TD FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE, PARTIE 2

EXERCICE 3'

b) • *Premier cas* : $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') > 0$. Dans ce cas, $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$ est un trinô
conservant un signe constant, son discriminant est donc négatif ou nul :

$$[f'(x)]^2 - 2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')f(x) \leqslant 0$$

ou

$$(1) \qquad |f'(x)| \leqslant \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x)}.$$

• *Deuxième cas* : $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') = 0$.

La fonction f est alors affine et positive sur $\mathbb{R}$. Il existe $b \geqslant 0$ tel que $f(x) = b$ pour
de $\mathbb{R}$. Alors, $f' = 0$ et l'inégalité (1) est encore vraie.

2° *a)* On sait que la fonction $u \to \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc
continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) > 0$. On a en un tel point $g'(x) = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

b) 1. Évident.

2. Supposons $f''(x_0) < 0$. Puisque f est C^2, il existe $\alpha > 0$ tel que $f''(x) < 0$ sur $]x_0 - \alpha,$
On a alors le tableau suivant :

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Ainsi, f prendrait des valeurs strictement négatives sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus\{x_0\}$.

3. La formule de Taylor Lagrange entre x et x_0 donne l'existence de c compris entre x
tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x)}{x - x_0} = \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\sqrt{\frac{f''(c)}{2}},$$

donc g a une dérivée à gauche et à droite distinctes lorsque $f''(x_0) > 0$:

$$g'_g(x_0) = -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}\,; \qquad g'_d(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}\,;$$

ainsi g n'est pas dérivable en x_0.

Par contre, si $f''(x_0) = 0$, g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = 0$.

c) 1. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à f' entre x et x_0 :

$$f'(x) = f'(x) - f'(x_0) = (x - x_0)f''(c)$$

où c est compris entre x et x_0, d'où

$$|f(x)| \leqslant rM_r(f'') \qquad \text{lorsque} \qquad x \in I_r.$$

2. Supposons donc $2M_r(f'').f(x) < [f'(x)]^2$. Le trinome $\tau(\lambda)$ admet alors deux racin
distinctes λ_1 et λ_2. On a

$$\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = -\frac{f'(x)}{M_r(f'')},$$

d'où

$$|\mu| \leqslant \frac{|f'(x)|}{M_r(f'')} \leqslant r \quad \text{(d'après 1.).}$$

Par suite, $x + \mu \in I_{2r}$ et

$$f(x + \mu) = f(x) + \mu f'(x) + \frac{\mu^2}{2} f''(x + \theta\mu) \leqslant \tau(\mu) < 0.$$

Ceci est absurde, donc $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_r(f'').f(x)}$ pour tout $x \in I_r$. Remarquons que cette inégalité vaut encore si $M_r(f'') = 0$ (car dans ce cas $f(x) = b \geqslant 0$ sur I_{2r}).

d) On sait déjà que g est dérivable en tout point. Il reste à prouver la continuité de g'. Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}$.

• *Premier cas :* $f(x_0) > 0$, alors $f(x) > 0$ sur tout un voisinage de x_0 et $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ sur ce voisinage : g' est continue en x_0.

• *Deuxième cas :* $f(x_0) = 0$. On a dans ce cas $g'(x_0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que $M_r(f'') \leqslant 2\varepsilon^2$. Soit $x \in I_r$:

– ou bien $f(x) > 0$, alors $|g'(x)| = \dfrac{|f'(x)|}{2\sqrt{f(x)}} \leqslant \varepsilon$, d'après l'inégalité précédente ;

– ou bien $f(x) = 0$, alors $|g'(x)| = 0 < \varepsilon$.

Donc, $x \in I_r$ implique $|g'(x)| \leqslant \varepsilon$, c'est ce qu'il fallait prouver.

II. 1° On a $(x, x + r) \in I^2$ ou $(x - r, x) \in I^2$. Supposons, par exemple que $(x, x + r) \in I^2$:

$$f(x + r) = f(x) + rf'(x) + \frac{r^2}{2} f''(x + \theta r)$$

$$f'(x) = \frac{1}{r}[f(x + r) - f(x)] - \frac{r}{2} f''(x + \theta r)$$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

Comme ceci vaut pour tout x de I,

(2) $$N_{\infty,I}(f') \leqslant \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

2° *a)* En appliquant ce qui précède à $x \in \mathbb{R}_+$, $I = [x, x + 2r]$, on trouve

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'') \leqslant \frac{2}{r} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f''),$$

d'où

(3) $$N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leqslant \frac{2}{r} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'').$$

b) • *Premier cas :* $N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'') \neq 0$. En choisissant $r = 2\sqrt{\dfrac{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f)}{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}}$ qui minimise le second membre de (3), on trouve

(4) $$N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leqslant 2\sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}.$$

• *Deuxième cas :* $N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'') = 0$. L'inégalité (4) est évidente.

3° *a)* Puisque f est solution C^2 de (E) sur $\mathbb{R}_+$, pour tout x de I,

$$f''(x) = -a(x)f'(x) - b(x)f(x)$$

$$|f''(x)| \leqslant AN_{\infty,I}(f') + BN_{\infty,I}(f)$$

$$N_{\infty,I}(f'') \leqslant AN_{\infty,I}(f') + BN_{\infty,I}(f),$$

Alors, sur tout intervalle I de longueur $2r$,

$$N_{\infty,I}(f') \leqslant \frac{\frac{2}{r} + \frac{Br}{2}}{1 - \frac{Ar}{2}} N_{\infty,I}(f) \leqslant \frac{\frac{2}{r} + \frac{Br}{2}}{1 - \frac{Ar}{2}} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f).$$

Comme le second membre de cette inégalité est indépendant de I, f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Il en résulte alors que f'' est également bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f''(x)| \leqslant AN_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') + BN_{\infty,\mathbb{R}_+}(f).$$

EXERCICE 5

1 On a $\left.\begin{array}{l} f'(a) = f'(b) = 0 \\ f' \in C^1([a,b]) \\ \text{Théorème de Rolle} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[\ / \ f''(c) = 0$

Supposons que $|f''(x)| \geqslant |f''(y)|$ et que $x > c$ (les autres cas se traitent de la même manière). On a : $\left|\frac{f''(x) - f''(y)}{2}\right| \leqslant \mathrm{Sup}(|f''(x)|, |f''(y)|) = |f''(x)|$

et

$$\left.\begin{array}{l} |f''(c)| = 0 \leqslant \left|\frac{f''(x) - f''(y)}{2}\right| \leqslant |f''(x)| \\ |f''(x)| \text{ est une fonction continue sur } [c,x] \\ \text{Théorème des valeurs intermédiaires} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in [c,x] \subset]a,b[\ / \ |f''(\xi)| = \left|\frac{f''(x) - f''(y)}{2}\right|$$

CQFD

. Avec la formule de Taylor Lagrange sur $[a,b]$, on obtient :

$\exists x_b \in]a,b[\ / \ f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(x_b)$ car $f'(a) = 0$

$\exists y_a \in]a,b[\ / \ f(a) = f(b) + \frac{(a-b)^2}{2} f''(y_a)$ car $f'(b) = 0$

donc

$$2(f(b) - f(a)) = \frac{(b-a)^2}{2}(f''(x_b) - f''(y_a)) \Rightarrow |f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{4} |f''(\xi)|$$

CQFD

2 Tout d'abord, on montre par l'absurde que :

$$\exists \xi_1 \in]a,b[\ / \ |f''(\xi_1)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

On suppose donc que : $\forall x \in]a,b[$ on a $|f''(x)| < \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$

alors :

$\forall t \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right]$:

$$|f'(t)| = |f'(t) - f'(a)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f'' \, C^0}}{=} \left| \int_a^t f''(x)\,dx \right| < 4\,|f(b)-f(a)| \frac{t-a}{(b-a)^2}$$

et

$\forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right[$

$$|f'(t)| = \left| \int_b^t f''(x)\,dx \right| \leq \int_t^b |f''(t)|\,dt < 4\,|f(b)-f(a)| \frac{b-t}{(b-a)^2}$$

Donc

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < 4 \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\,dt = 4 \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\underset{1}{=} \frac{1}{2} |f(b)-f(a)|$$

de même :

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \underset{2}{<} \frac{1}{2} |f(b)-f(a)|$$

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ + \\ 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(b)-f(a)| \leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < |f(b)-f(a)|$$

Donc

$$\exists \xi_1 \in]a, b[\; / \quad |f''(\xi_1)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b)-f(a)|$$

puisque f'' est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur f'' et sur l'intervalle $[c, \xi_1]$ (si $\xi_1 > c$) ou $[\xi_1, c]$ (si $\xi_1 < c$) et :

$$\exists \xi \in \begin{matrix} [\xi_1, c] \\ \text{ou } [c, \xi_1] \end{matrix} \; / \quad |f''(\xi)| = \frac{4}{(b-a)^2} \cdot |f(b)-f(a)|$$

$\longrightarrow$

③ Supposons que $|f''(x)| \underset{\circledast}{\leqslant} \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$ ③

<u>1er cas</u> : <u>$f(a)=f(b)$</u>, alors $\circledast \Rightarrow f''(x)=0$ sur $[a,b]$

$\Rightarrow f'(x) = \text{cste} = f'(a) = 0$

<u>2e cas</u> : <u>$f(a) \neq f(b)$</u> $\Rightarrow f = \text{cste}$ sur $[a,b]$ $\rightarrow\leftarrow$

D'après ①, $\exists c \in]a,b[\ / \ |f''(c)| = 0 < \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

supposons que $c \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, puisque f'' est continue il existe un intervalle I_c autour de c où $|f''(x)| < \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$ et :

$\forall t \in \left]a ; \frac{a+b}{2}\right] \cap I_c$

$$|f'(t)| = \left| \int_{I_c \cap [a,t]} f''(x)\,dx + \int_{[a,t]\setminus I_c} f''(x)\,dx \right| \longleftarrow \text{avec } \circledast$$

$$\wedge \qquad\qquad \text{ॽ}$$

$$\int_{I_c \cap [a,t]} \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\,dx \qquad \int_{[a,t]\setminus I_c} \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\,dx$$

$$< \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \left(\int_{I_c \cap [a,t]} dx + \int_{[a,t]\setminus I_c} dx \right)$$

$$< \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.(t-a)$$

On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l} \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| < \frac{1}{2}|f(b)-f(a)| \\ \text{et } \circledast \ \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|f(b)-f(a)| \end{array}\right\} \Rightarrow \ \rightarrow\leftarrow$$

Si $c \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on aurait la même contradiction. $\longrightarrow$

$\Rightarrow \exists \xi \in]a,b[\ / \ |f''(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$