# III. INTÉGRALES ET PRIMITIVES

## A) Construction et propriétés de l'intégrale.

### 1- L'intégrale des fonctions en escalier.

Dans ce paragraphe, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

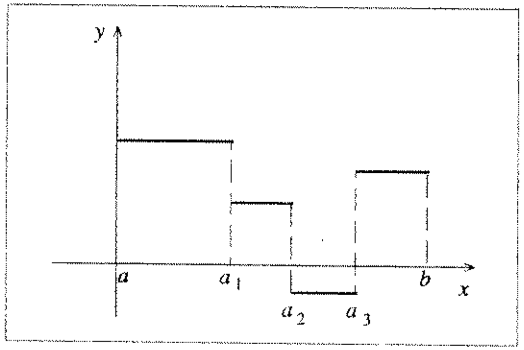
#### a) Définition:

On rappelle qu'une ***subdivision de*** $[a, b]$ est une famille finie $(a_i)_{0 \le i \le n}$ de points de $[a, b]$ vérifiant les deux conditions:

i) $a_0 = a$, $a_n = b$.

ii) Si $1 \le i \le n$, $a_{i-1} < a_i$ (voir D-5.b) dans le chapitre I).

Si $f$ appartient à l'espace $\mathcal{E}$ des applications en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on dit que la subdivision $\alpha : a_0 = a < a_1 < .. < a_n = b$ de $[a, b]$ ***est adaptée à f*** si $f$ est constante sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ , $1 \le i \le n$.




On notera que cette définition n'impose rien quant à la valeur de $f$ aux points de subdivision $a_i$ pour $1 \le i \le n$. Si $f$ admet $(a_i)_{0 \le i \le n}$ comme subdivision adaptée et si $\lambda_i$ est la valeur de $f$ sur $]a_{i-1}, a_i[$ pour $1 \le i \le n$, ***on définit l'intégrale de f sur*** $[a, b]$ par la formule:

$$\boxed{\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1})}$$

### b) Cohérence de la définition:

Il convient de vérifier que la définition de l'intégrale est cohérente, c'est à dire ***qu'elle ne dépend pas de la subdivision choisie.***

Pour cela, on adopte la notation provisoire $I_\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ (a_i - a_{i-1})$ et on se propose de démontrer que si $\alpha$ et $\beta$ sont deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à $f$, on a $I_\alpha(f) = I_\beta(f)$.

Commençons par le cas où $\beta : b_0 = a < b_1 < .. < b_m = b$ est une subdivision de $[a, b]$ ***plus fine que*** $\alpha$.

On a donc $\forall j \in [0, m]$, $b_j \in \{a_i\,;\, 0 \le i \le n\}$ et en particulier $m \ge n$.

***On raisonne par récurrence sur*** $m - n$. Si $b_j \notin \{a_i\,;\, 0 \le i \le n\}$, il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $b_j \in ]a_{i_0-1}, a_{i_0}[$ et on a alors $]b_{j-1}, b_{j+1}[ \subset ]a_{i_0-1}, a_{i_0}[$, donc $f$ est constante (égale à $\lambda_{i_0}$) sur l'intervalle $]b_{j-1}, b_{j+1}[$.

Il en résulte immédiatement que si $\beta'$ est la subdivision ***déduite de $\beta$ en supprimant le point $b_j$***, on a $I_\beta(f) = I_{\beta'}(f)$, alors que la subdivision $\beta'$ a un point de moins que $\beta$.
Par récurrence descendante sur $m - n$, on en déduit que $I_\alpha(f) = I_\beta(f)$.

Si maintenant $\alpha$ et $\beta$ sont deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à $f$, on sait que $\gamma = \alpha \cup \beta$ est encore une subdivision de $[a, b]$ ***adaptée à $f$ plus fine que $\alpha$ et $\beta$***, et on déduit de l'étude précédente que:

$$I_\alpha(f) = I_\gamma(f) = I_\beta(f).$$

### c) Propriétés immédiates:

***Linéarité:***

> L'application $f \mapsto \int_a^b f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

***Positivité:***

> Si $f \in \mathcal{E}$ est positive sur $[a, b]$, $\int_a^b f \ge 0$.
>
> Par suite, si $f$ et $g$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $f \ge g$ sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.
>
> En particulier, pour toute $f$ dans $\mathcal{E}$, $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

***Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration:***

> Si $a < c < b$, et si $f \in \mathcal{E}$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

***N.B:*** Dans cette formule $\int_a^c f$ désigne $\int_a^c f_{|[a,c]}$.



***Démonstrations:***

1- Soit $f$ et $g$ dans $\mathcal{E}$, $\mu$ dans $\mathbb{R}$. Si $\alpha : a_0 = a < a_1 < .. < a_n = b$ est une subdivision adaptée à $f$, $\beta : b_0 = a < b_1 < .. < b_m = b$ une subdivision adaptée à $g$, $\gamma = \alpha \cup \beta$ est une nouvelle subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à $f$ et à $g$.

En calculant $\int_a^b (f + \mu g)$ au moyen de cette subdivision $\gamma$, on obtient:

$$\int_a^b (f + \mu g) = \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

2- Si $f$ est dans $\mathcal{E}$ et positive, l'inégalité $\int_a^b f \ge 0$ résulte directement de la définition.
Le second point s'en déduit par linéarité. Pour obtenir la troisième inégalité, il suffit d'utiliser la seconde à partir de l'encadrement $-|f| \le f \le |f|$.

3- Il suffit calculer $\int_a^b f$ à partir d'une subdivision adaptée à $f$ et contenant $c$ pour obtenir la formule d'additivité.

## 2- L'intégrale des fonctions continues par morceaux.

### a) Définition:

> Soit $\mathcal{CM}$ l'espace des applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
> Si $f \in \mathcal{CM}$, on sait (d'après le D-5.d) du chapitre I) que $f$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$. On va montrer:
>
> i) que la suite réelle $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
>
> ii) que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de $\mathcal{E}$ convergeant vers $f$ uniformément sur $[a, b]$, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n$.
>
> Ceci légitime la définition de $\int_a^b f$ comme $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

***Démonstrations:***

Pour le premier point, on montre que la suite réelle $\left(\int_a^b f_n\right)$ est de *Cauchy*.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N$ tel que: $\forall n \ge N$, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.
Alors, pour $p \ge N$ et $q \ge N$, on a:

$$\forall x \in [a, b],\ |f_p(x) - f_q(x)| \le |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \le 2\varepsilon, \text{ donc:}$$

$$\left|\int_a^b f_p - \int_a^b f_q\right| \le 2\varepsilon\,(b - a),$$

et la suite est bien une *suite de Cauchy*.

Pour le second point, il suffit de noter la majoration:

$$\forall x \in [a, b],\ |f_n(x) - g_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - f(x)|.$$

Alors, $\varepsilon > 0$ étant fixé, les hypothèses de convergence uniforme impliquent qu'existe un entier $N$ tel que:

$\forall\, n \geq N,\ \forall\, x \in [a, b],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et $|g_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'où, si $n \geq N$, $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b g_n \right| \leq \int_a^b |f_n - g_n| \leq 2\varepsilon\,(b - a)$.

***Remarque:***

La valeur de $\int_a^b f$ ne change pas si on modifie les valeurs de $f$ aux bornes (propriété transmise des fonctions en escalier).

## b) Propriétés immédiates:

Les théorèmes sur les limites de suites permettent d'obtenir les mêmes résultats qu'au 1-c) en remplaçant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{CM}$ dans les énoncés.

***Linéarité:***

> L'application $f \mapsto \int_a^b f$ de $\mathcal{CM}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

***Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration:***

> Si $c_0 = a < c_1 < .. < c_m = b$ et si $f \in \mathcal{CM}$, $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f$.

***Positivité:***

> Si $f \in \mathcal{CM}$ est positive sur $[a, b]$, $\int_a^b f \geq 0$.
>
> Par suite, si $f$ et $g$ sont dans $\mathcal{CM}$ avec $f \geq g$ sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.
>
> En particulier, pour toute $f$ dans $\mathcal{CM}$, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

***Fonction continue positive:***

> Si $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ est positive, on a $\left( \int_a^b f = 0 \right) \Leftrightarrow f = 0$.

***Démonstration:***

***En raisonnant par contraposée***, si $f$ est continue et positive sur $[a, b]$ et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, contenant $x_0$, tel que $\alpha < \beta$ et $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ pour $x \in [\alpha, \beta]$.

Alors, $\int_a^b f \geq \int_\alpha^\beta f \geq (\beta - \alpha)\,\frac{f(x_0)}{2} > 0$.



## c) Notation $\int_a^b f$ si $b < a$:

Si $b < a$, et si $f \in \mathcal{CM}$, on pose ***par définition*** $\int_a^b f = -\int_b^a f$, ainsi que $\int_a^a f = 0$.

***Conséquences:***

> i) Si $b < a$, ① l'application $f \mapsto \int_a^b f$ de $\mathcal{CM}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire,
>
> ② $f \in \mathcal{CM}$ et $f \geq 0$ entraînent $\int_a^b f \leq 0$,
>
> ③ $f \in \mathcal{CM}$ entraîne $\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| = \int_b^a |f|$.
>
> ii) Si $f$ est continue par morceaux sur un intervalle contenant $a$, $b$, $c$, on a la ***relation de Chasles***: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

## d) Inégalités fondamentales:

On suppose ici $a < b$.

***Inégalité de la moyenne:***

> Soit $f$ et $g$ deux applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $g$ est positive et que $\forall\, x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$. Alors,
>
> $$m \int_a^b g \leq \int_a^b f g \leq M \int_a^b g.$$

***Démonstration:***

L'intégrale conservant les inégalités, la double inégalité résulte de: $\forall\, x \in [a, b]$, $m\, g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq M\, g(x)$ valable puisque $g \geq 0$.

***Corollaire (égalité de la moyenne):***

> Si $g$ est continue par morceaux et positive sur $[a, b]$ et si $f$ est continue, il existe $c \in [a, b]$ tel que
>
> $$\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g.$$

***Démonstration:***

L'application continue $t \mapsto f(t) \int_a^b g$ continue sur $[a, b]$ prend toute valeur intermédiaire entre ses bornes qui sont $m \int_a^b g$ et $M \int_a^b g$.

L'égalité reste vraie si $b < a$.

***Inégalité de Cauchy-Schwarz:***

> Si $f$ et $g$ sont deux applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$:
> $$\int_a^b |f\,g| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

***Démonstration:***

Soit $T(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda\,|g| + |f|)^2 = \lambda^2 \int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b |f\,g| + \int_a^b f^2.$

Deux cas se présentent:

① $\displaystyle\int_a^b g^2 = 0$. Dans ce cas, la fonction affine $\lambda \mapsto 2\lambda \displaystyle\int_a^b |f\,g| + \int_a^b f^2$ reste positive donc est constante: $\displaystyle\int_a^b |f\,g| = 0.$

② $\displaystyle\int_a^b g^2 > 0$. Dans ce cas, $\lambda \mapsto T(\lambda)$ est une fonction polynôme de degré 2. Et la définition de $T(\lambda)$ montre que cette fonction est positive pour tout $\lambda$ réel. Ceci permet d'écrire que le discriminant réduit est négatif ou nul, i.e:

$$\left(\int_a^b |f\,g|\right)^2 - \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0,$$

ce qui est *l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

## 3- *Sommes de Riemann.*

### a) Définitions:

i) On appelle subdivision pointée de $[a, b]$ le couple $(s, \xi)$ d'une subdivision $s : a_0 = a < a_1 < .. < a_n = b$ de $[a, b]$ et d'une famille $\xi = \{\xi_i ;\ 1 \leq i \leq n\}$ de points de $[a, b]$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \xi_i \in [a_{i-1}, a_i].$$

ii) Si $s : a_0 = a < a_1 < .. < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$, le pas de $s$ est par définition:

$$\pi(s) = \operatorname*{Sup}_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}).$$

iii) Si $f$ est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et $(s, \xi)$ une subdivision pointée de $[a, b]$, on appelle *somme de Riemann* de $f$ associée à $(s, \xi)$ la somme:

$$S_{(s,\xi)}(f) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, f(\xi_i) \quad \text{(notation du i))}.$$

***Remarque:***

Avec les notations de la définition, la *somme de Riemann* $S_{(s,\xi)}(f)$ peut s'interpréter comme ***l'intégrale sur*** $[a, b]$ ***d'une fonction en escalier*** $\varphi$ qui vaut $f(\xi_i)$ sur chacun des intervalles $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i = 1, 2, .., n$.



### b) Théorème de *Riemann* général:

> Soit $f$ une application continue par morceaux sur $[a, b]$.
> Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que pour toute subdivision pointée $(s, \xi)$ de $[a, b]$,
> $$\pi(s) < \delta \Rightarrow \left| S_{(s,\xi)}(f) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

***Démonstration particulière lorsque f est continue:***

Soit $\varepsilon > 0$. Le *théorème de Heine* dit que l'on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que:

$$\forall\,(x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Alors, si $\pi(s) < \delta$,

$$\left| S_{(s,\xi)}(f) - \int_a^b f \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(\xi_i) - f) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f| < \varepsilon.$$

***Démonstration dans le cas général:***

i) Supposons d'abord que ***f est une application en escalier*** sur $[a, b]$ de subdivision adaptée $s_1 : x_0 = a < x_1 < .. < x_p = b$. Alors,

$$\left| S_{(s,\xi)}(f) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f| = \sum_{i \in I} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(\xi_i) - f|,$$

où $I = \{\, i \in [\![1, n]\!];\ \exists\, j \in [\![0, p]\!],\ x_j \in [a_{i-1}, a_i] \,\}$ puisque ***pour*** $i \in [\![1, n]\!] \setminus I$, ***f est constante sur*** $[a_{i-1}, a_i]$.

Comme le cardinal est au plus $2p$ (un $x_j$ peut appartenir au plus à deux intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $1 \leq j \leq p - 1$, $x_0$ et $x_p$ à un seul), si $M = \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f(x)|$,

$$\left| S_{(s,\xi)}(f) - \int_a^b f \right| \leq 2p \times 2M \times \pi(s),$$

et pour $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4p\,M}$, $\pi(s) < \delta \Rightarrow \left| S_{(s,\xi)}(f) - \displaystyle\int_a^b f \right| < \varepsilon.$

ii) Si ***f est une application continue par morceaux sur*** $[a, b]$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}$ telle que $\forall\, x \in [a, b],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3(b - a)}$.

Comme $\left| \displaystyle\int_a^b f - \varphi \right| \leq (b - a) \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)|$ et

$|S_{(s,\xi)}(f) - S_{(s,\xi)}(\varphi)| \leq (b - a) \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)|$, on obtient:

$$\left| S_{(s,\xi)}(f) - \int_a^b f \right| \leq |S_{(s,\xi)}(f) - S_{(s,\xi)}(\varphi)| + \left| S_{(s,\xi)}(\varphi) - \int_a^b \varphi \right| + \left| \int_a^b (\varphi - f) \right|$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| S_{(s,\xi)}(\varphi) - \int_a^b \varphi \right| < \varepsilon,$$

à condition que $\pi(s) < \delta$ (assurant $\left| S_{(s,\xi)}(\varphi) - \displaystyle\int_a^b \varphi \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$).

### c) Suites de *sommes de Riemann*:

***Corollaire* 1:**

> Si $((s^{(n)}, \xi^{(n)}))$ est une suite de subdivisions pointées de $[a, b]$ telle que $\pi(s^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et si $(S_n(f))$ désigne la suite des *sommes de Riemann* de $f$ associées aux $(s^{(n)}, \xi^{(n)})$, alors si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$,
> $$S_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$$

***Corollaire* 2 (*cas particuliers importants*):**

> Ici, ***la subdivision est régulière*** donc définie par:
> $$s^{(n)}: a < a + \frac{b-a}{n} < .. < a + i\ \frac{(b-a)}{n} < .. < b.$$
> Selon le choix des $\xi_i$ on obtient, pour $f \in \mathcal{CM}$
>
> i) points inférieurs $\quad \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\ \frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f,$
>
> ii) points supérieurs $\quad \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(a + i\ \frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f,$
>
> iii) points médians $\quad \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(a + (2i-1)\ \frac{b-a}{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$

Ces deux corollaires sont une conséquence directe du théorème général, qu'ils permettent ***d'appliquer en terme de limite***.

## 4- Extension aux fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$.

### a) Définition:

> Si $f$ est une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, *s'écrivant* $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, où $f_1$ et $f_2$ sont à valeurs réelles, on définit
> $$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + \mathrm{i} \int_a^b f_2.$$

### b) Propriétés:

> i) En raisonnant sur les parties réelles et imaginaires de $f$, on étend immédiatement la propriété de linéarité de l'intégrale, la *relation de Chasles*, et les propriétés des *sommes de Riemann*.
>
> ii) Si $a < b$, on a ***l'inégalité du module*** $\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$.



***Démonstration:***

Supposons d'abord $f$ en escalier. Soit $(a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$, et soit, si $1 \le i \le n$, $c_i$ la valeur de $f$ sur $]a_{i-1}, a_i[$. Alors $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i (a_i - a_{i-1})$.

D'où: $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i| (a_i - a_{i-1}) = \int_a^b |f|.$

Le cas général s'obtient *par prolongement des inégalités à la limite*. On notera également que si $a > b$, l'inégalité du module se transforme en $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \le \int_b^a |f| = \left| \int_a^b |f| \right|.$

### c) Fonctions périodiques:

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $T$ est un réel strictement positif.

***Proposition:***

> Si $f$ est une application périodique de période $T$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ et continue par morceaux, l'intégrale de $f$ sur un intervalle de longueur $T$ est indépendante de cet intervalle.

***Démonstration:***

Par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$ et alors pour $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f = \int_0^T f \text{ puisque } \int_T^{a+T} f = \int_0^a f.$$

Cette dernière égalité est immédiate pour une ***fonction en escalier de période T*** et s'obtient *par prolongement de l'égalité à la limite* dans le cas général.

### d) Suites de fonctions:

***Proposition:***

> Si $(f_n)$ est une suite d'applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une application $f$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, continue par morceaux, alors
> $$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$$

***Démonstration:***

On sait que si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$, $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |(f_n - f)(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Il ne reste plus qu'à utiliser les inégalités:
$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |(f_n - f)(x)|.$$

Notons qu'une limite uniforme d'une suite d'applications continues par morceaux n'étant pas nécessairement continue par morceaux, la précision pour $f$ est indispensable.

## B) Intégrale fonction de la borne supérieure.

Dans cette partie, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1- Théorème fondamental et corollaires.

#### a) Théorème:

Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{K}$ continue par morceaux. On définit une application $F$ de $I$ dans $\mathbb{K}$, en posant pour tout $x$ de $I$, $F(x) = \int_a^x f$. Alors:

i) $F$ est continue sur $I$ et ***lipschitzienne sur tout sous-intervalle compact de I***

ii) si $f$ est continue en $x_0$, $F$ est dérivable en $x_0$, de dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$.

***Démonstration:***

i) Soit $x_0 \in I$ et $[a, b]$ ***un voisinage de $x_0$ dans I***. Si $M$ est la borne supérieure de $|f|$ sur $[a, b]$ (qui existe bien dans $\mathbb{R}$, $f$ étant continue par morceaux sur $[a, b]$), on a, pour tout $x$ dans $[a, b]$, $|F(x) - F(x_0)| \le M\,|x - x_0|$, d'où la continuité en $x_0$.

ii) On écrit, pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f\right) - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f - f(x_0))\right|.$$

Soit alors un réel $\varepsilon > 0$. La continuité de $f$ en $x_0$ entraîne l'existence de $\alpha > 0$ tel que si $t \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(t) - f(x_0)| \le \varepsilon$, donc pour tout $x$ de $I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \varepsilon\right| \le \varepsilon.$$

***Remarque:***

Si $f$ ***est continue à droite*** (resp. à gauche) en $x_0$, ***F est dérivable à droite*** (resp. à gauche) en $x_0$, de dérivée à droite $F_d'(x_0) = f(x_0)$ (resp. à gauche $F_g'(x_0) = f(x_0)$).

#### b) Corollaire 1:

Si $f$ est une application continue de $I$ dans $\mathbb{K}$, elle admet des primitives sur $I$, et ***deux primitives diffèrent d'une constante***. Si $F$ est une telle primitive, on a:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

***Démonstration:***

D'après ii) du théorème, l'application $x \mapsto \int_a^x f$ est une primitive de $f$ sur $I$.

Le second point du corollaire vient de ce qu'une application dérivable sur ***I est constante ssi sa dérivée est nulle*** sur $I$.

Pour le troisième point, on note que si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a, b]$, alors d'après les deux premiers points, il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f + C$.

L'égalité $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ est alors claire.



#### c) Corollaire 2:

Si $f$ est une application de classe $C^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

***Preuve:*** on applique b) à $f'$ en prenant $I = [a, b]$.

### 2- Changement de variable.

***Théorème:***

Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi$ une application de classe $C^1$ de $I$ dans $J$, $f$ une application continue de $J$ dans $\mathbb{K}$. Alors, si $(a, b) \in I^2$, on a:

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

***Démonstration:***

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $J$. Alors $(f \circ \varphi)\,\varphi' = (F' \circ \varphi)\,\varphi' = (F \circ \varphi)'$.

***L'application $F \circ \varphi$ est donc de classe*** $C^1$ sur $I$, de dérivée $(f \circ \varphi)\,\varphi'$.

D'après le corollaire 2 précédent, on a:

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

***Remarque:***

C'est à l'occasion de ce théorème que ***l'on voit l'intérêt de la notation*** $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$ En effet, si nous posons $u = \varphi(x)$, et si nous «différentions formellement», nous obtenons: $du = \varphi'(x)\,dx$. Ceci donne un moyen mnémotechnique pour retrouver la formule de changement de variable, en écrivant:

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_a^b (f \circ \varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

### 3- L'intégration par parties.

***Théorème:***

Si $f$ et $g$ sont deux applications de classe $C^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, alors,

$$\int_a^b f g' = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f' g,$$

formule qu'on écrira souvent plus simplement:

$$\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g.$$

***Démonstration:***

L'égalité $\int_a^b (f g' + f' g) = \int_a^b (f g)' = [f g]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$ provient des résultats de 1).

## C) Calcul des primitives.

Comme précédemment, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1- Généralités.

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{K}$. Nous avons vu que $f$ admet au moins une primitive sur $I$, et que si $F$ est l'une d'elles, l'ensemble de ces primitives est l'ensemble des applications de $I$ dans $\mathbb{K}$ de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où $C$ est une constante arbitraire.

Nous conviendrons alors de noter la valeur en $x$ de l'une quelconque non précisée des primitives de $f$, sous la forme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi si $F$ est une primitive de $f$, écrirons-nous: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

### 2- Techniques de base.

#### a) Utilisation des dérivées connues:

Moyennant une translation ou une homothétie, on peut ramener le calcul de certaines primitives à la (re)connaissance des dérivées de fonctions usuelles.

***Exemples:***

① Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) = a\,x^{a-1}$, donc pour $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1}$.

② Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\;\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{x^2+a^2}$, donc pour $a \in \mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{a}.$$

#### b) Changement de variable: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

① Partant de $\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$ (définition du logarithme), pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$ ou $x \in \mathbb{R}^{*-}$, on obtient pour tout $x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|.$$

② Partant de $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ pour $x \in \left]-1, 1\right[$, on obtient pour $x \in \left]k\pi, (k+1)\pi\right[$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = -\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}\right)$$
$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

③ Partant de $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{Arc}\tan x + C$, on obtient pour tout $x$ réel:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x} = 2\int\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} = 2\int\frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2} = 2\,\mathrm{Arctan}\,e^x.$$



#### c) Intégration par parties: $\int u'\,v = u\,v - \int u\,v'$.

C'est une technique utile pour les fonctions transcendantes ayant une dérivée algébrique (ln, Arc tan, Arg th, Arc sin ..)

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

$$\int \mathrm{Arc}\tan x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{Arc}\tan x - \int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\,\mathrm{Arc}\tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

#### d) Exemple:

$\int P(x)\,e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ où $P$ est un polynôme et $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{K}$.

On peut utiliser deux des méthodes précédentes.

***i) Par parties:***

$$\int P(x)\,e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\,P(x)\,e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\int P'(x)\,e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

On recommence $n+1$ fois si $n = \deg(P)$.

$$\boxed{\int P(x)\,e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\,e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}\,P^{(k)}(x)}$$

Dans la pratique, pour un polynôme donné, il est conseillé de faire à chaque fois le calcul, plutôt que de chercher à appliquer la formule ci-dessus, donnée seulement pour montrer la calculabilité par cette méthode.

***ii) Par identification:***

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_1(x)\,e^{\lambda x}\right) = \left(P_1'(x) + \lambda P_1(x)\right)e^{\lambda x} = Q(x)\,e^{\lambda x}.$$

L'application $P \mapsto P' + \lambda P$ de $\mathbb{C}_n[x]$ dans lui-même est un isomorphisme donc on peut procéder par identification en prenant comme inconnues les coefficients de $P_1$.

***iii) Exemple de calcul:***

$$\int t^2\cos t\,\mathrm{d}t = \Re\mathrm{e}\int t^2\,e^{it}\,\mathrm{d}t$$

On pose a priori $\int t^2\,e^{it}\,\mathrm{d}t = (a\,t^2 + b\,t + c)\,e^{it}$, où $a\,t^2 + b\,t + c$ est un polynôme en $t$ de degré 2 comme $t^2$.

En dérivant et en identifiant:

$2a\,t + b + i\,a\,t^2 + i\,b\,t + i\,c = t^2$

$i\,a = 1,\quad 2a + i\,b = 0,\quad b + i\,c = 0$

soit $a = -i,\quad b = 2,\quad c = 2i,\quad$ d'où

$$\boxed{\int t^2\cos t\,\mathrm{d}t = 2t\cos t + t^2\sin t - 2\sin t}$$

## 3- Tableau des primitives des principales fonctions usuelles.

| Fonction $f : x \mapsto$ | Intervalle | Primitive $F : x \mapsto$ |
|---|---|---|
| $e^{ax}$ $(a \in \mathbb{C}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{a} e^{ax}$ |
| $\text{ch}\, ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ | " | $\frac{1}{a} \text{sh}\, ax$ |
| $\text{sh}\, ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ | " | $\frac{1}{a} \text{ch}\, ax$ |
| $\cos ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ | " | $\frac{1}{a} \sin ax$ |
| $\sin ax$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ | " | $-\frac{1}{a} \cos ax$ |
| $x^a$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ | $\mathbb{R}^{*+}$ | $\frac{1}{a+1} x^{a+1}$ |
| $\frac{1}{x^2+a^2}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{a} \text{Arc tan} \frac{x}{a}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a \in \mathbb{R}^{*+})$ | $]-a, a[$ | $\text{Arc sin} \frac{x}{a}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a \in \mathbb{R}^{*+})$ | $\mathbb{R}$ | $\text{Arg sh} \frac{x}{a} = \ln (x + \sqrt{x^2+a^2})$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a \in \mathbb{R}^{*+})$ | $]a, +\infty[$<br>$]-\infty, -a[$ | $\left.\begin{array}{l}\text{Arg ch} \frac{x}{a} \\ -\text{Arg ch} (-\frac{x}{a})\end{array}\right\} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert$ |
| $\frac{1}{a^2-x^2}$ $(a \in \mathbb{R}^{*+})$ | $\left.\begin{array}{l}]-\infty, -a[ \\ ]-a, a[ \\ ]a, +\infty[\end{array}\right\}$<br>$]-a, a[$ | $\frac{1}{2a} \ln \left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$<br>$\frac{1}{a} \text{Arg th} \frac{x}{a}$ |
| $\tan x$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $-\ln \lvert\cos x\rvert$ |
| $\frac{1}{\sin x}$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $\ln \left\lvert\tan \frac{x}{2}\right\rvert$ |
| $\frac{1}{\cos x}$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $\ln \left\lvert\tan (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right\rvert$ |
| $\frac{1}{\text{sh}\, x}$ | $\mathbb{R}^{*+}$<br>$\mathbb{R}^{*-}$ | $\ln \left\lvert\text{th} \frac{x}{2}\right\rvert$ |
| $\frac{1}{\text{ch}\, x}$ | $\mathbb{R}$ | $2\, \text{Arc tan} (e^x)$ |
| $\ln x$ | $\mathbb{R}^{*+}$ | $x \ln x - x$ |



## 4- Calcul de primitives de fractions rationnelles réelles.

### a) Cas particulier $\int \frac{P'(x)}{(P(x))^n} dx$:

$P$ est un polynôme et $n$ un entier naturel.

Si $n = 1$, on a $\int \frac{P'(x)}{P(x)} dx = \ln \lvert P(x)\rvert$ sur tout intervalle sur lequel $P$ ne s'annule pas.

Si $n > 1$, on a $\int \frac{P'(x)}{(P(x))^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(P(x))^{n-1}}$ sur tout intervalle sur lequel $P$ ne s'annule pas.

### b) cas général:

i) On décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

ii) On est donc amené à chercher une primitive de chaque terme de la décomposition

✻ pour la ***partie entière*** qui est un polynôme, une primitive est obtenue immédiatement.

✻ pour les ***éléments simples de première espèce***:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln \lvert x-a\rvert$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

***Exemple:***

$$\int \frac{t+1}{t(t-1)^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} dt\right)$$

$$\int \frac{t+1}{t(t-1)^2} dt = \ln \left\lvert\frac{t}{t-1}\right\rvert - \frac{2}{t-1},$$ sur l'un des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$

✻ pour les ***éléments simples de deuxième espèce***:

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{a}{2} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \frac{1}{(x^2+px+q)^n}.$$

Le premier terme est de la forme $\frac{a}{2} \frac{P'(x)}{(P(x))^n}$, on obtient immédiatement une primitive (cas particulier déja vu). Il reste donc: $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx$, on met le trinôme sous forme canonique et on est ramené à $\boldsymbol{J_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

***Deux méthodes:***

✻ *par récurrence:*

$J_1 = \text{Arc tan}\, t$

$$J_n = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = J_{n+1} + \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

En intégrant par parties: $u'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}$ $\quad u(t) = -\frac{1}{2n} \frac{1}{(1+t^2)^n}$

$v(t) = t$ $\quad v'(t) = 1$

$J_n = J_{n+1} - \frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{1}{2n} J_n$. D'où, à une constante près:

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n}$$

∗ *par changement de variable*:

$t = \tan u \quad dt = (1+t^2)\,du$, donc

$J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \cos^{2(n-1)} u\, du$, et il reste à linéariser $\cos^{2(n-1)} u$.

***Remarque:***

Un cas particulier important et rapide est celui où $n = 1$. On se ramène alors à $\int \frac{dt}{t^2+1}$ qui vaut Arc tan $t$ à une constante près.

***Exemple:***

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx\right)$$

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Posons $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,t$

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{\frac{3}{4}(t^2+1)}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arc tan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}$$

## 5- Calcul de primitives de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles.

### a) $\int F(e^x)\,dx$, $F \in \mathbb{R}(X)$:

Par le changement de variable $t = e^x$ on est ramené à une primitive de fraction rationnelle en $t$.

$$\int F(e^x)\,dx = \int F(t)\,\frac{dt}{t}.$$

### b) $\int F(\cos x, \sin x)\,dx$, $F$ fonction rationnelle à deux variables:

***Cas particulier des polynômes en sin x et cos x:***

Par linéarité on est ramené à:

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x\,dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

∗ si $m$ est pair, on pose $t = \sin x$

∗ si $n$ est impair, on pose $t = \cos x$ et on est ramené au calcul d'une primitive d'un polynôme en $t$.

∗ si $m$ et $n$ sont pairs, la meilleure méthode est encore la linéarisation du produit au moyen de l'exponentielle complexe. ($\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ et $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$).

Dans le cas d'une intégrale définie, par exemple entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on peut aussi obtenir des relations de récurrence à l'aide d'une intégration par parties (voir le calcul des *intégrales de Wallis* en T.D).



***Cas général: règle de Bioche:***

| | |
|---|---|
| Si la forme différentielle $F(\cos x, \sin x)\,dx$ est invariante par le changement de: | |
| $x$ en $-x$ | on pose $t = \cos x$ |
| $x$ en $\pi - x$ | on pose $t = \sin x$ |
| $x$ en $\pi + x$ | on pose $t = \tan x$ |
| sinon | on pose $t = \tan\frac{x}{2}$ |
| et on fait le changement de variable correspondant. | |

Dans tous les cas ***on est ramené à une primitive de fraction rationnelle en t.***

***Exemple:***

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $\int \frac{dx}{a^2+\cos^2 x}$.

La forme différentielle étant invariante par la translation $x \mapsto x + \pi$, on pose $t = \tan x$ (ou $x = \text{Arc tan}\,t$).

$$\int \frac{dx}{a^2+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(a^2+\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{a^2t^2+1+a^2}.$$

Or, $\frac{d}{dt}\left(\text{Arc tan}\,\frac{at}{\sqrt{1+a^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,\frac{1}{1+\frac{a^2t^2}{1+a^2}} = \frac{a\sqrt{1+a^2}}{1+a^2+a^2t^2}$, donc:

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+\cos^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{1+a^2}}\,\text{Arc tan}\,\frac{a\tan x}{\sqrt{1+a^2}}}$$

### c) $\int F(x, \varphi(x))\,dx$:

Si $F$ est fonction rationnelle à deux variables, et $\varphi$ est un radical, on sait traiter deux cas:

∗ ***Cas où*** $\varphi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ***, avec n entier*** $\geq 2$ ***:***

On pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, d'où $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$.

$dx = \frac{(ad-bc)\,n\,t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$, on ramène $\int F(x, \varphi(x))\,dx$ à

$$\int F\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right)\frac{n(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}\,t^{n-1}\,dt,$$

ce qui donne une primitive de fraction rationnelle.

***Exemple:***

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (0 < a < b),\ x \in\ ]a, b[.$$

Par le changement $t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$, $I$ se ramène à:

$$-2\int \frac{dt}{b+a\,t^2} = -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2+\frac{b}{a}} = -\frac{2}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\text{Arc tan}\left(t\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$\boxed{I = -\frac{2}{\sqrt{a\,b}}\ \textbf{Arc tan}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right)}$$

✻ ***Cas où*** $\varphi(x) = \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}$ , $a \neq 0$:

Le plus simple est de paramétrer la conique

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a\,x^2+b\,x+c-y^2 = 0\}$$

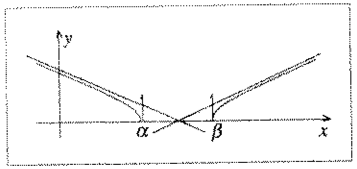
à l'aide de fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

On peut aussi couper la conique par des droites pivotant autour de l'un de ses points (éventuellement à l'infini), ce qui donne un paramétrage rationnel. En particulier pour une hyperbole, on peut la couper par une parallèle à l'une de ses asymptotes.

-1$^{er}$ *cas*: $a > 0$, $\Gamma$ est une hyperbole, on discute selon la réalité des racines.

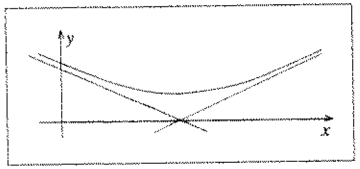
Le ***trinôme*** $\boldsymbol{a\,X^2+b\,X+c}$ a deux racines réelles $\alpha$ et $\beta$.

On représente $y = \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}$.
On se ramène d'abord à $u^2-1$ et on pose
$u = \varepsilon\,\text{ch}\,t$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$




Le ***trinôme*** $\boldsymbol{a\,X^2+b\,X+c}$ n'a pas de racine réelle.

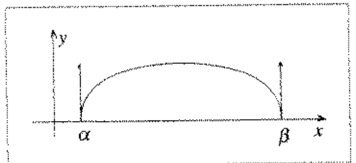
On représente $y = \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}$.
On se ramène d'abord à $u^2+1$ et on pose
$u = \text{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$




-2$^{ème}$ *cas*: $a < 0$, $\Gamma$ est une ellipse.

Le ***trinôme*** a nécessairement deux racines réelles distinctes $\alpha$ et $\beta$ pour que la fonction $x \mapsto \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}$ soit définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On se ramène d'abord à $1-u^2$ et on pose
$u = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ou bien
$u = \cos t$, $t \in [0, \pi]$.






# D) Les formules de *Taylor*.

## 1- L'égalité de *Taylor* avec reste intégral.

***Théorème:***

> Si $f$ est une application de classe $C^{n+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, (ici $a < b$ ou $b > a$)
>
> $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

***Démonstration:***

On raisonne par récurrence sur $n$.

i) Le cas $n = 0$ revient à l'égalité $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$.

ii) Supposons le résultat établi à l'ordre $n-1$, et soit $f$ une application de classe $C^{n+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. Comme $f$ est de classe $C^n$, on peut écrire:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n)}(t)\,dt \qquad (1)$$

On transforme $\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n)}(t)\,dt$ en intégrant par parties.

On pose $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, $\psi(t) = -\frac{(b-t)^n}{n\,!}$, de sorte que $\varphi$ et $\psi$ sont de classe $C^1$ et on obtient:

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n)}(t)\,dt = \int_a^b \varphi\,\psi' = [\varphi\,\psi]_a^b - \int_a^b \varphi'\,\psi.$$

$$[\varphi\,\psi]_a^b = \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(b-a)^n, \text{ et } -\int_a^b \varphi'\,\psi = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

En reportant dans (1), ***on obtient la formule à l'ordre n***.

## 2- L'inégalité de *Taylor-Lagrange*.

***Théorème:***

> Si $f$ est une application de classe $C^{n+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, et si $M = \underset{a \leq t \leq b}{\text{Max}} |f^{(n+1)}(t)|$,
>
> alors $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(b-a)^k \right| \leq \frac{M\,|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

***Démonstration:***

On observe tout d'abord que l'existence de $M$ se justifie par ***la continuité de*** $|f^{(n+1)}|$ ***sur le segment [a, b]***. Cela étant, il suffit grâce à (1) d'écrire, si $a < b$ par exemple,

$$\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} M\,dt = M\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

## 3- La formule de *Taylor-Young*.

***Théorème:***

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de classe $C^n$ de $I$ dans $\mathbb{K}$, alors pour tout $a \in I$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k\right) = 0.$$

***Démonstration:***

En reprenant l'égalité avec *reste intégral*, pour $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k\right) = \frac{1}{(x-a)^n}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) dt.$$

Comme $f^{(n)}$ est continue en $a$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que

$|t-a| < \eta \Rightarrow |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))| \le \varepsilon$, donc,

$$|x-a| < \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k\right)\right| \le \varepsilon \left|\frac{(x-a)^n}{n\,!\,(x-a)^n}\right| \le \varepsilon.$$

***Remarque:***

Avec les notations qui seront définies au chapitre IV (étude locale), la *formule de Taylor-Young* peut encore s'écrire:

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

## 4- Remarque sur les formules de *Taylor*.

Rappelons-nous ***la formule de Taylor pour les polynômes***. Si $P$ est un polynôme de degré au plus $n$, et $a$ un élément de $\mathbb{R}$, on a exactement:

$$P(X) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-a)^k}{k\,!}P^{(k)}(a)$$

De la même manière, ***si $f$ est une application de classe $C^n$ sur un voisinage de $a$ dans $I$***, on définit ***le polynôme de Taylor de $f$ de degré $n$*** au point $a$ comme:

$$P_n(X) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(X-a)^k}{k\,!}f^{(k)}(a)$$

On définit alors le *reste de Taylor* par $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.
Il n'y a maintenant aucune raison que $R_n$ soit nul. Mais toutes les *formules de Taylor* visent à donner une expression de $R_n$, soit exacte (***reste intégral***), soit une majoration (***inégalité de Taylor-Lagrange***), soit une évaluation asymptotique (***égalité de Taylor-Young***).



# E) Calcul approché des intégrales.

Dans tout ce paragraphe $f$ est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

## 1- La méthode des rectangles au point médian.

### a) La méthode à un pas:

***Principe:***

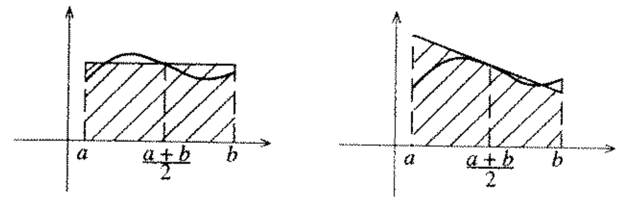
On remplace l'intégrale de la fonction $f$ sur le segment $[a, b]$ par celle de la fonction constante $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$$\boxed{R = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

***Interprétation:***

Cette intégrale représente ***l'aire du rectangle*** de base $[a, b]$ et de hauteur $\left[0, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$

Mais c'est aussi l'aire d'un trapèze rectangle de demi-somme des bases $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et de hauteur $b-a$. En particulier, si $f$ est dérivable, on peut choisir le trapèze dont le quatrième côté est la tangente en $\frac{a+b}{2}$.




1ère interprétation — 2ème interprétation

***Calcul de l'erreur:***

Supposons maintenant $f$ de classe $C^2$ sur le segment $[a, b]$, pour évaluer l'erreur:

$$\varepsilon_R = \int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Posons $\frac{a+b}{2} = c$ et $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, puis écrivons des *égalités de Taylor*:

$$F(a) - F(c) = -\frac{b-a}{2}f(c) + \frac{(b-a)^2}{8}f'(c) + \int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt$$

$$F(b) - F(c) = \frac{b-a}{2}f(c) + \frac{(b-a)^2}{8}f'(c) + \int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt.$$

Posons $M_2 = \sup_{a \le t \le b} |f''(t)|$ puis,

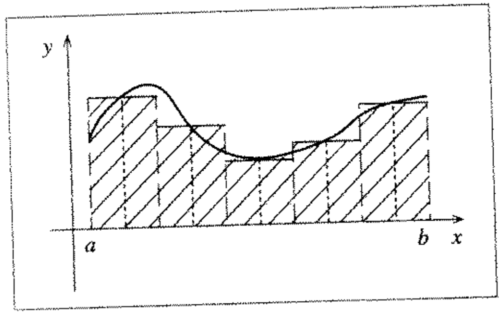
$$|\varepsilon_R| = |F(b) - F(a) - (b-a)f(c)| = \left|\int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt - \int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right|.$$

On peut alors majorer: $|\varepsilon_R| \leq M_2\left(\left[-\frac{(b-t)^3}{6}\right]_c^b + \left[\frac{(a-t)^3}{6}\right]_c^a\right) = \frac{(b-a)^3}{24} M_2$, soit:

$$\boxed{|\varepsilon_R| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot M_2}$$

### b) La méthode à $n$ pas:

***Principe:***




On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous-intervalles de longueur égale, et on applique la méthode sur chacun des intervalles de subdivision. On a ainsi:

$$\boxed{R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\ \frac{b-a}{2n}\right)}$$

et si $f$ est de classe $C^2$ avec $M_2 = \operatorname*{Sup}_{a \leq t \leq b} |f''(t)|$, on obtient pour l'erreur:

$$\boxed{|\varepsilon_{R_n}| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2}$$

### c) Exemple:

***Soit à calculer une valeur approchée à $10^{-4}$ près de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.***

Calculons les dérivées:

$$f'(t) = \frac{-4t^3}{2(1+t^4)^{3/2}} = -\frac{2t^3}{(1+t^4)^{3/2}}$$

$$f''(t) = \frac{-6t^2}{(1+t^4)^{3/2}} + \frac{3t^3 \cdot 4t^3}{(1+t^4)^{5/2}} = \frac{6t^2(t^4-1)}{(1+t^4)^{5/2}}.$$

Si $g(u) = \frac{u}{(1+u^2)^{5/2}}$, $g'(u) = \frac{1 + u^2 - \frac{5}{2} \times 2u^2}{(1+u^2)^{7/2}} = \frac{1-4u^2}{(1+u^2)^{7/2}}$ s'annule pour $u = \frac{1}{2}$,

et vu son signe, $g(u)$ est maximum pour $u = \frac{1}{2}$, donc:

$$|g(u)| \leq g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{(5/4)^{5/2}} \leq 0{,}3 \quad \text{et} \quad M_2 \leq 1{,}8.$$



Si $n$ est le nombre de points de subdivision, on aura alors:

$$\varepsilon_{R_n} \leq \frac{1{,}8}{24n^2} = \frac{3}{40n^2}.$$

Pour avoir une précision de $10^{-4}$, il faut alors $40n^2 \geq 3.10^4$, soit $n^2 \geq 750$. On peut prendre $n = 28$, on trouve alors: $\boxed{R_{28} \approx 0{,}8284}$

## 2- La méthode des trapèzes.

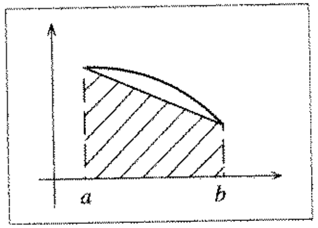
### a) La méthode à un pas:

***Principe:***

Cette fois on remplace l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ par l'intégrale de la fonction affine $\varphi$ interpolant $f$ sur $[a, b]$ i.e. $\varphi(t) = f(a) + (t-a)\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

***Interprétation:***

Cette intégrale $\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ représente l'aire du trapèze rectangle de sommets $(a, 0), (b, 0), (b, f(b)), (a, f(a))$.




***Calcul de l'erreur:***

Dans le cas où $f$ est de classe $C^2$, en intégrant deux fois par parties:

$$\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,dt = [(t-a)(t-b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (2t-a-b)f'(t)\,dt$$

$$= -\int_a^b (2t-a-b)f'(t)\,dt$$

$$= -[(2t-a-b)f(t)]_a^b + 2\int_a^b f(t)\,dt$$

$$= -(b-a)(f(b)+f(a)) + 2\int_a^b f(t)\,dt.$$

Ainsi, $\varepsilon_T = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}((f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,dt.$

En posant, comme dans la méthode des rectangles, $M_2 = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on obtient:

$$|\varepsilon_T| \leq \frac{M_2}{2}\left|\int_a^b (t^2-(a+b)t+ab)\,dt\right| = \frac{M_2}{2}\left[-\frac{t^3}{3}+(a+b)\frac{t^2}{2}-abt\right]_a^b,$$

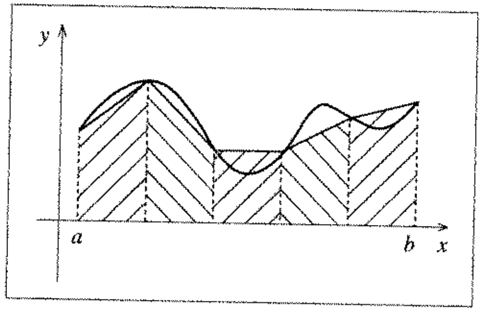
soit $|\varepsilon_T| \leq \frac{M_2}{2}(b-a)\left[-\frac{a^2+b^2+ab}{3} + \frac{a^2+2ab+b^2}{2} - ab\right]$

$$\leq \frac{M_2}{12}(b-a)(a^2+b^2-2ab) = \frac{(b-a)^3}{12} M_2 ; \qquad \boxed{|\varepsilon_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2}$$

### b) La méthode à $n$ pas:

***Principe:***

On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous-intervalles de longueur égale, et on applique la méthode sur chacun des intervalles de la subdivision.




On obtient comme formule pour l'approximation $T_n$:

$$\boxed{T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right)}$$

et comme majoration de l'erreur dans le cas où $f$ est de classe $C^2$:

$$\boxed{|\varepsilon_{T_n}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2}$$

### c) La méthode dichotomique:

***Remarque:***

Si la fonction $f$ est continue, posons:

$$u_n = T_n - \frac{b-a}{2n}\,(f(b) - f(a)) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

La suite $(u_n)$ est une suite de *sommes de Riemann* associées à des subdivisions à pas régulier, sa limite est donc $\int_a^b f(t)\,dt$ et ainsi,

$$\boxed{T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt}$$

***Considérons maintenant la suite $t_n = T_{2^n}$.*** Elle converge aussi vers $\int_a^b f(t)\,dt$ et si $f$ est de classe $C^2$, on a:

$$\left| t_n - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12} \cdot \frac{1}{4^n},$$

ce qui permet d'évaluer la vitesse de convergence.



Plus précisément, si on reprend le calcul du a),

$$T - \int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(b-t) f''(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} f''(c) \int_a^b (t-a)(b-t)\,dt = \frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

avec $a \leq c \leq b$ *(formule de la moyenne)* puisque $(t-a)(b-t) \geq 0$ sur $[a, b]$.

Si on applique à $T_n$,

$$T_n - \int_a^b f(t)\,dt = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \, \frac{f''(c_1(n)) + f''(c_2(n)) + .. + f''(c_n(n))}{n}$$

avec pour $i = 1, 2, .., n$ $\quad c_i(n) \in \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\,\frac{b-a}{n}\right]$.

On obtient encore une ***somme de Riemann à pas régulier*** pour la fonction $f''$, et

$$(b-a)\,\frac{f''(c_1) + f''(c_2(n)) + .. + f''((c_n))}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f''(t)\,dt = f'(b) - f'(a).$$

| |
|---|
| si $f'(a) \neq f'(b)$ on a $n^2\left(T_n - \int_a^b f(t)\,dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} K$ constante $\neq 0$, |
| si $f'(a) = f'(b)$ on a $n^2\left(T_n - \int_a^b f(t)\,dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. |

***Etude du cas $f'(a) \neq f'(b)$:***

Si nous reprenons la suite $(t_n)$ nous avons, en posant $K = \frac{(b-a)^2}{12}\,(f'(b) - f'(a))$:

$$4^n\left(t_n - \int_a^b f(t)\,dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} K.$$

Comme $t_{n-1} - t_n = t_{n-1} - \int_a^b f(t)\,dt - \left(t_n - \int_a^b f(t)\,dt\right)$, $\; 4^n(t_{n-1} - t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 3K$, d'où:

$$\boxed{\frac{t_n - \int_a^b f(t)\,dt}{t_{n-1} - t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}}$$

Cela nous donne un test d'arrêt pour la suite:

quand on aura $|t_{n-1} - t_n| \leq 3\varepsilon$, $\left| t_n - \int_a^b f(t)\,dt \right|$ sera «de l'ordre de $\varepsilon$». En fait, pour augmenter la fiabilité du test d'arrêt on prendra plus simplement:

$$\boxed{|t_{n-1} - t_n| \leq \varepsilon}$$

***Remarque:***

La *dichotomie* est adaptée à la *méthode des trapèzes* car les calculs du rang $n-1$ servent intégralement au rang $n$, puisque:

$$T_{2n} = \frac{1}{2}\,T_n + \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\,\frac{b-a}{2n}\right),$$

mais ne donnerait rien d'intéressant avec la *méthode des rectangles*.

*Ecriture d'une fonction Pascal:*

```
function Trapeze( a,b,eps:real ): real;
  var
    t0,t1,pas,x : real;
    i : integer;
  begin
    pas:=b-a;
    t1:=pas*(f(a)+f(b))/2;
    repeat
      t0:=t1; t1:=0;
      pas:=pas/2;
      x:=a+pas;
      while x<b do
        begin
          t1:=t1+f(x);
          x:=x+2*pas;
        end;
      t1:=t0/2+pas*t1;
    until abs(t1-t0)<eps;
    Trapeze:=t1;
  end;
```

# *TRAVAUX DIRIGÉS*

***Remarque générale:***

Dans les Travaux Dirigés et exercices de ce chapitre, nous aurons besoin à plusieurs reprises de notions qui sont définies dans le chapitre IV (comparaison locale des fonctions et comparaison asymptotique des suites: équivalence ou prépondérance). Nous invitons le lecteur à s'y reporter pour les définitions de base.

## 1- Autour du lemme de *Riemann-Lebesgue*

**Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$, et $f$ une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.**

**Pour tout $\lambda$ réel, on pose $I_\lambda(f) = \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$.**

**a) Supposons $f$ de classe $C^1$ sur $[a, b]$.**
**Montrer l'existence d'un réel $C \geq 0$ tel que:**

$$\forall \lambda > 0,\ |I_\lambda(f)| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

**Qu'en déduit-on si $\lambda \to +\infty$?**

**b) Dans le cas général, montrer que l'on a toujours $I_\lambda(f) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.**

***Indication*: démontrer d'abord le résultat pour $f$ en escalier et passer au cas général par approximation.**

**c) Soit $T > 0$ et $g$ une application continue et $T$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.**
**En utilisant la méthode du b), prouver:**

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(\lambda x) f(x)\, dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T g(x)\, dx\right)\left(\int_a^b f(x)\, dx\right).$$

**d) *Application:***

**Calculer $\lim_{n \to \infty} \int_a^b \frac{f(x)}{3 + 2\cos(n x)}\, dx$.**

***Solution:***

a) L'hypothèse «$f$ est de classe $C^1$» nous permet d'intégrer par parties. On en tire, si $\lambda > 0$,

$$I_\lambda(f) = \left[\frac{1}{i\lambda}\, e^{i\lambda x} f(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{f'(x)}{i\lambda}\, e^{i\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\left((e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a)) - \int_a^b f'(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right).$$

***L'application $f'$ continue sur le compact $[a, b]$ est bornée*** et en posant $\|f'\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, on obtient la majoration:

$$|I_\lambda(f)| \leq \frac{1}{\lambda}\ [|f(b)| + |f(a)| + (b-a)\, \|f'\|_\infty],$$