Devoir 1 (correction)

I) ① $P_0(t) = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$ et on obtient la valeur de l'intégrale pour $f \in \mathbb{R}_1[X]$

② $P_1(t) = f(c) + \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(t-c)$ (équation de la corde)

③ $P_2(t) = \frac{2}{(d-c)^2}\left[\left(t-\frac{c+d}{2}\right)(t-d)f(c) - 2(t-c)(t-d)f\left(\frac{c+d}{2}\right) + (t-c)\left(t-\frac{c+d}{2}\right)f(d)\right]$

En notant $\Delta = d-c$ et $u = t - \frac{c+d}{2}$, on a :

$$\int_c^d P_2(t)\,dt = \frac{2}{\Delta^2}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u\left(u-\frac{\Delta}{2}\right)f(c) - 2\left(u+\frac{\Delta}{2}\right)\left(u-\frac{\Delta}{2}\right)f\left(\frac{c+d}{2}\right) + u\left(u+\frac{\Delta}{2}\right)f(d)\,du$$

et on obtient le résultat. Vérification sans problèmes pour $f \in \mathbb{R}_3[X]$.

④ On note $\alpha_\ell = a + \ell\,\frac{b-a}{n}$ $(\ell \in \{0, \dots, n\})$.

4a) On approche $\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{\ell+1}} f(t)\,dt$ par $\frac{b-a}{n} f\left(\frac{\alpha_\ell + \alpha_{\ell+1}}{2}\right)$ pour $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$,

donc

$$M_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(\frac{\alpha_\ell + \alpha_{\ell+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(a + \left(\ell+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

4.b) On approche $\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{\ell+1}} f(t)\,dt$ par $\frac{b-a}{2n}\left(f(\alpha_\ell) + f(\alpha_{\ell+1})\right)$, donc

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\alpha_\ell) + f(\alpha_{\ell+1}) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{\ell=1}^{n-1} f(\alpha_\ell) + \frac{f(b)}{2}\right] \longrightarrow$$

(4.c) On approche $\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{\ell+1}} f(t)\,dt$ par $\frac{b-a}{6n}\left[f(\alpha_\ell) + 4f\left(a + \left(\ell+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + f(\alpha_{\ell+1})\right]$, don

$$S_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\alpha_\ell) + 4 f\left(a+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + f(\alpha_{\ell+1})$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{\ell=1}^{n-1} f(\alpha_\ell) + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} f\left(a+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

II 1 On a g de classe C^2 sur $[c,d]$ et $g''(t) = f''(t) + C \geq 0$ pour tout $t \in [c,d]$ donc g est convexe.

Soit $t \in [c,d]$, alors $t = \frac{d-t}{d-c} c + \left(1 - \frac{d-t}{d-c}\right) d$ où $\frac{d-t}{d-c} \in [0,1]$

donc g convexe $\Rightarrow$ $g(t) \leq \frac{d-t}{d-c} g(c) + \frac{t-c}{d-c} g(d)$

$$\leq \frac{d-t}{d-c} f(c) + \frac{t-c}{d-c} f(d) = f(c) + \frac{t-c}{d-c}\left(f(d) - f(c)\right)$$

2 On en déduit :

$$\int_c^d g(t)\,dt \leq \int_c^d f(c) + \frac{t-c}{d-c}\left(f(d)-f(c)\right) dt = \frac{d-c}{2}\left(f(c)+f(d)\right)$$

$$||$$

$$\int_c^d f(t)\,dt + \frac{C}{2}\int_0^{d-c} u\left(u-(d-c)\right) du \quad \text{avec } u = t-c$$

ce qui donne l'inégalité désirée.

3 La fonction $\tilde{f}(t) = -f(t)$ est de classe C^2 sur $[a,b]$ et $|\tilde{f}''(t)| = |-f''(t)| \leq C$ pour $t \in [a,b]$ donc les résultats précédents sont valables et :

$$\int_c^d \tilde{f}(t)\,dt = -\int_c^d f(t)\,dt \leq \frac{d-c}{2}\left(\tilde{f}(c) + \tilde{f}(d)\right) + \frac{C}{12}(d-c)^3 = -\frac{d-c}{2}\left(f(c)+f(d)\right) + \frac{C}{12}(d-c$$

donc

$$\frac{d-c}{2}\left(f(c)+f(d)\right)-\int_c^d f(t)\,dt \leq \frac{C}{12}(d-c)^3$$

avec l'inégalité de la question précédente, on obtient le résultat.

④ Avec la subdivision $\alpha_\ell = a+\frac{\ell}{n}(b-a)$ pour $\ell\in\{0,\dots,n\}$, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - T_n\right| = \left|\sum_{\ell=0}^{n}\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{\ell+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\,\frac{f(\alpha_\ell)+f(\alpha_{\ell+1})}{2}\right|$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{n-1}\left|\int_{\alpha_\ell}^{\alpha_{\ell+1}} f(t)\,dt - \frac{f(\alpha_\ell)+f(\alpha_{\ell+1})}{2}(\alpha_{\ell+1}-\alpha_\ell)\right|$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{n-1} C\,\frac{(\alpha_{\ell+1}-\alpha_\ell)^3}{12}$$ en appliquant ③ sur l'intervalle $[\alpha_\ell,\alpha_{\ell+1}]$

ce qui donne le résultat.

III ① Puisque $f\in C^2([a,b])$, la fonction f'' est continue sur l'intervalle fermé borné $[c,d]\subset[a,b]$. D'après un théorème du cours, la fonction f'' est bornée et atteint ses bornes sur l'intervalle considéré.

② On a $g''(t) = f''(t)-m \geq 0$ pour $t\in[c,d]$ donc g convexe alors comme dans la partie précédente, on a :

$$g(t)\leq f(c)+\frac{t-c}{d-c}\left(f(d)-f(c)\right)$$

$\longrightarrow$

donc

$$\int_c^d g(t)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt + \frac{m}{12}(d-c)^3 \leq \int_c^d f(c)+\frac{t-c}{d-c}\big(f(d)-f(c)\big)\,dt = \frac{d-c}{2}\big(f(c)+f(d)\big)$$

ce qui donne le résultat.

③ h convexe, $h(c) = -f(c)$, $h(d) = -f(d)$ entraînent :

$$f(c) + \frac{t-c}{d-c}\big(f(d)-f(c)\big) \leq -h(t) \quad \text{pour } t\in[c,d].$$

$$\Rightarrow \frac{d-c}{2}\big(f(c)+f(d)\big) \leq -\int_c^d h(t)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt + \frac{M}{12}(d-c)^3$$

CQFD

④ Avec les deux questions précédentes, on en déduit que :

$$m \leq \frac{12}{(d-c)^3}\left[\frac{d-c}{2}\big(f(c)+f(d)\big) - \int_c^d f(t)\,dt\right] \leq M$$

d'après la question (1), il existe $(x_0, x_1)\in[c,d]^2$ tels que $f''(x_0) = m$ et $f''(x_1) = M$. Supposons que $x_0 < x_1$, alors en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f'' qui est continue sur $[x_0, x_1]$:

$$\exists x \in [x_0, x_1] \subset [c,d] \,/\, \frac{12}{(d-c)^3}\left[\frac{d-c}{2}\big(f(c)+f(d)\big) - \int_c^d f(t)\,dt\right] = f''(x)$$

et on en déduit le résultat.

Raisonnements analogues si $x_0 \geq x_1$.

⑤ L'application des résultats précédents sur les intervalle →

$[\alpha_{k-1},\alpha_k]\subset[a,b]$ pour $k\in\{1,\dots,n\}$ entraîne l'existence de $x_1,\dots,x_n$ tels que

$$\frac{b-a}{2n}\left(f(\alpha_k)+f(\alpha_{k-1})\right)-\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(t)\,dt=\frac{f''(x_k)}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$$

où $x_k\in[\alpha_{k-1},\alpha_k]$, ceci implique le premier résultat.

La fonction f'' est continue sur $[a,b]$ donc l'intégrale $\int_a^b f''(t)\,dt$ existe et vaut $f'(b)-f'(a)$. De plus,

$\sum_{k=1}^{n} f''(x_k)(\alpha_k-\alpha_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f''(x_k)\frac{b-a}{n}$ est une somme de Riemann pour l'intégrale considéré donc :

$$\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f''(x_k)\right)\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\int_a^b f''(t)\,dt=f'(b)-f'(a)$$

et ainsi

$$T_n=\int_a^b f(t)\,dt+\frac{(b-a)^2}{12n^2}\left[f'(b)-f'(a)+\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f''(x_k)\right)-f'(b)+f'(a)\right]$$

$$=\int_a^b f(t)\,dt+\frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(f'(b)-f'(a)\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

IV) 1) $h(t)=f(x+t)-f(x-t)-\frac{t}{3}\left[f'(x+t)+f'(x-t)+4f'(x)\right]$

$$h'(t)=\frac{2}{3}\left[f'(x+t)+f'(x-t)\right]-\frac{t}{3}\left[f''(x+t)-f''(x-t)\right]-\frac{4}{3}f'(x)$$

$$h''(t)=\frac{1}{3}\left[f''(x+t)-f''(x-t)\right]-\frac{t}{3}\left[f^{(3)}(x+t)+f^{(3)}(x-t)\right]\longrightarrow$$

$$h^{(3)}(t) = -\frac{t}{3}\left[f^{(4)}(x+t) - f^{(4)}(x-t)\right]$$

$$h^{(4)}(t) = \frac{1}{3}\left[f^{(4)}(x-t) - f^{(4)}(x+t)\right] - \frac{t}{3}\left[f^{(5)}(x+t) + f^{(5)}(x-t)\right]$$

2) Puisque $f \in \mathcal{C}^5([a,b])$, la fonction $f^{(4)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a les mêmes propriété sur l'intervalle $[x-|t|, x+|t|]$ pour $|t| < \frac{d-c}{2}$ puisque cet intervalle est inclus dans $[c,d] \subset [a,b]$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis et :

$$\exists\, y \in\,]x-t, x+t[\ /\ f^{(4)}(x+t) - f^{(4)}(x-t) = f^{(5)}(y).2t$$

si $t > 0$, de même :

$$\exists\, y \in\,]x+t, x-t[\ /\ f^{(4)}(x-t) - f^{(4)}(x+t) = -f^{(5)}(y).2t \text{ si } t<0$$

donc $$\left|f^{(4)}(x-t) - f^{(4)}(x+t)\right| = 2\left|f^{(5)}(y)\right||t| \leq 2M|t|$$

et $$\left|h^{4}(t)\right| \leq \frac{1}{3}\left|f^{(4)}(x-t) - f^{(4)}(x+t)\right| + \frac{|t|}{3}\left(\left|f^{(5)}(x+t)\right| + \left|f^{(5)}(x-t)\right|\right)$$

$$\leq \frac{2}{3}M|t| + \frac{|t|}{3}2M = \frac{4}{3}M|t| \qquad \text{CQFD}$$

3) On a $h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = 0$, donc la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 entre 0 et t s'écrit :

$$h(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^3}{3!} h^{(4)}(u)\,du$$

$\longrightarrow$

(on peut bien appliquer cette formule de Taylor car la fonction h est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\left[-\frac{d-c}{2}, \frac{d-c}{2}\right]$). 11

Avec la question précédente

$$|h(t)| \leqslant \int_0^t \frac{(t-u)^3}{6} |h^{(4)}(u)| du \quad \text{pour } t>0$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{(t-u)^3}{6} \frac{4}{3} M u \, du = \frac{2}{9} M \int_0^t v^3 (t-v) dv \quad \text{où } v = t-u$$

$$\Rightarrow |h(t)| \leqslant \frac{M}{90} t^5 \quad \text{pour } t>0$$

④ On a

$$\left|h\left(\frac{d-c}{2}\right)\right| = \left| f(d) - f(c) - \frac{d-c}{6}\left[f'(c) + f'(d) + 4 f'\left(\frac{c+d}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{M}{90}\left(\frac{d-c}{2}\right)^5 = \frac{M}{2880}(d-c)^5$$

avec la question precedente.

5) On applique les resultats de la question ④ à la fonction $F(t) = \int_a^t f(u) du$ qui vérifie les hypothèses antérieures.

6) On applique le résultat précédent sur les intervalles $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et on obtient le résultat comme à la fin de la partie II.

V) 1) On a

$$J_n = I + \frac{C}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad J_{n+1} = I + \frac{C}{4^{n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$
$$= I + \frac{C}{4^{n+1}} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

donc on veut

$$\alpha J_n + \beta J_{n+1} = (\alpha+\beta) I + \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)\frac{C}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right) = I + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

ce qui impose $\alpha+\beta = 1$ et $\alpha + \frac{\beta}{4} = 0$ donc $\underline{\alpha = -\frac{1}{3}}$ et $\underline{\beta = \frac{4}{3}}$

2) On a

$$I_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{\ell=1}^{n-1} f\left(a + \frac{\ell}{n}(b-a)\right)\right]$$

donc

$$J_n = -\frac{b-a}{3.2^n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{\ell=1}^{2^n-1} f\left(a + \frac{\ell}{2^n}(b-a)\right)\right]$$
$$+ \frac{4(b-a)}{3\, 2^{n+1}}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{\ell=1}^{2^{n+1}-1} f\left(a + \frac{\ell}{2^{n+1}}(b-a)\right)\right]$$
$$= \frac{b-a}{3.2^n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2\underbrace{\sum_{\ell=1}^{2^{n+1}-1} f\left(a + \frac{\ell}{2^{n+1}}(b-a)\right)}_{\circledast} - \sum_{\ell=1}^{2^n-1} f\left(a + \frac{\ell}{2^n}(b-a)\right)\right]$$

enfin $\circledast = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{2^n-1} f\left(a + \frac{2\ell}{2^{n+1}}(b-a)\right) + \sum_{\ell=0}^{2^n-1} f\left(a + \frac{2\ell+1}{2^{n+1}}(b-a)\right)$

$$= \sum_{\ell=1}^{2^n-1} f\left(a + \frac{\ell}{2^n}(b-a)\right) + \sum_{\ell=0}^{2^n-1} f\left(a + \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{2^n}\right)$$

donc J_n correspond à la formule de Simson à 2^n pas.