Jac}(C \times_K k(\mathfrak{p})).$$

Ainsi $\mathcal{J}\mathrm{ac}(\mathcal{C})$ est un modèle de $\mathrm{Jac}(C)$ sur $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ dont la réduction modulo $\mathfrak{p}$ est une variété abélienne. Ceci dit en particulier que $\mathrm{Jac}(C)$ à bonne réduction en $\mathfrak{p}$. $\square$

On rappelle maintenant la conjecture de Shafarevitch.

Conjecture 6.1 (Shafarevitch) *Soient K un corps de nombres, $g \geq 2$ un entier et S un ensemble fini de places de K. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de courbes projectives lisses de genre g sur K et ayant bonne réduction en dehors de S.*

On va montrer que "Shafarevitch $\Rightarrow$ Mordell". Pour cela on utilise la construction de Kodaira-Parshin : c'est le lemme suivant.

Lemme 6.1 (Kodaira-Parshin) *Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de premier de K contenant les premiers au dessus de 2. Pour toute courbe propre et lisse C/K, de genre $g \geq 1$, ayant bonne réduction en dehors de S, il existe une extension finie L/K vérifiant : pour tout $P \in C(K)$, il existe une courbe C_P/L et un morphisme fini $\varphi_P \ : \ C_P \to C_L$ tels que :*

1. *la courbe C_P a bonne réduction en dehors des places au dessus de S.*
2. *le degré de C_P est borné.*
3. *le morphisme φ_P est ramifié précisément en P.*

Théorème 6.2 *La conjecture de Shafarevitch entraîne la conjecture de Mordell.*

Démonstration : Soit C une courbe de genre $g \geq 2$ ayant bonne réduction en dehors de l'ensemble S des premiers au dessus de 2. Il existe, par Hermite-Minkowski, une extension finie L/K contenant toutes les extensions K'/L de degré inférieur à 2^{2g} et non ramifiées en dehors de S. Soit alors un point K-rationnel de C. Le lemme 6.1 précédent nous donne une application $\varphi_P : C_P \to C_K$ de degré inférieur à une constante $B(g)$ et ramifiée exactement en P. De plus C_P a bonne réduction en dehors de S. On applique alors la formule d'Hurwitz à φ_P :

$$2g\,(C_P) - 2 \leq B(g)(2g-2) + B(g) - 1.$$

La conjecture de Shafarevitch nous indique alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de courbes C_P. Un théorème de classique de De Franchis nous indique que pour chaque C_P, il n'y a qu'un nombre fini de morphismes $C_P \to C$ (c'est là qu'on utilise que $g \geq 2$). De plus la propriété de non-ramification du lemme de Kodaira-Parhsin nous indique que P est déterminé de manière unique par le couple (C_P, φ_P). Ceci nous permet de conclure. $\square$

Corollaire 6.2 *Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K et g un entier supérieur à 2. On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g et ayant bonne réduction en dehors de S. Dans ce cas la conjecture de Mordell est vraie.*

Démonstration : C'est un conséquence immédiate du théorème 6.2 précédent, et du corollaire 6.1. $\square$

Le travail de Faltings sur la conjecture de Mordell a été de montrer que l'hypothèse du corollaire est en fait toujours vérifiée. C'est cette partie de la preuve de Mordell-Faltings qui est réellement difficile.

Références

[Art69] M. Artin. *Algebrization of formal moduli I, in* Global Analysis (in honor of K. Kodaira). Princeton Univ. Press. Princeton, 1969.

[Art70] M. Artin. Algebrization of formal moduli II. In *Ann. Math.*, volume 91, pages 88–135, 1970.

[Deb99] O. Debarre. *Tores et variétés abéliennes complexes*, volume 6 of *Cours spécialisés*. SMF et EDP Sciences, 1999.

[Gab63] P. Gabriel. *Généralités sur les groupes algébriques, Schémas en groupes (SGA, Fasc. 2a, Exposé 6a).* Springer, 1963.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[HS00] M. Hindry and J. Silvermann. *Diophantine Geometry : An introduction.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

[Mil86a] J. S. Milne. Abelian varieties. In G. Cornell J. H. Silverman, editor, *Arithmetic Geometry*, pages 103–150. Springer, 1986.

[Mil86b] J. S. Milne. Jacobian varieties. In G. Cornell J. H. Silverman, editor, *Arithmetic Geometry*, pages 167–212. Springer, 1986.

[Mum65] D. Mumford. *Geometric Invariant Theory.* Springer, 1965.

[Mum75] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford U. Press, 1975.

[Mum99] D. Mumford. *The* Red B*ook of* V*arieties and* S*chemes*, volume 1358, Second, Expanded Edition of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1999.

[Ros86] M. Rosen. Abelian varieties over $\mathbb{C}$. In G. Cornell J. H. Silverman, editor, *Arithmetic Geometry*, pages 79–101. Springer, 1986.

[Sha86] S. S. Shatz. Group schemes, formal groups, and p-divisible groups. In G. Cornell J. H. Silverman, editor, *Arithmetic Geometry*, pages 29–78. Springer, 1986.