PROBLÈME

Notations : pour tout nombre réel x, il existe un unique couple $([x], \{x\}) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[$, tel que $[x] + \{x\} = x$.

– Pour toutes fonctions f et g de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ on écrit $f(x) = 0(g(x))$, s'il existe x_0 et M réels, tels que l'on ait $|f(x)| \leqslant M\,|g(x)|$, dès que $x \geqslant x_0$.

I – Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels ; f une application de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, admettant une dérivée continue sur $[1, +\infty[$. Démontrer, pour $x > 1$, l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\, dt$$

où l'on a posé $A(x) = \sum_1^{[x]} a_n$.

(On conseille de traiter d'abord le cas $x \in]1,2[$, puis d'en déduire le cas général par récurrence.)

II – **1°** Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2° On pose $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt$. En utilisant la partie I, et par un choix judicieux de f,

démontrer l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} = \gamma + \ell n(x) + 0\left(\frac{1}{x}\right).$$

III – **1°** Étudier la convergence des intégrales :
$$\int_1^x \frac{\{t\}}{t^3}\, dt \quad \text{et de} \quad \int_1^x \frac{\ell n(t)}{t^2}\, dt.$$

2° On pose $\quad c = 2 - 2\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^3}\, dt$

Toujours en utilisant la partie I, prouver que
$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^2} = c - \frac{1}{x} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3° Calculer, par parties, une primitive de $\frac{\ell n(t)}{t^2}$.

4° On pose $H(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} \quad (x > 1)$

En utilisant les parties I et II, prouver l'égalité : $\sum_1^{[x]} \frac{1}{n^2} = \int_0^\infty \frac{H(t)}{t^2}\, dt - \frac{1}{x} + 0\left(\frac{1}{x^2}\right).$

Introduction. *Transformée de Laplace.* — Soit f une fonction continue sur un intervalle (a, b) de $\mathbb{R}$. On considère I, l'ensemble des x réels tels que l'intégrale $\int_a^b e^{xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge; J, l'ensemble des x réels tels que l'intégrale converge absolument. La fonction $\varphi : x \longmapsto \int_a^b e^{xt} f(t)\,\mathrm{d}t$, définie sur I, est appelée *transformée de Laplace* de f.

Exercice 1.

Déterminer pour quels x réels les intégrales suivantes convergent et pour quels x elles convergent absolument :

$$a)\ \int_1^\infty e^{xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t;\quad b)\ \int_{-\infty}^\infty e^{xt-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t;\quad c)\int_1^\infty e^{xt}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Exercice 2.

a) Prouver que, pour $0 < u < 1$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^{ux+(1-u)y} \leqslant ue^x + (1-u)\,e^y$$

et que l'inégalité est stricte pour $x \neq y$. (La fonction $x \longmapsto e^{ux}$ est « strictement convexe ».)

b) Montrer que l'ensemble J est un intervalle (avec ou sans ses extrémités).

Exercice 3.

On note $\mathrm{J} = (c, d)$, $]c, d[$ son intérieur.

a) On suppose $0 \in\,]c, d[$. Prouver que pour tout entier p l'intégrale $\int_a^b |t|^p|\,f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge; on pourra remarquer que pour $h > 0$ et $|t|$ assez grand, on a

$$|t|^p \leqslant e^{ht} + e^{-ht}.$$

En déduire que pour $x \in\,]c, d[$ l'intégrale $\int_a^b e^{xt}\,|t|^p\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$ et n entier, on a

$$\left| e^a - \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p\,!}\right| \leqslant \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{|a|}.$$

Pour x, h et t réels, avec $|h| \leqslant r$, prouver

$$\left| e^{(x+h)t} - e^{xt} - \sum_{p=0}^n \frac{(ht)^p}{p\,!}\,e^{xt}\right| \leqslant \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)\,!}\,|t|^{n+1}\,[e^{(x+r)t} + e^{(x-r)t}].$$

c) On suppose $x \in\,]c, d[$. Prouver que φ est continue en x. Ensuite montrer que φ est infiniment dérivable en x et que l'on a

$$\varphi^{(p)}(x) = \int_a^b t^p\,e^{xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

Pour $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, on pose $\varphi(x) = \int_\varepsilon^\infty e^{-xt}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que φ est une fonction dérivable sur $]0, \infty[$ et calculer sa dérivée. En déduire la formule suivante, valable pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Log}\,\frac{b}{a}$$

$\longrightarrow$