II. FONCTIONS RÉELLES OU COMPLEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE

A) Fonctions continues sur un intervalle.

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

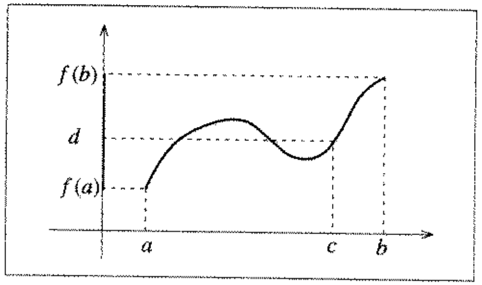
1- Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème:

> Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$ et a et b deux points de I tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Alors tout nombre réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ appartient à $f(]a, b[)$.

Corollaire:

> Si f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.



Démonstration du théorème par dichotomie:

Supposons $f(a) < f(b)$ et $m \in]f(a), f(b)[$. Nous définissons deux suites (a_n) et (b_n), puis une suite (c_n) donnée par $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ de la manière suivante:

i) $a_0 = a$, $b_0 = b$ (et donc $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{a+b}{2}$)
si $f(c_0) < m$, nous posons $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$
sinon nous posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$ pour avoir $f(a_1) < m \leq f(b_1)$.

ii) De la même manière si nous supposons définies les suites (a_k) et (b_k) jusqu'au rang n et telles que $f(a_k) < m \leq f(b_k)$,

si $f(c_n) < m$, nous posons $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$
sinon nous posons $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

iii) Nous avons ainsi construit par récurrence une suite $([a_n, b_n])$ ***de segments emboîtés*** dont la longueur tend vers 0.

Si $\{c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, on sait que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ et f étant continue, $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$. Comme $f(a_n) < m \leq f(b_n)$, par prolongement des inégalités, on obtient $f(c) = m$.
Le cas $f(a) > f(b)$ se ramène au précédent en considérant $-f$.

Application:

Ce théorème est souvent utile pour montrer l'existence de zéros d'équation:
si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) f(b) < 0$ alors ***f a au moins un zéro sur [a, b]***.

S

Cette propriété ne caractérise pas les fonctions continues. Nous verrons que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires sans être nécessairement continue.

Démonstration du corollaire:

Si α et β (avec $\alpha < \beta$) sont deux points de $f(I)$, il existe $(a, b) \in I \times I$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
Si $\gamma \in [\alpha, \beta]$, il existe c entre a et b tel que $\gamma = f(c)$ puisque:

* pour $\gamma = \alpha$, $c = a$

* pour $\gamma = \beta$, $c = b$

* pour $\gamma \in \,]\alpha, \beta[$, l'existence de c résulte du *théorème des valeurs intermédiaires*.

En fin de compte on a démontré que:

$$((\alpha, \beta) \in f(I) \times f(I) \text{ et } \alpha < \beta) \Rightarrow [\alpha, \beta] \subset f(I)$$

c'est à dire que ***f (I) est un intervalle***.

Continuité sur un segment.

Soit $S = [a, b]$ $(a < b)$ et f une application continue de S dans $\mathbb{R}$. Alors $f(S)$ est un segment et f est uniformément continue sur S.

Démonstration:

Un segment est un intervalle compact donc $f(S)$ est un intervalle compact donc un segment. L'uniforme continuité vient du *théorème de Heine*.

2- Monotonie et continuité.

Pour les définitions et propriétés générales des fonctions monotones, on se reportera au paragraphe I.C.3).

a) Proposition:

Toute application de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, est injective.

En effet, puisque dans $\mathbb{R}$ l'ordre est total: $x \neq x' \Rightarrow (x < x'$ ou $x > x')$.
Si f est strictement croissante, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
(Dans l'éventualité $x > x'$ ou f strictement décroissante, le résultat est le même).

Conséquence:

Si f est strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I sur $f(I)$.
L'application réciproque f^{-1} existe $(x \in I$ et $y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)$ et $y \in f(I))$.
De plus f^{-1} est ***strictement monotone sur f (I)*** dans le même sens que f. En effet, pour tout couple $(x, x') \in I^2$ tel que $x \neq x'$,

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{y' - y}{f^{-1}(y') - f^{-1}(y)}.$$

Les deux rapports ont donc même signe et, par conséquent, f et f^{-1} sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes.

b) Théorème:

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante. Alors,

i) $J = f(I)$ est un intervalle. De façon plus précise,

si $I = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ $\quad J = [f(a), f(b)]$

si $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ $\quad J = [f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$

si $I =]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ $\quad J =]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), f(b)]$

si $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ $\quad J =]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)[$

ii) L'application f^{-1}, réciproque de f est ***continue*** et ***strictement monotone*** sur $f(I)$ (dans le même sens que f).

Démonstration:

Nous savons que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Etudions le cas où $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Posons $\alpha = f(a)$, $\beta = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$: β existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est égal à sup (J) d'après le *théorème de la limite monotone*. Si $y_0 \in J$, $y_0 = f(x_0)$ où $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_0 \in I$. Or, si $x \in \,]x_0, b[$, alors $y_0 < f(x)$ et comme $f(x) \in J$, on a $f(x) \leq \beta$. Finalement $y_0 < \beta$. Cela prouve que $\beta \notin J$, et puisque α est évidemment minimum de f on a:

$$J = [\alpha, \beta[.$$

Il reste à prouver ***la continuité de f^{-1} en $y_0 \in J$.***

Raisonnons dans le cas où y_0 est intérieur à J, les autres cas relevant de méthodes analogues. Alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est intérieur à I par stricte croissance.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On a:

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

et d'après la croissance stricte de f^{-1}, pour tout $y \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$, (qui est un voisinage de y_0 inclus dans l'intervalle $f(I)$), on a:

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de f^{-1} en y_0.

Les autres cas se traitent de manière semblable.

3- Homéomorphisme d'intervalles.

a) Définition:

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans J. On dit que f est un ***homéomorphisme*** si f est une bijection de I sur J et si f et f^{-1} sont continues.

Conséquences:

i) si f est un homéomorphisme de I sur J, f^{-1} est un homéomorphisme de J sur I,
ii) si f est continue et strictement monotone sur I, alors f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

b) Théorème:

Pour qu'une application f de I sur J soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'elle soit ***continue*** et ***strictement monotone***.

Démonstration:

i) *Condition nécessaire:*
Montrons que l'injectivité et la continuité de f sur I impliquent sa stricte monotonie.

Soit $\Delta = \{(x, y) \in I^2 ; x < y\}$. Il s'agit d'établir que si (x, y) décrit Δ, le nombre réel $f(y) - f(x)$ reste soit > 0, soit < 0. Fixons $(x_1, y_1) \in \Delta$, et soit $(x_2, y_2) \in \Delta$ un couple arbitraire. Pour $t \in [0, 1]$, posons $u(t) = (1-t)x_1 + t x_2$ et $v(t) = (1-t)y_1 + t y_2$.

Il est clair que $(u(t), v(t)) \in \Delta$ et que u et v sont continues sur $[0, 1]$.
Soit G l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(t) = f(v(t)) - f(u(t))$.
L'application G est continue, $G(0) = f(y_1) - f(x_1)$, $G(1) = f(y_2) - f(x_2)$ et G ne peut s'annuler puisque pour tout $t \in [0, 1]$, $u(t) < v(t)$ et f injective. Donc $G(0)\,G(1) > 0$ (sinon le *théorème des valeurs intermédiaires* obligerait G à s'annuler).
Finalement $f(y_2) - f(x_2)$ a le signe de $f(y_1) - f(x_1)$, ce qui prouve bien que f est strictement monotone.

ii) *Condition suffisante:*
Si f est continue, strictement monotone et surjective de I sur J, elle est bijective et f^{-1} est continue d'après le théorème 2-b).

Exemples:

sin induit un homéomorphisme de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$;
cos induit un homéomorphisme de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$;
tan induit un homéomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$;
ln induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Intervalles homéomorphes:

Définition:

Deux intervalles I et J sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de I sur J.

D'après ce qui précède deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ homéomorphes sont ou bien tous deux compacts, ou bien tous deux ouverts, ou bien tous deux semi-ouverts.

Proposition:

Réciproquement, si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$
i) si I et J sont compacts et non réduits à un point, ils sont homéomorphes,
ii) si I et J sont ouverts, ils sont homéomorphes,
iii) si I et J sont semi-ouverts, ils sont homéomorphes.

Démonstration:

i) Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ avec a, b, c, d réels, $a < b$ et $c < d$, l'application f définie par:

$$f(x) = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c)$$

est un homéomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$.

ii) Si $I =]a, b[$ avec a et b réels et $a < b$, l'application f définie par:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right)$$

est un homéomorphisme croissant de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$.
Si $I =]a, +\infty[$ avec a réel, l'application f définie par:

$$f(x) = \ln(x-a)$$

est un homéomorphisme croissant de $]a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

iii) Si $I = [a, b[$ avec a et b réels et $a < b$, l'application f définie par:

$$f(x) = \frac{x-a}{b-x} = \frac{b-a}{b-x} - 1$$

est un homéomorphisme croissant de $[a, b[$ sur $[0, +\infty[$.
Les autres cas s'obtiennent sans difficulté ***par symétrie ou composition***.

4- Limites dans $\mathbb{C}$.

Dans ce paragraphe, nous allons étendre un certain nombre de résultats concernant les limites et la continuité aux applications de I dans $\mathbb{C}$.

Nous ne reprendrons pas les démonstrations vues dans le cas des applications à valeurs réelles, quand elles ne sont pas modifiées par le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Dans les définitions et les énoncés qui suivent, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et f une application de I dans $\mathbb{C}$.

a) Limites en un point:

Définition:

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I et l un nombre complexe. On dit que f a pour limite l au point a si les applications $\Re e f$ et $\Im m f$ ont respectivement pour limite $\Re e\, l$ et $\Im m\, l$. Dans ce cas, on écrit $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \to a} l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = l$.
On définit de la même manière une limite à gauche ou à droite.

Traduction:

En fait, on peut donner un critère de convergence permettant de traiter les limites dans $\mathbb{C}$ comme les limites dans $\mathbb{R}$; simplement, la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ est remplacée par le module dans $\mathbb{C}$, mais comme la notation est la même, la formalisation l'est aussi.

***Proposition* 1:** (critère de convergence)

> Si a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I:
>
> $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a);\, \forall\, x \in I, (x \in V \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\big).$
>
> Si a est un réel adhérent à I:
>
> $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0;\, \forall\, x \in I, (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\big).$
>
> Si a est un réel et n'est pas la borne supérieure de I:
>
> $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0;\, \forall\, x \in I, (a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\big).$
>
> Si a est un réel et n'est pas la borne inférieure de I:
>
> $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0;\, \forall\, x \in I, (a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\big).$

Démonstration:

Les équivalences résultent immédiatement de la double inégalité:

$$\mathrm{Max}\,(\,|\Re e\, z|, |\Im m\, z|) \le |z| \le |\Re e\, z| + |\Im m\, z|.$$

On déduit alors sans difficulté un corollaire, le *critère de Cauchy* et une proposition pour la composition.

Corollaire:

> $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0.$

Critère de Cauchy:

> Si f est une application de I dans $\mathbb{C}$ et a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, pour que f admette une limite en a suivant I, il faut et il suffit qu'elle vérifie le *critère de Cauchy*:
>
> $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a);\ \forall\, (x, y) \in I^2,\ (x \in V \text{ et } y \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

***Proposition* 2:** (composition)

> Soit g une application de I dans $\mathbb{R}$, et f une application de J dans $\mathbb{C}$ telles que $g\,(I) \subset J$, et a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I.
>
> Si $g\,(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} b$ et $f\,(y) \underset{\substack{y \to b \\ y \in J}}{\longrightarrow} l$ alors $f \circ g\,(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$.

b) Continuité:

La définition de la limite ayant été donnée, les diverses définitions et propriétés de la continuité des applications définies sur un intervalle à valeurs réelles, s'étendent sans difficulté aux applications à valeurs complexes. Dans ce qui suit, I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définitions:

> Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
>
> i) f est continue en a si $f\,(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\longrightarrow} f\,(a)$.
>
> ii) f est continue si elle est continue en tout point de I.
>
> iii) Si J est un sous-intervalle de I, f est continue sur J si $f_{|J}$ est continue.

Remarques:

i) on définit de la même manière la ***continuité à gauche ou à droite***, par exemple si a n'est pas la borne supérieure de I, f est continue à droite en a si $f\,(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} f\,(a)$.

ii) La caractérisation de la continuité en a, est donc:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0;\ \forall\, x \in I,\ (|x-a| < \alpha \ \Rightarrow |f\,(x) - f\,(a)| < \varepsilon).$$

iii) Une application f de I dans $\mathbb{C}$ est ***uniformément continue*** si:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0;\ \forall\, (x, y) \in I^2,\ (|x-y| < \alpha \ \Rightarrow |f\,(x) - f\,(y)| < \varepsilon).$$

c) Propriétés des applications continues:

On rappelle d'abord, sans nouvelle démonstration, les propriétés opératoires vues pour les applications à valeurs réelles, résultant des propriétés des limites.

***Proposition* 1:**

> Si f et g sont des applications continues de I dans $\mathbb{C}$ (resp. continues en a) et λ et μ des complexes, $|f|$, $\lambda f + \mu\, g$ et $f\,g$ sont continues (resp. continues en a).
>
> Si de plus, g ne s'annule pas (resp. $g\,(a) \neq 0$), $\dfrac{f}{g}$ est continue (resp. continue en a).

Conséquence:

Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, l'application $|f|$ est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, donc ***admet un maximum et un minimum***.

Par ailleurs, on peut énoncer une théorème de composition:

***Proposition* 2:**

> Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, f une application de I dans $\mathbb{R}$, et g une application de J dans $\mathbb{C}$ telles que $f\,(I) \subset J$.
>
> i) Si $a \in I$, f est continue en a, et g continue en $f\,(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
>
> ii) Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

***Proposition* 3 (*Heine*):**

> Si A est une partie compacte de $\mathbb{R}$, toute application continue f de A dans $\mathbb{C}$ est ***uniformément continue***.

Démonstration:

Si $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$, f_1 et f_2, applications continues de A dans $\mathbb{R}$, sont uniformément continues et:

$$\forall\, (x, y) \in A^2,\ |f\,(x) - f\,(y)| \le |f_1\,(x) - f_1\,(y)| + |f_2\,(x) - f_2\,(y)|.$$

d) Fonctions continues par morceaux:

On étend sans difficulté certaines définitions vues au chapitre I.D-5) aux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 1:

Dire que f est une ***application en escalier*** de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ signifie:
i) il existe $s : a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ subdivision de $[a, b]$, telle que:
ii) la restriction de f à chaque $]a_i, a_{i+1}[$ est constante, i.e.

$$\forall\, i \in [0, p-1],\ \exists\, \gamma_i \in \mathbb{C};\ \forall\, x \in\,]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \gamma_i.$$

Définition 2:

Dire que f est ***continue par morceaux*** sur $[a, b]$ signifie
i) il existe s subdivision de $[a, b] : a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$, vérifiant:
ii) pour tout i de $[0, p-1]$, il existe une application φ_i continue de $[a_i, a_{i+1}]$ dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$\forall\, i \in [0, p-1],\ \forall\, x \in\,]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \varphi_i(x).$$

Propriété:

Si $f_1 = \Re e\, f$ et $f_2 = \Im m\, f$,

$f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}) \Leftrightarrow (f_1 \text{ et } f_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}))$

$f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \Leftrightarrow (f_1 \text{ et } f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}))$.

En effet, si s_1 est une subdivision adaptée à f_1 et s_2 une subdivision adaptée à f_2, $s_1 \cup s_2$ est une subdivision adaptée à la fois à f_1 et à f_2.

Conséquence:

La plupart des propriétés vues pour les fonctions en escalier (resp. continues par morceaux), à valeurs réelles, s'étendent aux fonctions à valeurs complexes, en particulier:

i) toute application $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ est bornée,

ii) toute application $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ peut être ***approchée uniformément à moins de*** δ par une application $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$ ($\delta \in \mathbb{R}^{*+}$ fixé).

Remarque:

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce qui permettra d'énoncer en une fois les propriétés communes aux applications à valeurs réelles et à valeurs complexes.

B) Fonctions dérivables, dérivées d'ordre supérieur.

Dans tout ce chapitre I, J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1- Dérivation.

a) Dérivées:

Définition 1:

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est ***dérivable au point*** $a \in I$ si l'application de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ en a suivant $I \setminus \{a\}$.
En cas d'existence, cette limite s'appelle dérivée de f en a, et est notée $f'(a)$.

Définition 2:

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est ***dérivable à droite*** (resp. à ***gauche***) ***au point*** $a \in I$ si l'intervalle $I_a' = I \cap [a, +\infty[$ (resp. $I_a'' = I \cap\,]-\infty, a]$) n'est pas réduit à $\{a\}$ et si la restriction de f à I_a' (resp. à I_a'') est dérivable en a.
Si elle existe, une telle dérivée s'appelle ***dérivée à droite*** (resp. ***à gauche***) de f en a, on la note $f_d'(a)$ (resp. $f_g'(a)$).

Définition 3:

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est ***dérivable*** (resp. ***dérivable à droite***, ***dérivable à gauche***) si ***f est dérivable*** (resp. à droite, à gauche) ***en tout point de I***.
On définit alors l'application dérivée de f, notée f' ou $\dfrac{df}{dt}$ par $t \mapsto f'(t)$.
On définit de même f_g' et f_d'.

Définition 4:

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est continûment dérivable si elle est dérivable et si l'application dérivée $f' : I \to \mathbb{K}$ est continue.
On dit aussi dans ce cas que f est de classe C^1 (voir 4-a)).

Remarques:

i) ***Si a est intérieur à I***, l'existence de $f'(a)$ équivaut à l'existence et à l'égalité de $f_g'(a)$ et de $f_d'(a)$ et dans ce cas, $f'(a) = f_g'(a) = f_d'(a)$.

ii) La dérivabilité de f en a se traduit par l'existence d'une application ε de I dans $\mathbb{K}$ continue en a, telle que $\varepsilon(a) = 0$ et:

$$\forall\, t \in I,\ f(t) = f(a) + (t - a) f'(a) + (t - a)\, \varepsilon(t)$$

(pour $t \neq a$, la fonction ε est définie par $\varepsilon(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} - f'(a)$).
Cette écriture signifie que f admet un *développement limité à l'ordre* 1 au point a. Nous verrons au chapitre IV que ii) peut s'écrire à l'aide de la notation de *Landau*:

$$f(t) = f(a) + (t - a) f'(a) + o(t - a).$$

iii) Si f est dérivable au point a, elle est continue en a.

b) Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction réelle:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ et f dérivable en a.

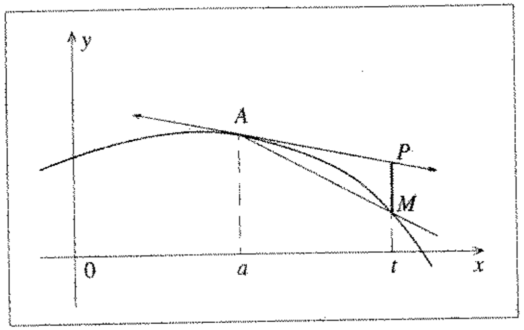
Définition:

On appelle tangente au point $A = (a, f(a))$ de $\mathbb{R}^2$ la droite passant par A et dirigée par le vecteur $(1, f'(a))$; on note $T_a = A + \mathbb{R}\,(1, f'(a))$.

Appelons $g(t) = f(a) + (t - a) f'(a)$ l'ordonnée du point P d'abscisse t situé sur la tangente au point A à la courbe représentative de f.

Si $M = (t, f(t))$, alors la longueur PM est égale à $|(t - a)\, \varepsilon(t)|$.

Pour $t \neq a$, $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ ***est le coefficient directeur de la droite contenant les points A et M*** et ce coefficient directeur a une limite quand t tend vers a qui est $f'(a)$.



Si a est l'extrémité gauche de I et si f est dérivable en a, on définit la demi-tangente en $A\ (a, f(a))$ par: $T_a = A + \mathbb{R}^+ (1, f'(a))$. De même en b, extrémité droite de I, on peut définir une demi-tangente si $f'(b)$ existe.

2- Propriétés.

a) Linéarité de la dérivation:

i) $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$, ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en $a \in I$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et l'application $f \mapsto f'(a)$ de $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est linéaire.
ii) $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et l'application $f \mapsto f'$ de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$ est linéaire.

Démonstration:

Pour f et g dans $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$, λ réel et t dans I, $t \neq a$ on peut écrire:

$$\frac{(f+\lambda g)(t) - (f+\lambda g)(a)}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} + \lambda \frac{g(t)-g(a)}{t-a} \quad \text{donc:}$$

$$(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a).$$

b) Structure d'algèbre des fonctions dérivables:

Proposition:

i) $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^I$.
ii) $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^I$ et pour f et g dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

iii) Les inversibles de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ sont les applications qui ne s'annulent pas sur I et pour tout f de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, tel que $0 \notin f(I)$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Démonstration:

Pour $f, g \in \mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et $t \in I, t \neq a$,

$$\frac{(fg)(t) - (fg)(a)}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\, g(t) + \frac{g(t)-g(a)}{t-a}\, f(a).$$

L'application g étant dérivable en a, elle est continue en a donc par somme et produit de limites, l'application fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + g'(a)\, f(a)$.

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ telle que $0 \notin f(I)$; alors pour $t \neq a$,

$$\frac{1}{t-a}\left(\frac{1}{f}(t) - \frac{1}{f}(a)\right) = -\frac{1}{f(t) \times f(a)}\, \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

et par quotient de limites, $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

Remarque:

Si f est dérivable au point a et $f(a) \neq 0$, ce résultat reste valable en ce point a car f étant dérivable donc continue au point a, elle ne s'annule pas sur un intervalle contenant a et contenu dans I.

Conséquences:

i) *Dérivée d'un quotient.*
Soit $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ telles que $0 \notin g(I)$.
Alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

ii) *Dérivée d'un produit fini de fonctions dérivables.*

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$, sont n fonctions ($n \geq 2$) dérivables en a, alors $\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable en a et l'on a $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} f_j(a)$.

Le résultat ii) s'établit par récurrence en utilisant $\prod_{i=1}^{n} f_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right) f_n$, pour $n \geq 3$.

c) Dérivée logarithmique:

Définition:

i) Soit $f \in \mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ telle que $f(a) \neq 0$. Le nombre réel ou complexe $\frac{f'(a)}{f(a)}$ s'appelle dérivée logarithmique de f au point a.

ii) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ telle que $0 \notin f(I)$. La fonction $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f.

Propriété:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^*)^2,\ \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \quad \text{et} \quad \frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Plus généralement $\dfrac{\left(\dfrac{f_1 \cdot\cdot f_n}{g_1 \cdot\cdot g_p}\right)'}{\dfrac{f_1 \cdot\cdot f_n}{g_1 \cdot\cdot g_p}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i'}{f_i} - \sum_{j=1}^{p} \dfrac{g_j'}{g_j}$.

Exemple:

Avec $f(x) = \dfrac{(x-1)^4 (x+1)^3}{(x^2-x+1)^3}$, on obtient $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - 3\ \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$,

d'où $f'(x) = \dfrac{(x^3-3x^2+12x-2)(x-1)^3(x+1)^2}{(x^2-x+1)^4}$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$, et cette expression reste valable pour -1 et 1 car deux fonctions rationnelles coïncidant pour une infinité de valeurs réelles sont égales.

d) Composition de fonctions dérivables:

Proposition:

i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{K}$, $a \in I$ tels que $f(I) \subset J$.
Alors, si f est dérivable au point a et g dérivable au point $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable au point a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.
ii) Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(f(I), \mathbb{K})$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Démonstration:

Soit $\Delta : J \to \mathbb{K}$ définie par $\Delta(x) = \dfrac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)}$ si $x \neq f(a)$ et $\Delta(f(a)) = g'(f(a))$.
Alors Δ est continue en $f(a)$ puisque g est dérivable en $f(a)$.
Pour $t \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{1}{t-a}(g \circ f(t) - g \circ f(a)) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}\ \Delta \circ f(t)$ et par multiplication et composition de fonctions continues en a ou $f(a)$, on peut conclure, l'introduction de Δ ayant permis d'éviter le piège de dénominateurs nuls.

e) Dérivée d'une fonction réciproque:

Proposition:

Si f est un homéomorphisme dérivable de I sur J tel que $0 \notin f'(I)$, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration:

Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$. Définissons Δ de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ par $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Pour $y \in J \setminus \{b\}$, on a $y \neq b \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{\Delta \circ f^{-1}(y)}$.

Or, f^{-1} est continue donc $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b dans J.
De plus, $\Delta(x)$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a. Le *théorème de composition des limites* et de *l'inverse de la limite* permet de conclure que f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

3- Dérivées successives.

a) Dérivées d'ordre n:

Définition:

Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$.
i) On dit que f est n fois dérivable sur I, s'il existe des applications $\varphi_0, \varphi_1, .., \varphi_{n-1}$ dérivables de I dans $\mathbb{K}$, telles que $\varphi_0 = f$ et $\forall\, i \in [0, n-2]\ \varphi_{i+1} = \varphi_i'$.
La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f, notée $f^{(n)}$ est alors la dérivée de φ_{n-1}.
ii) On dit que f a une dérivée $n^{\text{ème}}$ au point a, s'il existe un sous-intervalle J de I, voisinage de a dans I tel que f est $n-1$ fois dérivable sur J, l'application $f^{(n-1)}$ étant dérivable en a. On pose alors $f^{(n)}(a) = f^{(n-1)'}(a)$.

Remarques:

i) Les définitions et les notations i) et ii) sont ***compatibles***, en ce sens que pour que f soit n fois dérivable sur I, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée $n^{\text{ème}}$ en tout point de I.

ii) Par convention $f^{(0)}$ désigne f et on emploie souvent f' pour $f^{(1)}$, f'' pour $f^{(2)}$ et f''' pour $f^{(3)}$.

Exemples:

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\ \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\exp^{(n)}(x) = \exp(x).$$

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, et tout $p \in \mathbb{N}$, si f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:
$$f(t) = (t-a)^p,$$
elle est n fois dérivable et $f^{(n)}(t)$ vaut 0 si $n > p$, et $\dfrac{p\,!}{(p-n)!}\ (t-a)^{p-n}$ si $n \leq p$.

Notations: pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I; on note $C^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications f, n fois dérivables sur I telles que $f^{(n)}$ soit continue: $\quad C^n(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}); f^{(n)} \in C(I, \mathbb{K})\}$.

Définitions:

Tout élément de $C^n(I, \mathbb{K})$ est appelé application de classe C^n sur I.
On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^∞ si elle est de classe C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) \subset C^{n-1}(I, \mathbb{K})$.

Remarque: $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \neq \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

Considérons en effet, l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:
$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$
D'après les théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2\left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Comme $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x\neq 0]{x\to 0} 0$, ***f* est dérivable sur** $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$, mais f' n'a pas de limite en 0, donc ***f* n'est pas continûment dérivable**.

b) Propriétés:

i) *Linéarité:*

> $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto f^{(n)}$ de $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$ est ***linéaire***.

ii) *Formule de Leibniz.*

> Si f et g sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ admettant des dérivées $n^{\text{èmes}}$ sur I, fg aussi admet une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I et
> $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration:

On fait une démonstration *par récurrence* sur n:

pour $n = 0$, $(fg)^{(0)} = (fg) = fg$

pour $n = 1$, $(fg)' = f'g + fg'$

Donc le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit f et g admettant des dérivées $n^{\text{èmes}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, f, g, f', g', sont dérivables à l'ordre $n-1$ par définition et nous savons que $(fg)' = f'g + fg'$.

En écrivant l'hypothèse de récurrence pour $f'g$ et pour fg', $(f'g)^{(n-1)}$ et $(fg')^{(n-1)}$ existent donc existe aussi $(f'g + fg')^{(n-1)}$, c'est à dire $(fg)^{(n)}$.

Dans la première somme on réindexe en posant $j = k+1$, ce qui donne

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} f^{(j)} g^{(n-j)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}) f^{(k)} g^{(n-k)} + C_{n-1}^{n-1} f^{(n)} g + C_0^{n-1} f g^{(n)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

iii) *Inverse et quotient.*

> a) Si f est une application n fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ ne s'annulant pas sur I, alors, $\frac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I.
>
> b) Si f et g sont deux applications n fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$, g ne s'annulant pas sur I, alors, $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.

Corollaire:

$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, $C^n(I, \mathbb{K})$, $C^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathbb{K}^I$.

iv) *Composée:*

> Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Si f est une application n fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$ et g une application n fois dérivable de J dans $\mathbb{K}$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.

v) *Application réciproque:*

> Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est un homéomorphisme n fois dérivable de I sur J tel que $0 \notin f'(I)$, alors f^{-1} est n fois dérivable sur J.

Démonstration:

La démonstration des propositions iii), iv), et v) s'effectue par récurrence sur l'entier n. Soit à démontrer les propositions:

$\mathcal{H}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $0 \notin f(I)$ alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

$\mathcal{K}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$ et $g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

$\mathcal{L}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, f homéomorphisme de I sur J, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{R})$.

$\mathcal{H}(1)$ est vraie (proposition 2.b iii)). Supposons $n \geq 2$ et $\mathcal{H}(n-1)$ vraie.

Soit f n fois dérivable ne s'annulant pas sur I. Pour montrer que $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, il suffit de prouver que $\left(\frac{1}{f}\right)' \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{K})$, ce qui résulte de $\mathcal{H}(n-1)$ et de la propriété de *Leibniz* appliquée à partir de la relation $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} = -f' \times \frac{1}{f^2}$.

De même $\mathcal{K}(1)$ est vraie (proposition 2.d)). Supposons $n \geq 2$, $\mathcal{K}(n-1)$ vraie, $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$, avec $f(I) \subset J$.

Pour montrer que $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, il suffit de prouver que $(g \circ f)' \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{K})$, ce qui résulte de $\mathcal{K}(n-1)$ et de la propriété de *Leibniz* appliquée à partir de la relation $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

$\mathcal{L}(1)$ est vraie (proposition 2.e)). Supposons $n \geq 2$, $\mathcal{L}(n-1)$ vraie, et f homéomorphisme n fois dérivable de I sur J.

Pour montrer que $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{R})$, il suffit de prouver que $(f^{-1})' \in \mathcal{D}^{n-1}(J, \mathbb{R})$ ce qui résulte de $\mathcal{L}(n-1)$ et des propriétés iii) et iv), compte tenu de la relation $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Les trois propriétés sont donc démontrées par récurrence.

Remarque:

On obtient des résultats analogues en remplaçant dans les propositions ii), iii), iv), v), l'hypothèse «***n fois dérivable***» par «***de classe*** C^n» (respectivement ***de classe*** C^∞).

Remarque sur l'écriture différentielle:

On notera $\frac{df}{dx}(a)$ la dérivée de f au point a, et $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$ la dérivée $n^{\text{ème}}$.

Cette notation a l'avantage de favoriser les changements de variable, qui deviennent mécaniques:

si on pose $y = g(x)$, $\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{dy} \times \frac{dy}{dx}$.

C) Accroissements finis.

1- Extrémum local d'une fonction dérivable.

Théorème:

> Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f admet un extrémum local au point x_0 intérieur à I, et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Supposons qu'en un point x_0 de $\overset{\circ}{I}$, où elle est dérivable, f admette par exemple un maximum local. Alors f' s'annule en x_0. En effet, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Par suite, pour tout $x \in V \cap I \cap]x_0, +\infty[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

De même, pour tout $x \in V \cap I \cap]-\infty, x_0[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

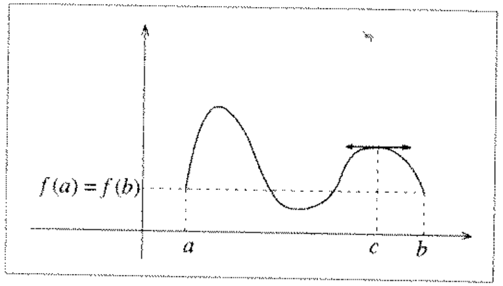
Par prolongements des inégalités, f étant dérivable en x_0, on obtient $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$, d'où le résultat.

> *La condition d'annulation de f' n'est pas suffisante:*
> *$f : x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extrémum en 0 et sa dérivée s'annule en 0.*

2- Théorème de Rolle.

a) Enoncé:

> Soit a et b deux réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Géométriquement, *le théorème de Rolle* dit qu'il existe un point du graphe de f en lequel la tangente est horizontale.

Démonstration:

En effet, si f est constante, sa dérivée est nulle, tout point de $]a, b[$ convient.
Si f n'est pas constante, on peut, en raisonnant éventuellement sur $-f$, supposer l'existence de $d \in [a, b]$ tel que $f(d) > f(a)$. Comme f est continue sur le compact $[a, b]$,

elle admet un maximum M atteint en un point $c \in]a, b[$ car $M \geq f(d) > f(a) = f(b)$ et d'après le théorème précédent, f' s'annule en c.

b) Généralisation:

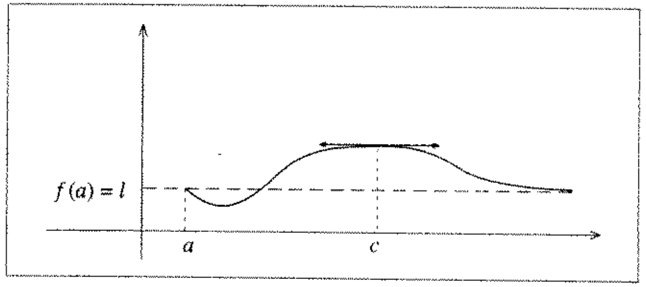
Proposition (théorème de Rolle généralisé):

> Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que f admette une limite réelle en $+\infty$ égale à $f(a)$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration:

En effet, on peut appliquer *le théorème de Rolle* à $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = f(a)$ et $g(x) = f\left(a + \dfrac{1}{x} - 1\right)$ si x est non nul.

On obtient l'existence de $b \in]0, 1[$ tel que $g'(b) = 0$ soit $-\dfrac{1}{b^2} f'\left(a + \dfrac{1}{b} - 1\right) = 0$ d'où le résultat en posant $c = a + \dfrac{1}{b} - 1 \in]a, +\infty[$.



Nous obtenons un énoncé analogue en prenant $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]-\infty, a[$ et telle que f admette une limite réelle en $-\infty$ égale à $f(a)$. Alors, il existe $c \in]-\infty, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

3- Egalité des accroissements finis.

a) Enoncé:

Théorème:

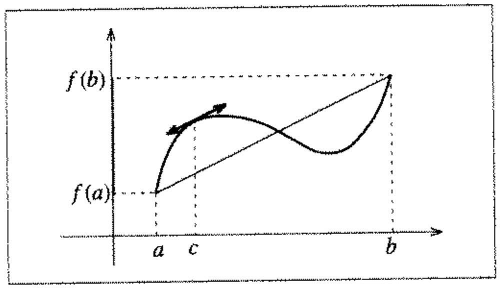
> Soit a et b deux réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que:
> $$\boldsymbol{f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)}$$

Remarques:

i) Il est souvent commode de poser $b = a + h$ et d'écrire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que:
$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h).$$

Cette dernière écriture étant valable quel que soit le signe de h ($a < b$ ou $b < a$), car $a + \theta h = (1 - \theta)\, a + \theta\,(a + h)$ est un point appartenant à l'intervalle ouvert $]a, a+h[$ si $h > 0$ ou à $]a+h, a[$ si $h < 0$.

ii)L'interprétation géométrique est immédiate: il existe un point du graphe où la tangente est parallèle à la droite qui contient $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Démonstration:

Il suffit de considérer la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x,$$

et de lui appliquer *le théorème de Rolle* à après avoir constaté que:

$$g(b) = g(a) = \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b - a}.$$

b) Généralisation:

Proposition:

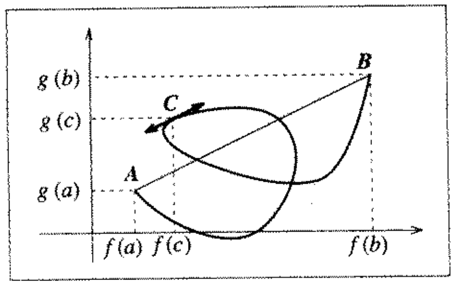
> Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a, b[$.
> Alors ***il existe $c \in\ ]a, b[$*** tel que le déterminant suivant soit nul:
> $$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Interprétation géométrique:

Si une courbe plane est donnée par une représentation paramétrique dérivable:

$$t \in I \mapsto (f(t), g(t)),$$

pour toute corde AB de la courbe, il existe un point C où la tangente est parallèle à (AB).



Démonstration:

Pour établir ce résultat, on constate que si $g(b) = g(a)$, tout $c \in\ ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ (il en existe d'après *le théorème de Rolle*) convient.

Sinon, on applique *le théorème de Rolle* à la fonction auxiliaire $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g(x).$$

c) Inégalité des accroissements finis:

Proposition:

> Soit a et b deux réels ($a < b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est bornée,
> $$\mathbf{|f(b) - f(a)| \le |b - a| \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|}$$

Démonstration:

Commençons par ***le cas réel*** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Si f' est bornée sur $]a, b[$, en posant $m = \inf_{x \in]a,b[} f'(x)$ et $M = \sup_{x \in]a,b[} f'(x)$, on a, d'après l'égalité des accroissements finis:

$$(b - a)\, m \le f(b) - f(a) \le (b - a)\, M,$$

et en conséquence,

$$|f(b) - f(a)| \le (b - a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|.$$

Dans le cas complexe, posons $f_1 = \Re e\, f$ et $f_2 = \Im m\, f$.

Si $f(b) - f(a) \in \mathbb{R}$, alors $f(b) - f(a) = f_1(b) - f_1(a)$, donc,

$$|f(b) - f(a)| \le |b - a| \sup_{x \in]a,b[} |f_1'(x)|, \text{ et comme } |f_1'(x)| \le |f'(x)|,$$

$$|f(b) - f(a)| \le |b - a| \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|.$$

Si $f(b) - f(a) \notin \mathbb{R}$, alors il existe $r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $f(b) - f(a) = r\, e^{i\theta}$.

$r = e^{-i\theta} f(b) - e^{-i\theta} f(a) = g(b) - g(a)$, en posant $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

Comme $g(b) - g(a) \in \mathbb{R}$, $|g(b) - g(a)| \le |b - a| \sup_{x \in]a,b[} |g'(x)|$.

Or, $g'(x) = e^{-i\theta} f'(x)$, donc, $|g'(x)| = |f'(x)|$, et il en résulte:

$$|f(b) - f(a)| \le |b - a| \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|.$$

4- Caractérisation des fonctions monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

a) Fonctions monotones:

Théorème:

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors:
> i) f est croissante ssi: $\forall t \in \mathring{I},\ f'(t) \ge 0$,
> ii) f est décroissante ssi : $\forall t \in \mathring{I},\ f'(t) \le 0$,
> iii) f est constante ssi: $\forall t \in \mathring{I},\ f'(t) = 0$.

Démonstration:

i) Si f est croissante sur I, on a pour $a \in \overset{\circ}{I}$ et tout $x \in I\setminus\{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.
Par prolongement des inégalités, $f'(a) \geq 0$ donc la condition est nécessaire.

Si f' est positive sur $\overset{\circ}{I}$, considérons x et y dans I, avec $x < y$. Comme f est continue sur $[x, y]$ dérivable sur $]x, y[$, ***d'après le théorème des accroissements finis***, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c) \geq 0$ et f est croissante sur I.

ii) il suffit de considérer $-f$.

iii) résulte de la conjonction de (i) et (ii).

b) Fonctions strictement monotones:

Théorème:

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit strictement croissante, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions suivantes:
> $$\begin{cases} ① \ \forall t \in \overset{\circ}{I} \ \ f'(t) \geq 0 \\ ② \ \{t \in \overset{\circ}{I} ; f'(t) = 0\} \text{ est d'intérieur vide.} \end{cases}$$

Démonstration:

Dire que $A = \{t \in \overset{\circ}{I} ; f'(t) = 0\}$ est d'intérieur vide signifie que A ne contient aucun intervalle ouvert.

Les conditions ① et ② sont nécessaires. En effet, si f est strictement croissante, c'est d'une part qu'elle est croissante donc ① et d'autre part f' ne peut s'annuler en tout point d'un intervalle $]a, b[$, $a, b \in I$, $a < b$, car cela signifierait $f(a) = f(b)$, ce qui est incompatible avec une croissance stricte.

Réciproquement, si ① et ② sont vérifiées, alors f est croissante. S'il existait deux points a et b dans I avec $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$, f serait constante sur $[a, b]$ et donc $f'(x) = 0$ pour $x \in]a, b[$ ce qui contredirait ②.

Exemples:

$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x + \cos x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il est essentiel que f soit considérée sur un intervalle.

Si f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, on a:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \text{ mais } \ f(1) = -1 \text{ et } f(-1) = 1.$$

Proposition:

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit strictement décroissante, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions suivantes:
> $$\begin{cases} ① \ \forall t \in \overset{\circ}{I}, \ f'(t) \leq 0 \\ ② \ \{t \in \overset{\circ}{I} ; f'(t) = 0\} \text{ est d'intérieur vide.} \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $-f$.

c) Exemple:

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Etudier les variations de $f : x \mapsto x^3 + px + q$ et en déduire les zéros de $f(x) = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + p$.

Si p > 0, f est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Si p = 0, de même f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	$+\infty$

Si p < 0, $f'(x)$ s'annule pour $-a$ et a, où $a = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, les extrémums m et M sont $m = q + \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et $M = q - \dfrac{2p}{3}\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$, et leur produit est $M\,m = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$.

Si $M\ m < 0$, alors $M > 0$ et $m < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet 3 racines réelles distinctes α, β, γ ; si $M\ m > 0$, M et m ***sont tous les deux strictement positifs ou strictement négatifs***, et l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine réelle.

x	$-\infty$	α		$-a$		β		a		γ	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0		$-$		0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$+\infty$

5- Dérivabilité en une borne de l'intervalle.

a) Théorème:

> Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que f' a une limite l dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors ***f est dérivable en a et f ' (a) = l***. Si f' a une limite infinie quand x tend vers a, ***f n'est pas dérivable en a*** et le graphe a une ***tangente verticale*** au point a.

Ce théorème est une conséquence importante de ***l'égalité des accroissements finis***:

pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in [a, b]$, il existe $c \in]a, a+h[$ tel que :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c), \text{ donc } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h > 0}]{} l$$

et f est donc dérivable en a, $f'(a) = l$.

Exemple: $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \text{Arc sin}\,(1 - x^3)$, est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1]$ par composition et pour tout $x \in]0, 1]$, $g'(x) = -\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2 - x^3}}$.

Comme g' admet une limite nulle quand x tend vers 0, $g'(0) = 0$.

b) Corollaire:

Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et si f' est de classe C^1 sur $]a, b]$ et a une limite réelle en a, alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

S

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ mais f' n'est pas continue en 0 .

Pour $x > 0$ $\quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0,

$f'(0) = 0$ *en utilisant la définition.* (voir 3.a))

c) Prolongement d'une application de classe C^n :

Théorème (dérivées des fonctions prolongées):

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$, $n \in \mathbb{N}$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^n sur $]a, b[$. Si pour tout entier p, $0 \le p \le n$, $f^{(p)}$ admet une limite réelle au point a, alors f se prolonge en une application de classe C^n sur $[a, b[$.

La démonstration se fait par récurrence sur n en utilisant b).

d) Exemple:

L'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, pour $x \in \mathbb{R}^*$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. On voit, *par récurrence sur n*, que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré $3n$ tel que, pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$ $\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La restriction de f à $]0, +\infty[$ ***se prolonge donc en une fonction de classe*** C^∞ sur $[0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Le résultat énoncé s'en déduit aussitôt, puisque f est paire.

D) Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques.

Nous supposerons connues les fonctions circulaires directes: sin, cos, tan, cotan; la fonction exponentielle de base e et le logarithme népérien.

1- Fonctions circulaires réciproques.

a) Fonction Arc sin:

La fonction sin induit un homéomorphisme de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$, car elle est strictement croissante sur cet intervalle.

Définition:

On appelle Arc sinus et on note «Arc sin» l'homéomorphisme réciproque. Cette application est donc strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et définie par:

$$\begin{cases} y = \text{Arc}\sin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Proposition:

Arc sin est une application de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, impaire, de dérivée donnée pour tout x de $]-1, 1[$ par:

$$(\text{Arc}\sin)'(x) = \frac{d}{dx}(\text{Arc}\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration:

En appliquant les théorèmes vus précédemment, Arc sin est un homéomorphisme (par A-3.b)) et est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ (par B-3.b.v)).

Pour le calcul de la dérivée, si $x \in\ ]-1, 1[$, $y = \text{Arc}\sin x \in\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos y > 0$,

donc $\quad \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ et

$$(\text{Arc}\sin)'\,x = \frac{1}{\sin'(\text{Arc}\sin x)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Fonction Arc cos:

La fonction cos induit un homéomorphisme de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Cet homéomorphisme est strictement décroissant.

Définition:

On appelle Arc cosinus et on note «Arc cos» l'homéomorphisme strictement décroissant de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$ défini par:

$$\begin{cases} y = \text{Arc}\cos x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

Proposition:

Arc cos est une application de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, de dérivée donnée pour tout x de $]-1, 1[$ par:

$$(\text{Arc}\cos)'(x) = \frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} (x \in [-1, 1] \text{ et } y = \text{Arc}\cos x) &\iff (y \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos y) \\ &\iff \left(\frac{\pi}{2} - y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \sin(\frac{\pi}{2} - y)\right) \\ &\iff (x \in [-1, 1] \text{ et } y = \frac{\pi}{2} - \text{Arc}\sin x). \end{aligned}$$

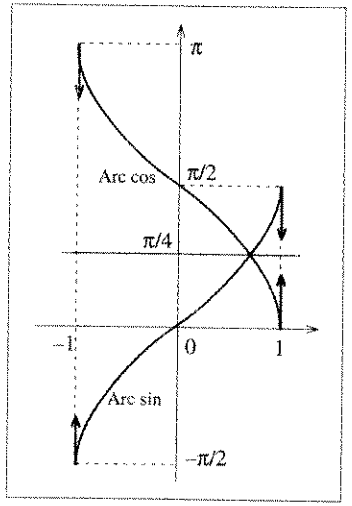
Il en résulte immédiatement que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\boxed{\textbf{Arc cos } x + \textbf{Arc sin } x = \frac{\pi}{2}}$$

Représentation graphique:

La droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la réunion des deux graphes.

Noter les demi-tangentes verticales aux points d'abscisses -1 et 1.



c) Fonction Arc tan:

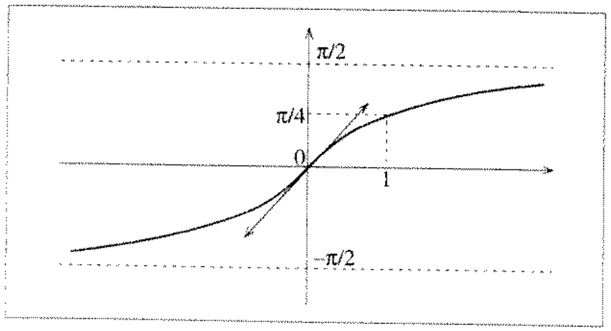
La fonction tan induit un homéomorphisme strictement croissant de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, puisque $\frac{d}{dx} \tan x = 1 + (\tan x)^2 > 0$.

Définition:

On appelle Arc tangente et on note Arc tan l'homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ défini par:

$$\begin{cases} y = \text{Arc}\tan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Représentation graphique:



Proposition:

Arc tan est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, impaire, de dérivée donnée pour tout x réel, par:

$$(\text{Arc}\tan)'\, x = \frac{d}{dx}\,(\text{Arc}\tan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En effet, l'application est de classe C^∞ (d'après B-3.b)) et

$$(\text{Arc}\tan)'\, x = \frac{1}{\tan'(\text{Arc}\tan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arc}\tan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

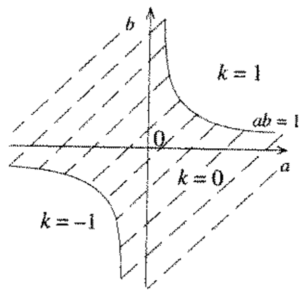
Proposition:

i) Pour tout x réel non nul,

$$\textbf{Arc tan } x + \textbf{Arc tan } \frac{1}{x} = \varepsilon\, \frac{\pi}{2} \qquad \text{avec } \begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

ii) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a\,b \neq 1$,

$$\textbf{Arc tan } a + \textbf{Arc tan } b = \textbf{Arc tan } \frac{a+b}{1-ab} + k\,\pi$$



$k = 0$ si $a\,b < 1$

$k = 1$ si $a\,b > 1$ et $a > 0$

$k = -1$ si $a\,b > 1$ et $a < 0$

Pour établir i) on peut utiliser la relation

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ [mod } \pi],$$

ou constater que $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par:

$$g(x) = \text{Arc}\tan x + \text{Arc}\tan \frac{1}{x}$$

a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ donc ***g est constante sur chaque intervalle*** $\mathbb{R}^{*+}$ **et** $\mathbb{R}^{*-}$.

La relation ii) provient de $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ pour $\alpha + \beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, où $\alpha = \text{Arc}\tan a$ et $\beta = \text{Arc}\tan b$ sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'après i), $\alpha + \beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ équivaut à $a\,b \neq 0$. Comme $\alpha + \beta$ est dans $]-\pi, \pi[\setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, k ne peut prendre que les valeurs -1, 0 ou 1. La discussion est immédiate.

2- Fonctions hyperboliques directes.

a) Définition de ch, sh, th:

Définition:

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est la partie paire de l'exponentielle de base e, et la fonction sinus hyperbolique, notée sh, est sa partie impaire.
La fonction tangente hyperbolique, notée th, est égale à $\frac{\text{sh}}{\text{ch}}$. Elle est impaire.

Pour tout x réel, on a $\text{ch}\, x = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$ et $\text{sh}\, x = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$, donc,

$$\boxed{\begin{cases} \textbf{ch}\, x + \textbf{sh}\, x = e^x \\ \textbf{ch}\, x - \textbf{sh}\, x = e^{-x} \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\textbf{ch}^2 x - \textbf{sh}^2 x = 1}$$

Pour tout x réel, $\text{ch}\, x > 0$ et $\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

De ces relations, on déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\boxed{-1 < \textbf{th}\, x < 1 \leq \textbf{ch}\, x}$

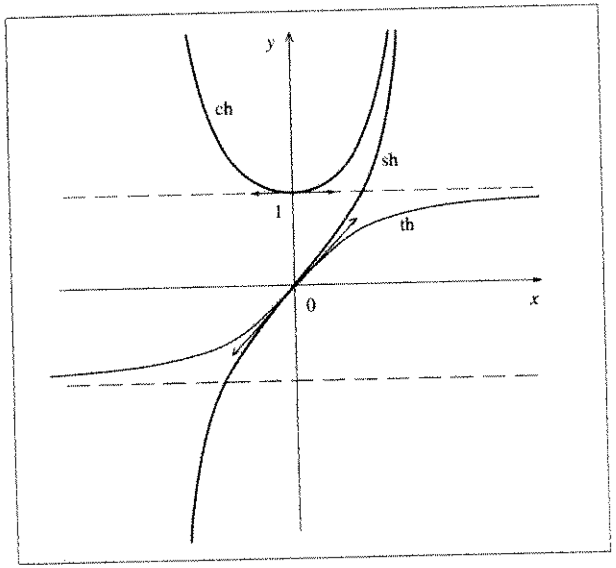
b) Propriétés:

Proposition:

Les applications ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées:

$$\text{ch}' = \text{sh},\ \ \text{sh}' = \text{ch},\ \ \text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2.$$

Par application des théorèmes du B-3.b), ch, sh et th sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.



La courbe de ch s'appelle une chaînette. C'est la figure d'équilibre d'un fil pesant.

Les tableaux de variation des 3 fonctions sont:

x	$-\infty$	0	∞
sh' x	+	1	+
sh x	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	∞
ch' x	−	0	+
ch x	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	∞
th' x	+	1	+
th x	-1 ↗	0	↗ 1

Les courbes représentatives des fonctions ch et sh sont asymptotes au voisinage de $+\infty$, car $\text{ch}\, x - \text{sh}\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. De plus on a pour tout $x > 0$, $\text{th}\, x < \text{sh}\, x < \text{ch}\, x$, et pour tout $x < 0$, $\text{sh}\, x < \text{th}\, x < \text{ch}\, x$, ce qui donne la position respective des trois courbes représentatives:

c) Trigonométrie hyperbolique:

Formulaire de trigonométrie hyperbolique:

Pour tous les réels a, b, p, q, x, nous obtenons les formules:

Formules d'addition:

$$\text{ch}\,(a + b) = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b$$
$$\text{sh}\,(a + b) = \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{ch}\, a\, \text{sh}\, b$$
$$\text{th}\,(a + b) = \frac{\text{th}\, a + \text{th}\, b}{1 + \text{th}\, a\, \text{th}\, b}$$

Formules de linéarisation:

$$\text{ch}\, a\, \text{ch}\, b = \frac{1}{2}(\text{ch}\,(a + b) + \text{ch}\,(a - b))$$
$$\text{sh}\, a\, \text{sh}\, b = \frac{1}{2}(\text{ch}\,(a + b) - \text{ch}\,(a - b))$$
$$\text{sh}\, a\, \text{ch}\, b = \frac{1}{2}(\text{sh}\,(a + b) + \text{sh}\,(a - b))$$

Formules de factorisation:

$$\text{ch}\, p + \text{ch}\, q = 2\, \text{ch}\, \frac{p+q}{2}\, \text{ch}\, \frac{p-q}{2}$$
$$\text{ch}\, p - \text{ch}\, q = 2\, \text{sh}\, \frac{p+q}{2}\, \text{sh}\, \frac{p-q}{2}$$
$$\text{sh}\, p + \text{sh}\, q = 2\, \text{sh}\, \frac{p+q}{2}\, \text{ch}\, \frac{p-q}{2}$$
$$\text{sh}\, p - \text{sh}\, q = 2\, \text{ch}\, \frac{p+q}{2}\, \text{sh}\, \frac{p-q}{2}$$

Formules de duplication:

$$\text{ch}\, 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = 2\text{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\text{sh}^2 x$$
$$\text{sh}\, 2x = 2\, \text{sh}x\, \text{ch}x$$
$$\text{th}\, 2x = \frac{2\text{th}x}{1 + \text{th}^2 x}$$

En fonction de $t = \text{th}\, \frac{x}{2}$:

$$\text{ch}\, x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$
$$\text{sh}\, x = \frac{2t}{1 - t^2}$$
$$\text{th}\, x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

3- Fonctions hyperboliques réciproques.

a) Fonction Arg sh:

La fonction sh est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition:

On appelle argument sinus hyperbolique et on note «Arg sh» l'homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ défini par:

$$\begin{cases} y = \text{Arg sh}\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{sh}\, y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proposition:

i) Arg sh est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, impaire, de dérivée donnée pour tout x réel par:

$$(\text{Arg sh})'\, x = \frac{d}{dx}\,(\text{Arg sh}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ii) Pour tout x réel, $\text{Arg sh}\, x = \ln\,(x + \sqrt{x^2+1}\,)$.

La classe C^∞ vient toujours du B-3.b).

L'expression de la dérivée vient de la relation $\text{ch}\, t = \sqrt{1+\text{sh}^2\, t}$ qui donne:

$$e^t = \text{ch}\, t + \text{sh}\, t = \text{sh}\, t + \sqrt{1+\text{sh}^2\, t} \quad \text{et} \quad \text{Arg sh}\, x = \ln\,(x + \sqrt{x^2+1}).$$

b) Fonction Arg ch:

La fonction ch induit un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.

Définition:

On appelle argument cosinus hyperbolique et on note «Arg ch» l'homéomorphisme strictement croissant de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ défini par:

$$\begin{cases} y = \text{Arg ch}\, x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{ch}\, y \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Proposition:

i) Arg ch est une application de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, de dérivée donnée pour tout $x > 1$ par:

$$(\text{Arg ch})'\, x = \frac{d}{dx}\,(\text{Arg ch}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

ii) Pour tout $x \geq 1$ $\text{Arg ch}\, x = \ln\,(x + \sqrt{x^2-1}\,)$.

c) Fonction Arg th:

La fonction th induit un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Définition:

On appelle argument tangente hyperbolique et on note «Arg th» l'homéomorphisme strictement croissant de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$ défini par:

$$\begin{cases} y = \text{Arg th}\, x \\ x \in\,]-1, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{th}\, y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proposition:

i) Arg th est une application de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, impaire, de dérivée donnée pour tout $x \in\,]-1, 1[$ par:

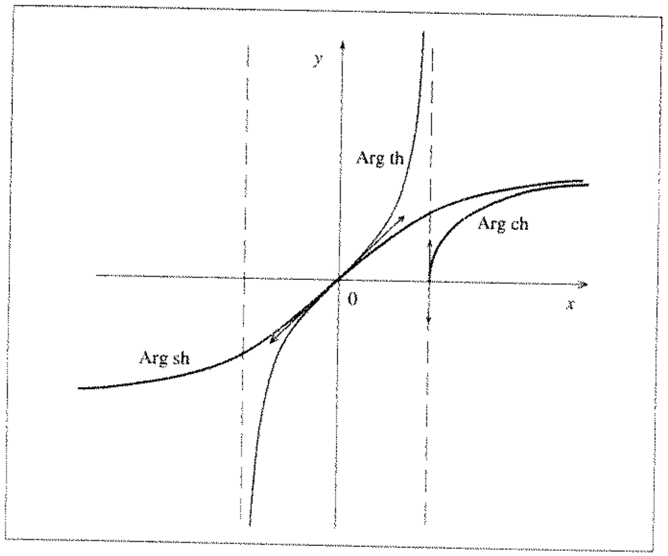
$$\text{Arg th}'\, x = \frac{1}{1-x^2}.$$

ii) Pour tout $x \in\,]-1, 1[$ $\text{Arg th}\, x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\begin{cases} x = \text{th}\, t = \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2t} = \dfrac{1+x}{1-x} \\ x \in\,]-1, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \\ x \in\,]-1, 1[. \end{cases}$$

Notons que l'application Arg th est donc la restriction à $]-1, 1[$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ dérivable en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ de dérivée $\dfrac{1}{1-x^2}$.

d) Représentations graphiques:



4- Tableau des dérivées des fonctions usuelles.

paramètre	$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_f \setminus D_{f'}$
$n \in \mathbb{N}^*$	x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$n \in \mathbb{Z}^{*-}$	x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$	
$\alpha \in \mathbb{R}^*$	x^α	$\alpha\,x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{*+}$	
$c \in \mathbb{C}$	e^{cx}	$c\,e^{cx}$	$\mathbb{R}$	
$a \in \mathbb{R}^{*+}$	a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	
	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	
$a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$	
	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathbb{R}$	
	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathbb{R}$	
	$\mathrm{th}\,x$	$1-\mathrm{th}^2\,x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$	$\mathbb{R}$	
	$\mathrm{Arg\,ch}\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1, +\infty[$	$\{1\}$
	$\mathrm{Arg\,sh}\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	
	$\mathrm{Arg\,th}\,x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$	
	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	
	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	
	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{Z})$	
	$\mathrm{cotan}\,x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$	
	$\mathrm{Arc}\cos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$\{-1, 1\}$
	$\mathrm{Arc}\sin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	$\{-1, 1\}$
	$\mathrm{Arc}\tan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$	$\dfrac{a\,d-b\,c}{(c\,x+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$	

Remarque:
L'expression des dérivées faisant intervenir une exponentielle complexe est justifiée dans le livre d'Algèbre.

E) Fonctions convexes.

1- Partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

a) Segment de $\mathbb{R}^n$:

Définition:
Soit x et y deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment, d'extrémité x et y, l'ensemble noté $[x, y]$, des points $t\,x + (1-t)\,y$, où $t \in [0, 1]$.

b) Convexe de $\mathbb{R}^n$:

Définition:
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est convexe si pour tout couple (x, y) de points de A, le segment $[x, y]$ est inclus dans A.

Propriété caractéristique:

Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ soit convexe, il faut et il suffit que tout entier $p \geq 2$, pour toute suite finie $(x_1, .., x_p)$ de points de A et toute suite finie $(\alpha_1, ... \alpha_p)$ de nombres réels positifs de somme égale à 1, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,x_i$ soit élément de A.

Démonstration:
La condition est suffisante car en prenant $p = 2$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, pour tout $(x_1, x_2) \in A^2$, $\alpha_1\,x_1 + (1-\alpha_1)\,x_2 \in A$ donc $[x_1, x_2]$ est contenu dans A et A est convexe.
La condition est nécessaire. Soit A convexe et $\mathcal{P}(p)$ la condition énoncée.
$\mathcal{P}(2)$ est vraie par hypothèse. Pour p donné ≥ 3, supposons vraie $\mathcal{P}(p-1)$.

Soit $(\alpha_1, .., \alpha_p) \in \mathbb{R}^{+p}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, et $(x_1, .., x_p) \in A^p$. Posons $S = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i$.

Si $S = 0$, alors $\alpha_p = 1$ et $\alpha_p\,x_p \in A$.

Si $S > 0$, posons $\mu_i = \dfrac{\alpha_i}{S}$ pour $i \in [1, p-1]$. L'hypothèse de récurrence assure que

$y = \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i\,x_i \in A$ mais alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,x_i = S\,y + (1-S)\,x_p \in A$, puisque A est convexe.

Donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

2- Fonctions convexes.

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

a) Graphe et épigraphe d'une fonction:

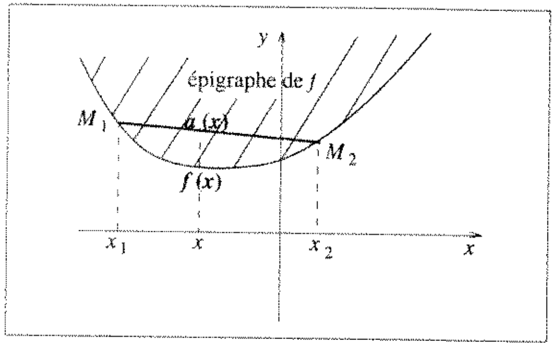
Définition:
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On appelle ***graphe*** de f l'ensemble des couples $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ tels que $y = f(x)$.
On appelle ***épigraphe*** de f l'ensemble des couples $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ tels que $y \geq f(x)$.

b) Fonctions convexes:

Définitions:

i) Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que ***f est convexe*** si son ***épigraphe est convexe***.

ii) Si f est une application de D dans $\mathbb{R}$ et si $I \subset D$, on dit que f est convexe sur I si $f_{|I}$ est convexe.



Conséquence de la définition:

Si f est convexe, toute corde de $[M_1, M_2]$ est au dessus de l'arc du graphe de f d'extrémités M_1 et M_2, ou encore tout arc du graphe de f est situé sous la corde qui le sous-tend. Cette propriété se traduit par:

pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$,

$$\boxed{(1)\ f(t\,x_1 + (1-t)\,x_2) \leq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2)}$$

Démonstration:

Soit a la fonction affine coïncidant avec f aux points x_1 et x_2. L'inégalité (1) s'écrit pour tout $x \in [x_1, x_2]$, $f(x) \leq a(x)$.

Réciproquement, soit f une fonction vérifiant l'inégalité (1) pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et tout réel $t \in [0, 1]$.

Soit P_1 et P_2 deux points quelconques de l'épigraphe de f d'abscisses respectives x_1 et x_2 et d'ordonnées respectives y_1 et y_2: $y_i \geq f(x_i)$, pour $i \in [1, 2]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $M = t\,M_1 + (1-t)\,M_2 = (x, y)$ avec $x = t\,x_1 + (1-t)\,x_2$, $y = t\,y_1 + (1-t)\,y_2$.

$$f(x) = f(t\,x_1 + (1-t)\,x_2) \leq t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2) \leq t\,y_1 + (1-t)\,y_2$$

car t et $1-t$ sont ≥ 0, donc $f(x) \leq y$ et M appartient à l'épigraphe de f, qui est donc convexe.

Théorème 1:

Pour qu'une application f de I dans $\mathbb{R}$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout couple $(x, x') \in I^2$ et tout nombre réel $t \in [0, 1]$,

$$(1)\ f(t\,x + (1-t)\,x') \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(x')$$

Définition:

On dit que f fonction définie sur I à valeurs réelles est concave si $-f$ est convexe.

Remarque:

Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

Théorème 2:

Pour qu'une application f de I dans $\mathbb{R}$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout entier $p \geq 2$, pour tout $(x_1, .., x_p) \in I^p$, et pour tout $(\alpha_1, .., \alpha_p) \in \mathbb{R}^{+p}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1,\quad f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,f(x_i)$$

Ce critère s'obtient par récurrence sur p.

c) Inégalité des pentes:

Théorèmes:

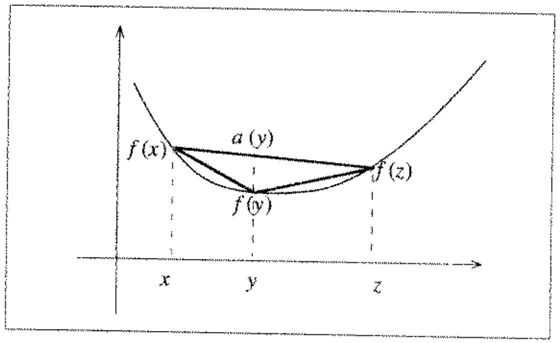
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

i) f est convexe sur I,

ii) pour tout x, y, z de I tels que $x < y < z$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

iii) pour tout u de I, la fonction p_u définie sur $I \setminus \{u\}$ par $p_u(x) = \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u}$, est croissante sur $I \setminus \{u\}$.



Démonstration:

La démonstration est circulaire: i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i).

① ***Supposons f convexe sur I.*** Si a est la fonction affine qui coïncide avec f en x et z, $f(y) \leq a(y)$. Donc:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{a(y)-a(x)}{y-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

la première égalité résultant du caractère affine de a.

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(y)}{z-y} \leq \frac{a(z)-f(y)}{z-y},$$

car $z - y > 0$ et $f(y) \leq a(y)$, d'où la deuxième inégalité établie, et nous venons d'établir i) $\Rightarrow$ ii).

② iii) se déduit de ii) en remplaçant le triplet (x, y, z) par (t_1, t_2, u), (t_1, u, t_2), (u, t_1, t_2). Dans tous les cas, nous obtenons $t_1 < t_2 \Rightarrow p_u(t_1) \leq p_u(t_2)$.

③ Pour établir iii) $\Rightarrow$ i), partons de x, y, z de I tels que $x < y < z$.

En choisissant $u = x$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Appelons a la fonction affine qui coïncide avec f en x et z:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{a(y)-a(x)}{y-x},$$

donc, $f(y) - f(x) \leq a(y) - a(x)$, car $y - x > 0$.

Or, $f(x) = a(x)$, donc pour tout $y \in]x, z[$, $f(y) \leq a(y)$: ***l'arc est sous la corde qui le sous-tend*** et f est convexe sur I.

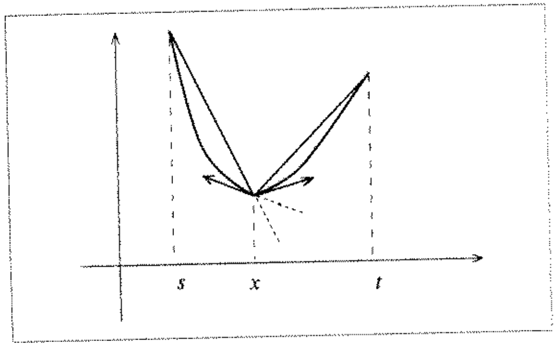
3- Convexité et dérivabilité.

a) Proposition:

Soit I un intervalle ouvert et f une application convexe de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable à droite et à gauche sur I et par conséquent est continue.
De plus, pour tout x de I et tout s, t de I tel que $s < x < t$,

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Les applications f'_d et f'_g sont croissantes.



Démonstration:

Soit $x \in I$. Pour tout couple $(s, t) \in I^2$ tel que $s < x < t$, $\dfrac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

De plus, $p_x : t \mapsto \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est ***croissante*** sur $I \cap]x, +\infty[$ et $q_x : s \mapsto \dfrac{f(x)-f(s)}{x-s}$ est ***croissante*** sur $]-\infty, x[\cap I$.

Fixons d'abord s: le *théorème de la limite monotone* montre que p_x a une limite à droite au point x donc $f'_d(x)$ existe et $\dfrac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq f'_d(x) \leq \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

q_x est donc majorée par $f'_d(x)$.

En appliquant à nouveau le théorème de la limite monotone, nous voyons que q_x a une limite à gauche au point x donc $f'_g(x)$ existe et

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Cela prouve aussi ***la croissance de f_g' et de f_d'***. En effet, si $(y, z) \in I^2$, avec $y < z$, pour tout u de $]y, z[$, on peut écrire:

$$f_g'(y) \leq f_d'(y) \leq \frac{f(u)-f(y)}{u-y} \leq \frac{f(z)-f(u)}{z-u} \leq f_g'(z) \leq f_d'(z).$$

b) Fonction convexe dérivable:

Théorème:

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une application f dérivable de I dans $\mathbb{R}$ est convexe ssi sa dérivée f' est croissante sur I.

Démonstration:

Condition nécessaire:

Si f est convexe et dérivable sur I, alors pour $a < b$ et $a < x < y < b$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b},$$

d'où $f'(a) \leq f'(b)$ par prolongement des inégalités pour $x \xrightarrow[x>a]{} a$ et $y \xrightarrow[y<b]{} b$, sur $\overset{\circ}{I}$.

Condition suffisante:

Supposons f' croissante sur I, et considérons $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$, et $t \in [0, 1]$.

Pour tout $x \in [a, b]$, posons $g(x) = t f(a) + (1-t) f(x) - f(t a + (1-t) x)$.

Puisque f est dérivable, g l'est aussi et $g'(x) = (1-t)\,[f'(x) - f'(t a + (1-t) x)]$.

Comme f' est croissante sur I et $x \geq a$, on a $g'(x) \geq 0$, donc ***g est croissante sur $[a, b]$***, et comme $g(a) = 0$, g est positive sur $[a, b]$, et en particulier $g(b) \geq 0$, soit:

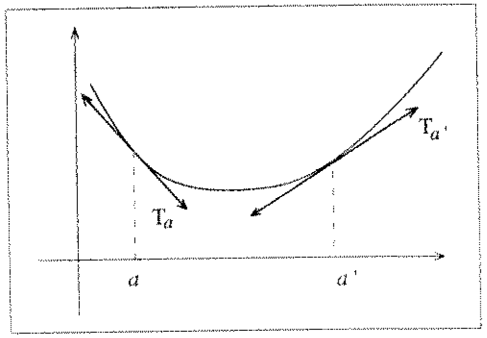
$$t f(a) + (1-t) f(b) - f(t a + (1-t) b) \geq 0.$$

Cette relation vraie pour tout (a, b) de I^2 prouve la convexité de f.

Corollaire 1:

Si f est une application convexe et dérivable de I dans $\mathbb{R}$, son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration:



Soit $a \in I$.

Si $t < a$ alors $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \leq f'(a)$,

si $t > a$ alors $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq f'(a)$.

Donc, pour tout t de I,

$$f(t) - f(a) \geq (t-a) f'(a),$$

soit:

$$f(t) \geq f(a) + (t-a) f'(a).$$

Corollaire 2:

> Une application f deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$, est convexe ssi sa dérivée seconde f'' est positive. Elle est concave ssi f'' est négative.

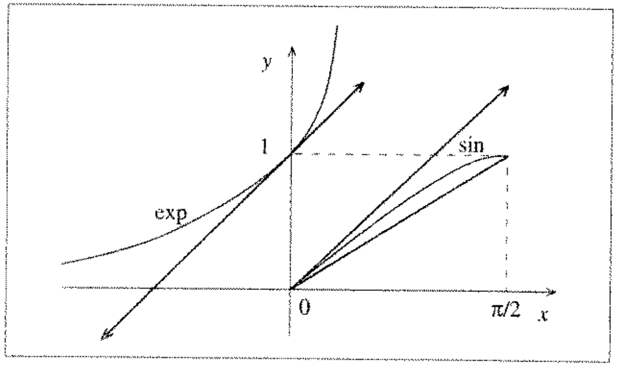
Exemples:

$x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$,

$x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$,

$x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

On en déduit quelques inégalités de convexité:



$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x,$$
$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \tfrac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$$

Pour tous $n \geq 2$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{*+^n}$, si $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sont dans $\mathbb{R}^{+^n}$, tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, on a $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\ x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i\ \ln(x_i)$, car ln est concave.

On en déduit l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i}$$

et en particulier $\boxed{\sqrt[n]{x_1 x_2 .. x_n} \leq \frac{1}{n}\ (x_1 + x_2 + .. + x_n)}$

TRAVAUX DIRIGES

1- Egalité de *Taylor-Lagrange*

a) Soit f une application de classe C^n de $[a, b]$ ($a < b$ ou $a > b$) dans $\mathbb{R}$, telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

***Indication*: on pourra utiliser la fonction auxiliaire φ définie par**

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - A\ \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$ **où A est une constante bien choisie.**

b) En déduire l'inégalité $e^x > \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x > 0$ et tout n entier naturel.

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ telle que $f''(a) = .. = f^{(n)}(a) = 0$ et $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.

Montrer que pour h assez petit et > 0, il existe un unique $\theta_h \in\ ]0, 1[$ tel que:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta_h h).$$

Etudier la limite de θ_h quand h tend vers 0.

d) Soit f une application de classe C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$, sur $[a, b]$ à valeurs réelles, telle que $f^{(n+1)}$ soit strictement monotone sur $[a, b]$.

d-1) Prouver que pour tout $h \in\ ]0, b-a]$ il existe un unique réel θ appartenant à $]0, 1[$ tel que:

$$(1)\ f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + .. + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h).$$

d-2) On suppose que f est de classe C^{n+2}, que $f^{(n+1)}(a) = 0$ et que $f^{(n+2)}(a) \neq 0$.

Montrer que l'application qui, à tout point h de $]0, b-a]$ associe l'unique nombre θ satisfaisant à (1), admet une limite réelle non nulle lorsque h tend vers 0 et calculer cette limite.

d-3) *Application*: calculer θ lorsque f est une fonction polynômiale de degré $n + 2$ puis lorsque f est l'exponentielle.

Solution:

a) Pour $n = 0$, nous reconnaissons *l'égalité des accroissements finis*: f est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(c).$$

Pour établir l'égalité voulue pour tout n, nous allons utiliser la fonction φ en choisissant

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$ de telle sorte que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

L'application φ est continue sur $[a, b]$ puisque f est de classe C^n sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$ puisque $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.
Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$, d'après le *théorème de Rolle*, il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \right] + A \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

Le terme général de la somme est de la forme $u_{k+1} - u_k$, avec $u_k = \dfrac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)$,

donc, $\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$, il vient alors,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left(\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - f'(t) \right) + A \frac{(b-t)^n}{n!}$$

$$\varphi'(c) = -\frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A \frac{(b-c)^n}{n!}$$

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(c)),\ c \in\ ]a, b[.$$

Il en résulte, comme $b - c \neq 0$ que $A = f^{(n+1)}(c)$ et nous avons établi l'égalité voulue, appelée ***égalité de Taylor-Lagrange***.

b) Appliquons le résultat à la fonction exponentielle sur $[0, x]$ $(x > 0$ ou $x < 0)$.
Il existe $c \in\ ]0, x[$ tel que:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \text{ donc } e^x > \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout } x > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) Supposons par exemple, $f^{(n+1)}(a) > 0$.
Puisque $f^{(n+1)}$ est continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in\ ]a, a+\alpha[,\ f^{(n+1)}(t) > 0$.
$f^{(n)}(t)$ reste aussi strictement positif car, en appliquant l'égalité des *accroissements finis*, il existe $c \in\ ]a, t[\ \subset\ ]a, a+\alpha[$ tel que:
$f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) = (t-a) f^{(n+1)}(c)$. Or, $f^{(n)}(a) = 0$, donc $f^{(n)}(t) > 0$.
Compte tenu de $f^{(n)}(a) = .. = f''(a) = 0$, on en déduit que, $\forall t \in\ ]a, a+\alpha[,\ f''(t) > 0$, et ***f ' est strictement croissante***, donc injective sur $[a, a+\alpha[$ d'où l'unicité de θ_h, l'existence venant de l'égalité des accroissements finis.

Appliquons l'égalité de Taylor-Lagrange à f: il existe $c \in\ ]a, a+h[$ tel que:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

et appliquons-la à f ': il existe $c_1 \in\ ]a, a+\theta_h h[$ tel que:

$$f'(a + \theta_h h) = f'(a) + \theta_h^n \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(c_1).$$

Il en résulte que:

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$h f'(a + \theta_h h) = h \left[f'(a) + \theta_h^n \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(c_1) \right], \text{ d'où,}$$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{h^{n+1}}{n!} \theta_h^n f^{(n+1)}(c_1).$$

Or, $h \neq 0$, $\theta_h^n = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{f^{(n+1)}(c_1)} > 0$.

Donc, $\theta_h = \left(\dfrac{1}{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{f^{(n+1)}(c_1)} \right)^{1/n}$, et compte tenu de la continuité de $f^{(n+1)}$ sur $]a, b[$:

$$\boxed{\theta_h \xrightarrow[h \to 0]{} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1/n}}$$

d-1) $f^{(n+1)}$ étant strictement monotone sur $[a, b]$, sa restriction à $[a, b]$ est injective donc, si deux réels θ_1 et θ_2 vérifient $f^{(n+1)}(a + \theta_1 h) = f^{(n+2)}(a + \theta_2 h)$, il en résulte que $\theta_1 h = \theta_2 h$, soit $\theta_1 = \theta_2$ puisque $h \neq 0$, ce qui assure l'unicité de θ, vérifiant (1).
L'existence de θ résulte de l'égalité de Taylor-Lagrange.

d-2) Soit θ tel que:

$$f^{(n+1)}(a + \theta h) = \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \left[f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right]$$

En appliquant l'égalité des accroissements finis à $f^{(n+1)}$ entre a et a + θ h, on obtient l'existence de $c \in\ ]a, a+\theta h[$ tel que:

$$f^{(n+1)}(a + \theta h) = f^{(n+1)}(a) + \theta h f^{(n+2)}(c) = \theta h f^{(n+2)}(c).$$

La *formule de Taylor-Lagrange* appliquée à f à l'ordre $n+1$ donne l'existence de $c_1 \in\ ]a, a+h[$ tel que:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} + h^{n+2} \frac{f^{(n+2)}}{(n+2)!}(c_1). \text{ Donc,}$$

$$\theta h f^{(n+2)}(c) = \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \left[\frac{h^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(c_1) \right] \text{ d'où,}$$

$$\theta f^{(n+2)}(c) = \frac{1}{n+2} f^{(n+2)}(c_1).$$

Ce qui donne, puisque $f^{(n+2)}(a) \neq 0$, ***grâce à la continuité de $f^{(n+2)}$***:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{n+2}}$$

d-3) ***Application:***
P est une fonction polynômiale de degré $n+2$.

$$P(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} P^{(n+1)}(a + \theta h).$$

D'après la *formule de Taylor* pour les polynômes,

$$P(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} P^{(n+1)}(a) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} P^{(n+2)}(a), \text{ d'où}$$

$$P^{(n+1)}(a + \theta h) = P^{(n+1)}(a) + \frac{h}{n+2} P^{(n+2)}(a). \text{ Or,}$$

$P^{(n+1)}(a + \theta h) - P^{(n+1)}(a) = \theta h P^{(n+2)}(c)$, avec c strictement compris entre a et $a + \theta h$. Or, $P^{(n+2)}$ est une constante non nulle. On obtient:

$$\boxed{\theta = \frac{1}{n+2}}$$