I. LA DROITE NUMÉRIQUE

A) Principales propriétés de $\mathbb{R}$.

Introduction de $\mathbb{R}$.

a) Définition de $\mathbb{R}$:

Le corps des réels $\mathbb{R}$ est un ensemble muni de deux lois de composition interne (une addition et une multiplication) et d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant les propriétés suivantes:

i) $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un ***corps commutatif***,

ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \\ a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc, \end{cases}$$

iii) l'ordre $\leq$ est ***total*** dans $\mathbb{R}$,

iv) l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est un ***sous-corps*** de $\mathbb{R}$,

v) ***propriété d'Archimède***: ($\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels > 0)

$$\forall a \in \mathbb{R}^{*+},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*;\ x \leq n a,$$

vi) ***propriété de la borne supérieure***:

toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure (i.e. un plus petit majorant).

N.B. i), ii), iii), v) sont les propriétés définissant un corps (commutatif) totalement onné archimédien; elles sont aussi vérifiées par $\mathbb{Q}$, contrairement à la propriété (vi).

Exemple: $\{x \in \mathbb{Q} ; x^2 < 2\}$ est une partie majorée non vide de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de ne supérieure car celle-ci vérifierait $\alpha^2 = 2$.

Notation: $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs i.e. $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \}$
$\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des réels strictement positifs i.e. $\mathbb{R}^{*+} = \{ x \in \mathbb{R} ; x \geq 0 \}$.
$x > 0$

b) Inégalités dans $\mathbb{R}$:

Des propriétés i), ii), iii), on déduit sans difficulté pour les réels a, b, a', b', c :

$a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$; et en version «stricte» $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

$a \leq b$ et $a' \leq b' \Rightarrow a + a' \leq b + b'$, et en version «stricte»

$a < b$ et $a' \leq b' \Rightarrow a + a' < b + b'$

$0 \leq a \leq b$ et $0 \leq a' \leq b' \Rightarrow 0 \leq a a' \leq b b'$, et en version «stricte»

$0 < a < b$ et $0 < a' \leq b' \Rightarrow 0 < a a' < b b'$.

Règle des signes:

$ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0$ et $b > 0)$ ou $(a < 0$ et $b < 0)$

$ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ et $b < 0)$ ou $(a < 0$ et $b > 0)$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$, donc $1 > 0$ et $-1 < 0$, et l'équation $x^2 = -1$ ne peut avoir de solution dans $\mathbb{R}$.

Ne pas soustraire les inégalités: $6 - 4 > 8 - 7$
Ne pas diviser les inégalités: $\frac{6}{4} > \frac{8}{7}$.

Remarque:

$\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{*+}$ sont stables par addition et multiplication.

Valeur absolue:

$\mathbb{R}$ étant un ensemble totalement ordonné, toute partie non vide finie de $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.

En particulier, pour tout x réel, max $(x, -x)$ existe. Ce réel est appelé *valeur absolue* de x et est noté $|x|$.

Propriétés:

Si a et b sont des réels et $r \in \mathbb{R}^{*+}$,

$|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|a| = |-a|$;

$|a - b| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq b \leq a + r$ et $|a - b| < r \Leftrightarrow a - r < b < a + r$;

$|a + b| \leq |a| + |b|$, 1ère inégalité triangulaire;

$||a| - |b|| \leq |a - b|$, 2ème inégalité triangulaire;

$|ab| = |a| \times |b|$;

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$.

Toutes ces propriétés se démontrent facilement à partir des propriétés de corps ordonné de $\mathbb{R}$ et les inégalités triangulaires s'obtiennent à l'aide d'une étude par cas.

Ne pas confondre une inégalité entre deux réels et une inégalité entre leurs valeurs absolues.

Distance de deux réels:

Si a et b sont deux réels, on appelle distance de a à b, le réel positif $d(a, b) = |a - b|$. L'application d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ a les propriétés suivantes:

i) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ [séparation]

ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $d(a, b) = d(b, a)$ [symétrie]

iii) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ [inégalité triangulaire].

c) Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$:

Rappels:

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Un majorant de A est un réel y tel que pour tout $a \in A$, $a \leq y$.

Un minorantde A est un réel x tel que pour tout $a \in A$, $x \leq a$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite ***majorée*** si l'ensemble de ses majorants est non vide.

Une partie de $\mathbb{R}$ est dite ***minorée*** si l'ensemble de ses minorants est non vide.

Une partie de $\mathbb{R}$ à la fois minorée et majorée est dite ***bornée***.

$$A \text{ bornée dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+; \forall a \in A,\ |a| \leq M.$$

Borne supérieure:

A étant une partie de $\mathbb{R}$ majorée, on appelle ***borne supérieure***de A dans $\mathbb{R}$, notée $\sup_{\mathbb{R}} A$, ***le minimum des majorants*** de A.

Cela se traduit par:

$$\beta = \sup_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leq \beta \\ \forall y \in \mathbb{R}, ((\forall a \in A, a \leq y) \Rightarrow \beta \leq y). \end{cases}$$

La propriété (vi) du corps des réels dit que pour toute partie A majorée non vide de $\mathbb{R}$, $\sup_{\mathbb{R}} A$ *existe.*

Borne inférieure:

A étant une partie de $\mathbb{R}$ minorée, on appelle ***borne inférieure de A*** dans $\mathbb{R}$, notée $\inf_{\mathbb{R}} A$, le ***maximum des minorants*** de A.

Cela se traduit par:

$$\alpha = \inf_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \alpha \leq a \\ \forall x \in \mathbb{R}, ((\forall a \in A, x \leq a) \Rightarrow x \leq \alpha). \end{cases}$$

De la propriété (vi) du corps $\mathbb{R}$ et des propriétés des inégalités (cf b)) on déduit, en utilisant $-A = \{-a ; a \in A\}$, que pour toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$, $\inf_{\mathbb{R}} A$ *existe.*

Critères de borne supérieure et de borne inférieure:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et β (resp. α) un réel.

$$\beta = \sup_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leq \beta \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists a \in A ; \beta - \varepsilon < a \leq \beta. \end{cases}$$

En effet, la propriété de la 2ème ligne signifie qu'aucun $\beta' = \beta - \varepsilon < \beta$ ne peut majorer A, alors que (1ère ligne) β majore A.

De même on obtient:

$$\alpha = \inf_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \alpha \le a \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists a \in A\ ;\ \alpha \le a < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Remarque:

Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un maximum a_0, a_0 est borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$. Mais la borne supérieure d'une partie A majorée n'appartient pas forcément à A, donc n'est pas toujours un maximum.

Par exemple, $1 = \sup_{\mathbb{R}}]0, 1[$ et $1 \notin]0, 1[= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < x < 1\}$.

Segment:

Si a et b sont deux réels tels que $a \le b$, on définit le segment $[a, b]$ comme l'ensemble des réels x tels que $a \le x \le b$.
Par définition, la longueur du segment $[a, b]$ est $b - a = \mathrm{d}(a, b)$.

2- Suites réelles.

a) Convergence d'une suite:

Définition:

i) Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) pour $u : n \mapsto u_n$.

L'ensemble des suites réelles est naturellement noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
ii) Une suite réelle est dite majorée (resp. minorée, resp. bornée) quand le sous-ensemble $u(\mathbb{N}) = \{u_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est majoré (resp. minoré, resp. borné).

Sous-suite:

Une sous-suite de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dite aussi suite extraite de u) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition de la convergence d'une suite réelle.

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (ou est convergente) lorsqu'il existe $l \in \mathbb{R}$, appelé limite de (u_n) tel que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \ge N) \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le point important à saisir dans cette définition est que le «rang» N à partir duquel la distance de u_n à l est à coup sûr strictement inférieure à ε ***dépend de*** ε.

Remarque:

Dans la définition de la limite, on peut remplacer l'inégalité stricte $|u_n - l| < \varepsilon$ par une inégalité large $|u_n - l| \le \varepsilon$. En effet si pour tout $n \ge N(\varepsilon)$ on a $|u_n - l| \le \varepsilon$, on aura aussi $|u_n - l| < \varepsilon$ pour tout $n \ge N(\varepsilon/2)$.

Unicité de la limite:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle converge à la fois vers l_1 et vers l_2, alors $l_1 = l_2$.

Démonstration:

Si $l_1 \ne l_2$ on prend $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3}$; comme $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$,

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}, n \ge N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon$

il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}, n \ge N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon$.

Alors pour n entier supérieur à la fois à N_1 et N_2 (il en existe puique $\mathbb{N}$ est non majoré),

$$|l_1 - l_2| \le |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon < |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde.

Terminologie:

On dit: «(u_n) converge vers l» ou «l est limite de (u_n)» ou «u_n tend vers l quand n tend vers l'infini», et on écrit: «$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$» ou «$u_n \to l$» ou «$l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$».

Conséquences de la définition:

i) Toute suite réelle convergente est bornée.
ii) Toute sous-suite d'une suite réelle convergente converge vers la même limite.

Démonstration:

i) Si N est associé à $\varepsilon = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \le \max(|l| + 1, |u_0|, |u_1|, .., |u_N|)$.

ii) Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croît strictement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \ge n$.

b) Suites adjacentes:

Définition:

Deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque (a_n) croît, (b_n) décroît et $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème:

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes:
(i) (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite l,
(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le l \le b_n$.

Démonstration:

i) La suite $(a_n - b_n)$ étant croissante de limite 0 ne peut prendre de valeur strictement positive. ***Pour tout n entier on a donc*** $a_n \le b_n$ et $A = \{a_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par b_0, donc admet une borne supérieure l. Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ quelconque.

Par critère de borne supérieure: $\exists p \in \mathbb{N};\ l - \varepsilon < a_p \le l$.

Par convergence de $(b_n - a_n)$ vers 0: $\exists q \in \mathbb{N};\ \forall n \ge q,\ |b_n - a_n| < \varepsilon$.

Donc pour $n \ge N = \max(p, q)$, $l - \varepsilon < a_p \le a_N \le a_n \le l$ et $a_n \le b_n < a_n + \varepsilon \le l + \varepsilon$ d'où:

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ et } |b_n - l| < \varepsilon.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.

ii) On remarque pour terminer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le l = \sup_{\mathbb{R}} A \quad \text{et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \ge l \quad (\text{sinon, } \forall n \ge p,\ b_n \le b_p < l : \text{contredit } b_n \to l).$$

Théorème des segments emboîtés:

> Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de longueur tendant vers 0, décroissante pour la relation d'inclusion, i.e.
>
> i) $a_0 \le a_1 \le .. \le a_n \le .. \le b_n \le .. \le b_1 \le b_0$,
>
> ii) $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
>
> Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton $\{l\}$, et l est la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

Démonstration:

Dire que $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de segments de longueur tendant vers 0, c'est dire précisément que la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) décroissante et que $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles ont donc une limite commune l telle que pour tout n entier, $a_n \le l \le b_n$. Mais réciproquement, tout élément α de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ vérifie $|\alpha - l| \le b_n - a_n$ pour tout n, donc l est le seul élément de l'intersection.

c) Suites de *Cauchy*:

Définition:

> Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *suite de Cauchy* lorsqu'elle vérifie la propriété:
>
> $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N};\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \ge N \text{ et } q \ge N) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Remarque:

En distinguant, parmi les indices p et q le plus petit et le plus grand, on peut encore écrire la condition de *Cauchy* sous la forme:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N \in \mathbb{N};\ \forall (p, k) \in \mathbb{N}^2, (p \ge N \Rightarrow |u_{p+k} - u_p| < \varepsilon.$$

Propriétés:

> i) toute suite convergente est de *Cauchy*,
>
> ii) toute *suite de Cauchy* est bornée.

Démonstration:

i) Si $p \ge N$ et $q \ge N$, $\quad |u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \le |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, avec N associé à $\frac{\varepsilon}{2}$ dans la propriété de convergence.

ii) Avec les notations de la définition, en prenant par exemple $\varepsilon = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \le \max(|u_0|, |u_1|, .., |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$.

Théorème:

> Toute *suite de Cauchy* réelle est convergente.

Démonstration:

Si la suite (u_n) est de *Cauchy*, elle est bornée, et on peut alors définir $a_n = \inf\limits_{k\ge n}(u_k)$ et $b_n = \sup\limits_{k\ge n}(u_k)$.

Comme a_n est un minorant de $\{u_k ; k \ge n+1\}$, on a $a_n \le a_{n+1}$ et de même $b_n \ge b_{n+1}$.

De plus, si ε est un élément quelconque de $\mathbb{R}^{*+}$,

-il existe N tel que pour $p \ge N$ et $q \ge N$, on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon/3$

-pour tout $n \ge N$, il existe p_n et $q_n \ge n$ tels que:

$$a_n \le u_{p_n} \le a_n + \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad b_n - \varepsilon/3 \le u_{q_n} \le b_n$$

de telle sorte que $0 \le b_n - a_n \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

La suite des segments $[a_n, b_n]$ est donc décroissante et leur longueur tend vers 0.

Il existe alors un réel a tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}$.

En gardant toujours les mêmes notations, pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \ge N$, u_n et a sont dans $[a_N, b_N]$, donc $|a - u_n| \le |b_N - a_N| \le \varepsilon$. On en déduit la convergence de (u_n) vers a.

Remarques:

i) Les propriétés i) et ii) vues plus haut sont valables dans $\mathbb{Q}$.

ii) Le théorème, en revanche, n'est pas valable pour les suites dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite définie par $u_n = 10^{-n}\,\mathrm{E}(10^n\sqrt{2})$ (voir le paragraphe suivant) est une *suite de Cauchy* dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

iii) On dit que $\mathbb{R}$ ***est complet*** parce que toute *suite de Cauchy* y est convergente. On démontre d'ailleurs qu'à un isomorphisme près:

> $\mathbb{R}$ est le seul ***corps totalement ordonné archimédien complet***.

3- Approximation décimale d'un réel.

a) Partie entière d'un réel:

Soit x un nombre réel. Comme $-x$ est lui aussi un réel, d'après la *propriété d'Archimède*, il existe deux entiers p et q tels que $x \le p$ et $-x \le q$ soit $-q \le x$.

Alors $\{m \in \mathbb{Z};\ m \le x\}$ est une partie majorée (par p) non vide de $\mathbb{Z}$, donc admet un maximum.

Définition:

> La partie entière de x réel est le plus grand des entiers inférieurs (ou égaux) à x. Elle est notée $\mathrm{E}(x)$ ou parfois $[x]$. $x - \mathrm{E}(x)$ est par définition la partie fractionnaire de x.

Propriétés immédiates:

> i) $\forall x \in \mathbb{R},\ m = \mathrm{E}(x) \Leftrightarrow (m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \le x < m+1)$.
>
> ii) $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ croît sur $\mathbb{R}$.
>
> iii) $x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$ est périodique de période 1, i.e.
>
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 - \mathrm{E}(x+1) = x - \mathrm{E}(x).$$

Division euclidienne:

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, il existe un unique couple (q, r) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ tel que $x = a\,q + r$, avec $0 \le r < a$.

Par condition nécessaire et suffisante immédiate, on a $q = \mathrm{E}\,(x/a)$ et $r = x - a\,q$.

b) Nombres décimaux. Approximation décimale d'un réel:

Définition:

On appelle *rationnel décimal* tout rationnel pouvant s'écrire $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des rationnels décimaux est un sous-anneau du corps $\mathbb{Q}$.

Notation: si $0 \le p < 10^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, p s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\,10^k$ avec $a_1, \dots, a_n \in [0, 9]$ (représentation d'un entier en base dix).

On note alors $\frac{p}{10^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} = 0{,}a_1a_2..a_n$, et a_i est appelé $i^{\text{ème}}$ décimale.

Propriété:

Si x est un réel, et n un entier naturel, $\mathrm{E}\,(10^n x)$ est l'unique entier p_n tel que $\frac{p_n}{10^n} \le x < \frac{p_n+1}{10^n}$.

$\frac{p_n}{10^n}$ s'appelle alors ***valeur approchée décimale par défaut*** à $\frac{1}{10^n}$ près de x.

$\frac{p_n+1}{10^n}$ s'appelle ***valeur approchée décimale par excès*** à $\frac{1}{10^n}$ près de x.

Proposition:

Si x est un réel, la suite $\left(\frac{p_n}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses valeurs décimales approchées par défaut converge vers x dans $\mathbb{R}$.

En effet, pour ε fixé dans $\mathbb{R}^{*+}$, $0 \le x - \frac{p_n}{10^n} \le \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n > \mathrm{E}\,(1/\varepsilon)$.

Définition:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ lorsque, pour tout couple de réels vérifiant $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$.

Des résultats précédents, en prenant $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$ et $a = \frac{q_n}{10^n}$ valeur décimale approchée par défaut à $\frac{1}{10^n}$ près de y (avec $n > 1/\varepsilon$), on déduit:

Théorème:

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Développement décimal illimité d'un réel:

On reprend les notations précédentes, avec x réel et n entier > 0.

L'entier $p_0 = m = \mathrm{E}\,(x)$ est aussi la partie entière du rationnel décimal $\frac{p_n}{10^n}$.

Donc $\frac{p_n}{10^n} - m = 0, a_1\,a_2\,..a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ avec $a_i \in [0, 9]$.

On remarque alors que a_{n+1}, reste de la division de p_{n+1} par 10, est le chiffre des unités de p_{n+1} en base dix, le quotient étant p_n, soit:

$$\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} - m = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{10^i} = 0{,}a_1a_2..a_n\,a_{n+1}.$$

On peut écrire finalement : $\boxed{a_{n+1} = \mathrm{E}\,(10^{n+1}x) - 10\,\mathrm{E}\,(10^n x)}$

Il existe donc une unique suite de chiffres (i.e. d'entiers compris entre 0 et 9) $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur décimale approchée par défaut à $\frac{1}{10^n}$ près de x s'écrive $\mathrm{E}\,(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$. Cette suite, à laquelle on adjoint p_0 comme terme d'indice 0, détermine x puisque $x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}\right)$.

Définition:

On appelle ***développement décimal illimité (propre) du réel x*** et on écrit $x = a_0 + 0{,}a_1a_2..a_n..$ ou (si $x > 0$), $x = b_l..b_0{,}a_1..a_n..$ ($b_l..b_0$ chiffres de l'écriture de a_0 en base dix), la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par:

$$a_0 = \mathrm{E}\,(x), \text{ et pour } n \ge 1,\ a_n = \mathrm{E}\,(10^n x) - 10\,\mathrm{E}\,(10^{n-1}x).$$

Réciproque:

Soit réciproquement une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall\, i \in \mathbb{N}^*\ a_i \in [0, 9]$.

Soit $u_0 = a_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ car elle est de Cauchy, puisque pour $n > q > 1$:

$$0 \le u_n - u_q = \sum_{i=q+1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \le 9 \sum_{i=q+1}^{n} \frac{1}{10^i} \le \frac{9}{10^{q+1}}\,\frac{1 - \frac{1}{10^{n-q}}}{1 - \frac{1}{10}} \le \frac{1}{10^q}$$

et si $N > 1/\varepsilon$, $\forall\, q \ge N$, $\frac{1}{10^q} < \varepsilon$. Désignons par x la limite de (u_n).

Deux cas se présentent alors:

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, k > n;\ a_k \ne 9$.

La suite (u_p) est croissante et pour $p \ge k$, (k associé à n),

$$0 \le u_p - u_n \le \sum_{i=n+1}^{p} \frac{9}{10^i} - \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}}\,\frac{1 - \frac{1}{10^{p-n}}}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1}{10^k}$$

$$0 \le u_p - u_n \le \frac{9}{10^{n+1}} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{10}}}{} - \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k}, \text{ ce qui donne}$$

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \le u_p \le a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k}.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient alors:

$$u_n \le x \le u_n + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k} < u_n + \frac{1}{10^n},$$

par prolongement des inégalités (voir C-1.b)).

Finalement:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \le x < a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}$$

donc $a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ est la valeur décimale approchée à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut de x.

Dans ce cas, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond exactement pour x au ***développement décimal illimité propre*** obtenu précédemment.

(ii) $\exists\, n \in \mathbb{N}^*;\ \forall k > n, a_k = 9$. Dans ce cas:

$$\forall k > n, \quad u_k = u_n + 9 \sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{10^i} = u_n + \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{k-n}}}{1 - \frac{1}{10}} = u_n + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k} \quad \text{et}$$

$$u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{rationnel décimal.}$$

Donc x est un rationnel décimal et pour $k > n$, u_k n'est pas la valeur approchée décimale par défaut à $\frac{1}{10^k}$ près de x (qui vaut x).

On parle alors de ***développement décimal illimité impropre de x:***

$$x = a_0 + 0,\, a_1..a_n\, 99..9..$$

Remarque:

Au lieu de se placer dans la base de numération dix, on peut se placer dans une autre base. On parle ainsi, par exemple, de ***développements dyadiques*** en base deux, et de ***développements triadiques*** en base trois.

Racines $n^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition:

Si $n \in \mathbb{N}^*$, une racine $n^{\text{ème}}$ de x dans $\mathbb{R}$ est un réel γ tel que $\gamma^n = x$.

a) Racines $n^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{R}^+$. Exposants fractionnaires dans $\mathbb{R}^{*+}$:

Théorème et définition:

> Si $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que $\gamma^n = x$, appelé racine $n^{\text{ème}}$ (positive) de x, parfois radical $n^{\text{ème}}$ de x, et noté $\sqrt[n]{x}$.
>
> ***Cas particulier:*** $\sqrt[2]{x}$ est noté plus simplement $\sqrt{x}$.

Démonstration:

i) c'est clair pour $x = 0$ ou $n = 1$;

ii) l'unicité vient facilement des propriétés d'ordre dans $\mathbb{R}$;

iii) pour l'existence, x étant strictement positif, l'ensemble $A = \{a \in \mathbb{R}^{*+}, a^n \le x\}$ est majoré (par max $(x, 1)$) non vide dans $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure γ.

Si $\gamma^n < x$, pour α réel tel que $0 < \alpha < 1$, nous aurions:

$$(\gamma+\alpha)^n - \gamma^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \gamma^k \alpha^{n-k} \le \alpha \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \gamma^k < \alpha(1+\gamma)^n.$$

Si nous choisissons $\alpha < \frac{x-\gamma^n}{(1+\gamma)^n}$, nous aurons $(\gamma+\alpha)^n - \gamma^n < x - \gamma^n$ soit $(\gamma+\alpha)^n < x$ donc $\gamma + \alpha \in A$, ***ce qui contredirait la définition de*** γ.

Si $\gamma^n > x$, on obtiendrait $\gamma^n - a^n = (\gamma - a) \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k a^{n-1-k} \le (\gamma - a)(n\, \gamma^{n-1})$.

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\varepsilon < \frac{\gamma^n - x}{n\,\gamma^{n-1}}$, il ne pourrait exister de $a \in A$ tel que $\gamma - a < \varepsilon$, ce qui contredirait le critère de borne supérieure vu dans A-1.c).

La seule possibilité est donc $\gamma^n = x$.

Propriétés des racines n$^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{R}^+$:

> Pour $x, y \in \mathbb{R}^+$, $n, p \in \mathbb{N}^*$:
>
> $0 \le x < y \Rightarrow 0 \le \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$, $\qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$.
>
> Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $n, p \in \mathbb{N}^*$:
>
> $\sqrt[np]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}$ $\qquad \sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$ $\qquad$ et si $x > 0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$.

Exposants fractionnaires:

Soit x un réel strictement positif, $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}^*$; d'après les propriétés précédentes, si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ i.e. $p\,q' = p'q$, $\sqrt[q']{x^{p'}} = \sqrt[q'p]{x^{pp'}} = \sqrt[qp']{x^{pp'}} = \sqrt[q]{x^p}$

On peut donc définir pour $r \in \mathbb{Q}$, $x^r = \sqrt[q]{x^p}$ avec $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

Propriétés:

> Pour $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$, $r, r' \in \mathbb{Q}$, on obtient immédiatement les propriétés:
>
> $(x\,y)^r = x^r y^r$; $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$; $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$; $x^{-r} = \frac{1}{x^r} = \left(\frac{1}{x}\right)^r$

si $r>0,\ x<y \Rightarrow x^r<y^r$ et si $r<0,\ x<y \Rightarrow y^r<x^r$

$(0<x<1$ et $r<r') \Rightarrow 0<x^{r'}<x^r$ et $(x>1$ et $r<r') \Rightarrow 0<x^r<x^{r'}$.

b) Densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Théorème:

Soit p un entier premier, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$. Alors $\sqrt[n]{p}$ est un irrationnel.

Démonstration:

Comme $\sqrt[n]{p}$ est un réel >0, s'il était rationnel il s'écrirait $\frac{m}{q}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors dans $\mathbb{N}^*$ on aurait $m^n = p\,q^n$, donc p premier diviserait m et $m = k\,p$ avec $k \in \mathbb{N}^*$; de même, $k^n p^{n-1} = q^n$ entraînerait $p \mid q$, donc m et q ne seraient pas premiers entre eux, ce qui contredit leur définition.

Remarque:

On montre de même que $\sqrt[n]{x}$ est irrationnel si x est produit de l entiers premiers distincts $(l \geq 2)$ $p_1, \ldots, p_l$.

Théorème:

L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration:

Considérons par exemple $\sqrt{3}$ qui est irrationnel d'après le théorème précédent.

Si x et y sont deux réels tels que $x<y$, donc tels que $\frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{y}{\sqrt{3}}$, d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que: $\frac{x}{\sqrt{3}} < r < \frac{y}{\sqrt{3}}$.

Si $r \neq 0$, on pose $r' = r$ et si $r = 0$, par densité de $\mathbb{Q}$, il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $r < r' < \frac{y}{\sqrt{3}}$.

Dans les deux cas, $\frac{x}{\sqrt{3}} < r' < \frac{y}{\sqrt{3}}$ donc $x < r'\sqrt{3} < y$ et $r'\sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un irrationnel.

c) Racines $n^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{R}$:

On obtient facilement, en appliquant en particulier la règle des signes:

- si $x>0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

ou bien n est pair, x a deux racines $n^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ et $-\sqrt[n]{x}$,

ou bien n est impair, x a une seule racine $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$.

-si $x<0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

ou bien n est pair, x n'a pas de racine $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{R}$,

ou bien n est impair, x a une seule racine $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{R}$ qui est $-\sqrt[n]{-x}$.

Remarque:

Si n est un entier impair s'écrivant $n = 2p+1$ $p \in \mathbb{N}$, pour tout x réel, x a une seule racine $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{R}$. On peut la noter $\sqrt[n]{x}$ et les règles de calcul sont alors semblables à celles vues dans a).

B) Topologie de $\mathbb{R}$, intervalles, voisinages.

1- Voisinages dans $\mathbb{R}$.

a) Intervalles de $\mathbb{R}$:

Définition:

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant:

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \in I,\ b \in I \text{ et } a \leq c \leq b) \Rightarrow c \in I.$

Propriété de convexité:

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi I est une partie convexe i.e.

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \theta \in [0, 1],\ (1-\theta)\,x + \theta\,y \in I.$$

Par récurrence, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \left((x_1, \ldots, x_n) \in I^n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \theta_i\, x_i \in I.$$

Remarque:

Un intervalle non vide et non réduit à un point sera dit *intervalle non trivial*. C'est un ensemble infini.

Classification:

Suivant que I est majoré ou non, minoré ou non, et que la borne supérieure (resp. inférieure) quand elle existe appartient ou non à I, on obtient 9 sortes d'intervalles (non vides).

i) ***les intervalles bornés:***

$a \leq b$ dans $\mathbb{R}$:	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$	segment,
$a < b$ dans $\mathbb{R}$:	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$	intervalle ouvert,
$a < b$ dans $\mathbb{R}$:	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$	
	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$	intervalles semi-ouverts.

ii) ***les intervalles non bornés:***

$a \in \mathbb{R}$:	$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; x > a\}$	intervalle ouvert minoré,
	$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; x \geq a\}$	intervalle fermé minoré,
$b \in \mathbb{R}$:	$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} ; x < b\}$	intervalle ouvert majoré,
	$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq b\}$	intervalle fermé majoré,
et enfin	$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.	

b) Définition d'un voisinage:

Définition:

Si x est un réel, une partie V de $\mathbb{R}$ est dite voisinage de x (dans $\mathbb{R}$) lorsqu'il existe α, β réels tels que $\alpha < x < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset V$.

Si x est un réel, une partie V de $\mathbb{R}$, est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ ssi il existe un réel ε strictement positif tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.

On note $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Propriétés de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$:

i) tout *intervalle ouvert contenant* x est un voisinage de x.
ii) toute *intersection finie* de voisinages de x est un voisinage de x.
iii) toute *partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage* de x est un voisinage de x.

Pour obtenir le ii) il suffit de prendre $\alpha = \max(\alpha_1, .., \alpha_p)$ et $\beta = \min(\beta_1, .., \beta_p)$.

c) Intérieur:

Définition:

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, un point intérieur à A est un réel a dont A est un voisinage. L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A et est noté $\mathring{A}$.

$$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+};\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A.$$

Propriétés ensemblistes:

Entre $A, B, A_1, .., A_p$, parties de $\mathbb{R}$, on a les relations suivantes:
① $\mathring{A} \subset A$ ② $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ ③ l'intérieur de $\mathring{A}$ est $\mathring{A}$
④ $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{1\le k\le p} A_k}} = \bigcap_{1\le k\le p} \mathring{A}_k$ ⑤ $\bigcup_{1\le k\le p} \mathring{A}_k \subset \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{1\le k\le p} A_k}}$

Exemples:

i) ~~Adhérences~~ intérieurs de diverses parties: $\overset{\circ}{\widehat{[a, b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]a, b[}} =]a, b[$;

$$\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset;\quad \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset;\quad \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} = \emptyset.$$

ii) Les démonstrations des relations ensemblistes sont immédiates. Pour ⑤ notons que *la réunion des intérieurs n'est pas toujours l'intérieur de la réunion*:

$$\mathring{\mathbb{Q}} \cup \overset{\circ}{\widehat{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}} = \emptyset \neq \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

d) Adhérence:

Définition:

Un réel α est dit point adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si tout voisinage de α rencontre A i.e. $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha),\ V \cap A \neq \emptyset$.
L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Critères:

Pour $A \subset \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$
① $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists\, a \in A;\ |a-\alpha| < \varepsilon)$
② $\alpha \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}};\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha)$.

Pour la condition nécessaire du ② on peut choisir $a_n \in A$ tel que $|\alpha - a_n| < \frac{1}{n+1}$.

Propriétés ensemblistes:

Si $A, B, A_1, .., A_p$ sont des parties de $\mathbb{R}$, on a les relations suivantes:
① $A \subset \overline{A}$ ② $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ ③ $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus A}}$
④ si A est non vide majorée (resp. minorée), $\sup_{\mathbb{R}} A \in \overline{A}$ (resp. $\inf_{\mathbb{R}} A \in \overline{A}$)
⑤ $\overline{\bigcup_{1\le k\le p} A_k} = \bigcup_{1\le k\le p} \overline{A_k}$ ⑥ $\overline{\bigcap_{1\le k\le p} A_k} \subset \bigcap_{1\le k\le p} \overline{A_k}$ ⑦ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Démonstration:

La plupart des résultats énoncés sont immédiats.

∗ Pour ④, si $\alpha = \sup_{\mathbb{R}} A$, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $[\alpha-\varepsilon, \alpha] \cap A \neq \emptyset$, et donc pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$, $V \cap A \neq \emptyset$.

∗ Pour ③, soit $x \notin \overline{A}$. Par définition, de l'adhérence, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ tel que $V \cap A$ est vide, donc V est inclus dans $(\mathbb{R} \setminus A)$ et $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus A}}$, par définition de l'intérieur.

Réciproquement, si $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus A}}$, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ tel que $V \subset (\mathbb{R} \setminus A)$, donc V et A sont disjoints et x n'est pas adhérent à A.

∗ Pour ⑦ on utilise la propriété ③ sachant que l'intérieur de $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus A}}$ est $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus A}}$ (voir c)).

Exemples:

i) Adhérences de diverses parties: $\overline{]a,b[} = [a,b] = \overline{[a,b]}$; $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$; $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
ii) Si A est une partie de $\mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\overline{A} = \mathbb{R}$.
iii) L'intersection de deux adhérences n'est pas toujours l'adhérence de l'intersection:

$$\overline{]0,1[} \cap \overline{]1,3[} = \{1\} \neq \emptyset.$$

2- Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

a) Ouverts de $\mathbb{R}$:

Définition:

Une partie Ω de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si c'est l'ensemble vide, ou bien un voisinage de chacun de ses points i.e.

$$\Omega = \emptyset \text{ ou } (\forall\, x \in \Omega,\ \Omega \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)).$$

Critères:

Si Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}$,

Ω ouvert $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \Omega,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}^{*+};\ ]x-\eta, x+\eta[\ \subset \Omega\ )$ $\Leftrightarrow$ $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$.

Démonstration:

Elle est immédiate si l'on se souvient que la 2ème propriété caractérise un voisinage de x et que $\overset{\circ}{\Omega}$ est l'ensemble des points dont Ω est un voisinage.

Propriétés des ouverts de $\mathbb{R}$:

i) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert,
ii) toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert,
iii) tout ouvert est réunion d'une famille d'intervalles ouverts.

Démonstration:

i) une intersection finie de voisinages de x dans $\mathbb{R}$ est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$,
ii) un «sur-ensemble» d'un voisinage de x est un voisinage de x,
iii) si Ω est ouvert non vide, c'est une réunion d'intervalles ouverts car:

$$(\forall x \in \Omega, \exists \eta(x) \in \mathbb{R}^{*+};\ ]x-\eta(x), x+\eta(x)[\ \subset \Omega) \Rightarrow \Omega = \bigcup_{x\in\Omega}]x-\eta(x), x+\eta(x)[.$$

Caractérisation de l'intérieur:

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion).

En effet, $\overset{\circ}{A}$ est, par double inclusion, la réunion des ouverts inclus dans A.

Exemples d'ouverts de $\mathbb{R}$:

$\emptyset$, $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$, $\mathbb{R}$, toute réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

b) Fermés de $\mathbb{R}$:

Définition:

Un fermé de $\mathbb{R}$ est par définition le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ouvert de $\mathbb{R}$.

Critère:

Si F est une partie de $\mathbb{R}$, F fermé de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $F = \overline{F}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{F} \subset F$.

Propriétés des fermés de $\mathbb{R}$:

Toute réunion finie, toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé.

Exemples de fermés de $\mathbb{R}$:

$\emptyset$ et $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
(Pour $[a, b]$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, leur complémentaire est une réunion d'intervalles ouverts)

Caractérisation de l'adhérence:

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A (au sens de l'inclusion).

Il y a des parties de $\mathbb{R}$ ni ouvertes ni fermées, par exemple $]a, b]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Ouverts et fermés relatifs:

Définitions:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
On appelle ***ouvert*** de A toute intersection avec A d'un ouvert de $\mathbb{R}$.
On appelle ***fermé*** de A toute intersection avec A d'un fermé de $\mathbb{R}$.
Si x est un point de A, on appelle ***voisinage*** de x dans A, toute intersection avec A d'un voisinage de x dans $\mathbb{R}$.

Remarque:

Tout fermé de A est le complémentaire dans A d'un ouvert de A car si Ω est un ouvert:

$$(\mathbb{R} \setminus \Omega) \cap A = A \setminus \Omega = A \setminus (\Omega \cap A).$$

Propriétés immédiates:

Les propriétés vues pour les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}$ restent valables pour les ouverts et les fermés d'une partie A de $\mathbb{R}$. En particulier:
-toute réunion d'ouverts de A est un ouvert de A,
-toute intersection finie d'ouverts de A est un ouvert de A,
-toute intersection de fermés de A est un fermé de A,
-toute réunion finie de fermés de A est un fermé de A.

3- Compacité.

a) Théorème de *Bolzano-Weierstrass*:

Définition:

Une ***valeur d'adhérence*** de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un réel λ tel que pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $|u_n - \lambda| < \varepsilon$ est infini.

Propriété:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, le réel λ est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers λ.

Démonstration:

Condition nécessaire:

Si λ est une valeur d'adhérence de (u_n), on construit φ par récurrence:

i) $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ est tel que $|u_{\varphi(0)} - \lambda| < 1$,

ii) $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ étant construits tels que:

$$\begin{cases} \varphi(0) < \varphi(1) < .. < \varphi(n) \\ \forall k \in [0, n],\ |u_{\varphi(k)} - \lambda| < \dfrac{1}{2^k} \end{cases}$$

on remarque que l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} ; |u_p - \lambda| < \frac{1}{2^{n+1}}\}$ est infini, donc contient des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n)$; on en choisit un comme $\varphi(n+1)$.

Condition suffisante:

Si $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\{n \in \mathbb{N} ; |u_{\varphi(n)} - \lambda| < \varepsilon\}$ est infini, donc a fortiori $\{n \in \mathbb{N} ; |u_n - \lambda| < \varepsilon\}$.

Remarque:

Si une suite (u_n) est une suite convergente, elle a une seule valeur d'adhérence, sa limite, puisque toute sous-suite d' une suite convergeant vers l, converge aussi vers l.

Théorème de Bolzano-Weierstrass:

Toute suite réelle bornée a au moins une valeur d'adhérence, donc admet une sous-suite convergente.

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle bornée. Il existe a et b réels tels que pour tout n, $a \le u_n \le b$.

① On construit alors ***par récurrence*** à partir de $[a, b] = [a_0, b_0]$ une suite $([a_p, b_p])$ de segments emboîtés tels que $\{n \in \mathbb{N} ; u_n \in [a_p, b_p]\}$ soit infini.

Pour p entier naturel, le prédicat de récurrence $W(p)$ s'écrit:

$$\begin{cases} a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_p \text{ existent tels que } a_0 = a \le a_1 \le \cdot\cdot \le a_p < b_p \le \cdot\cdot \le b_1 \le b_0 = b, \\ \forall k \in [0, p],\ \ b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} \text{ et } \{n \in \mathbb{N} ; u_n \in [a_k, b_k]\} \text{ est infini.} \end{cases}$$

i) $W(0)$ est vraie.

ii) Si $W(p)$ est vraie, on prend $c_p = \dfrac{a_p + b_p}{2}$, et on définit $\mathcal{N}_p = \{n \in \mathbb{N} ; u_n \in [a_p, c_p]\}$ et $\mathcal{N}_p' = \{n \in \mathbb{N} ; u_n \in [c_p, b_p]\}$. La réunion $\mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_p'$ est infinie d'après $W(p)$:

* si $\mathcal{N}_p$ est infini, on prend $a_{p+1} = a_p$ et $b_{p+1} = c_p$
* sinon, $\mathcal{N}_p$ étant fini, $\mathcal{N}_p'$ est nécessairement infini, on prend $a_{p+1} = c_p$ et $b_{p+1} = b_p$.

Dans les deux cas $W(p+1)$ est vraie.

Par récurrence, $W(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

② D'après le *théorème des segments emboîtés*, la suite $([a_p, b_p])_{p\in\mathbb{N}}$ des segments emboîtés ainsi construits ***a pour intersection un singleton $\{c\}$.***

Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \dfrac{b-a}{\varepsilon}$, et si l'entier p est supérieur à N,

$$0 \le b_p - a_p = \frac{b-a}{2^p} < \frac{b-a}{p} < \varepsilon,\ a_p \le c \le b_p \text{ et } \{n \in \mathbb{N} ; a_p \le u_n \le b_p\} \text{ est infini.}$$

Donc $\{n \in \mathbb{N} ; |u_n - c| < \varepsilon\}$ est infini, et ***c est valeur d'adhérence de (u_n).***

Remarque:

Le procédé adopté pour construire les segments emboîtés $[a_p, b_p]$ est un ***procédé de dichotomie***: $[a_{p+1}, b_{p+1}]$ est une «moitié» de $[a_p, b_p]$, retenue pour une certaine propriété (dichotomie signifiant action de couper en deux).

b) Parties compactes de $\mathbb{R}$:

Définition:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite ***compacte*** lorsque toute suite à valeurs dans A a au moins une valeur d'adhérence dans A i.e. admet une sous-suite convergente dont la limite est élément de A.

Caractérisation:

Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ à la fois ***fermées et bornées***.

Démonstration :

Condition nécessaire: Si A est compact,

i) A est fermé puisque $\bar{A} \subset A$. Si a est un point adhérent à A, il est limite d'une suite de points de A. Cette suite a une valeur d'adhérence dans A qui ne peut être que a.

ii) A est borné car sinon il existerait une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A, telle que pour tout n entier, $|a_n| \ge n$, et une sous-suite de (a_n), n'étant pas bornée, ne pourrait converger.

Condition suffisante: Si A est borné, toute suite de points de A est bornée donc admet une sous-suite convergeant dans $\mathbb{R}$, et la limite est dans A puisque A est fermé.

Exemples de parties compactes de $\mathbb{R}$:

-tout segment de $\mathbb{R}$ est compact

-toute partie finie de $\mathbb{R}$ est compacte.

4- Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Voisinages:

Pour unifier certains énoncés (de limites en particulier), on «complète» $\mathbb{R}$ par deux objets non réels $-\infty$ et $+\infty$.

Définition:

$\overline{\mathbb{R}}$ droite numérique achevée est $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ensemble muni d'un ordre total prolongeant celui de $\mathbb{R}$, noté $\le$ et obtenu en posant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty.$$

Pour cette relation d'ordre, toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ non vide admet une borne supérieure (i.e. un plus petit majorant) et une borne inférieure (i.e. un plus grand minorant).

Plus précisément, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide,

-ou A est majorée dans $\mathbb{R}$: $\sup_{\mathbb{R}} A$ existe et c'est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$

-ou A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, et $+\infty$ est borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.

De même pour les bornes inférieures.

On prolonge aussi la notion de voisinage dans $\mathbb{R}$ à $-\infty$ et $+\infty$.

Voisinages:

On appelle voisinage dans $\mathbb{R}$ de $+\infty$ ***toute partie V de*** $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $[a, +\infty[\subset V$. L'ensemble de ces voisinages est noté $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty)$.
On appelle voisinage dans $\mathbb{R}$ de $-\infty$ toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, b] \subset V$. L'ensemble de ces voisinages est noté $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(-\infty)$.

$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(-\infty)$ et $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty)$ ont les mêmes propriétés que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ lorsque x est réel, en particulier celle d'intersection finie.

Points adhérents:

$\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est dit adhérent à $A \subset \mathbb{R}$ lorsque pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$, $V \cap A \neq \emptyset$.

b) Points d'accumulation:

Définition:

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit qu'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ est point d'accumulation de A si a est adhérent à $A \setminus \{a\}$, c'est à dire si tout voisinage de a dans $\mathbb{R}$ rencontre A en un point autre que a.

Remarques:

i) Un point d'accumulation de A peut ou non appartenir à A.
ii) Tout point d'accumulation de A appartient à l'adhérence de A, mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, tout réel est point d'accumulation de $\mathbb{Q}$, mais $\mathbb{N}$ n'a aucun point d'accumulation.

Proposition:

Pour que a soit point d'accumulation de A, il faut et il suffit que pour tout voisinage V de a dans $\mathbb{R}$, $V \cap A$ soit infini.

Démonstration:

i) Si $V \cap A$ est infini, il contient un point de A autre que a.

ii) ***Réciproquement***, pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a)$, $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des éléments distincts de $V \cap (A \setminus \{a\})$, il existe $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a)$ tel qu'aucun des x_i n'appartiennent à V':

$*$ si $a \in \mathbb{R}$, on prend $V' =]a-r, a+r[$, avec $r = \min\limits_{1 \le i \le n} (|x_i - a|)$,

$*$ si $a = +\infty$, on prend $V' =]m, +\infty[$, avec $m = \max\limits_{1 \le i \le n} (|x_i|)$,

$*$ si $a = +\infty$, on prend $V' =]-\infty, -m[$, avec $m = \max\limits_{1 \le i \le n} (|x_i|)$.

Si on pose ensuite $V'' = V \cap V'$, $V'' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a)$ (comme intersection de voisinages de a), donc $V' \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ et il existe x_{n+1} dans $V' \cap (A \setminus \{a\})$, donc dans $V \cap (A \setminus \{a\})$ qui est distinct des x_i pour $1 \le i \le n$.

Ainsi, si $V \cap (A \setminus \{a\})$ contient au moins n éléments, il en contient au moins $n + 1$, donc est infini, et il en est de même a fortiori de $V \cap A$.

Définition:

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on appelle ***point isolé de A*** tout point de A qui n'est pas point d'accumulation de A, c'est à dire tout point de A ayant un voisinage V dans $\mathbb{R}$ tel que $V \cap A = \{a\}$.

Exemples:

i) Tout point de $\mathbb{N}$ est isolé.
ii) Si A est une ***partie fermée*** de $\mathbb{R}$, A est la réunion de l'ensemble de ses points isolés et de l'ensemble de ses points d'accumulation réels.

C) Suites réelles.

1- Limites de suites.

a) Suites convergentes:

Rappel:

On dit que qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel l lorsque:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \ge N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Remarques:

i) Dans la suite N associé à ε sera noté $N(\varepsilon)$, (il n'est pas unique).
ii) On a vu qu'une suite vérifiant cette propriété est *bornée* et que sa limite l est *unique*.
iii) La définition s'étend sans difficulté aux suites «définies à partir d'un certain rang»: $(u_n)_{n \ge q}$. Il suffit d'imposer $N(\varepsilon) \ge q$.

Propriétés d'opérations:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $l, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ des réels.

① $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Leftrightarrow |u_n - l| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |l|$.

② $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu) \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \lambda + \beta \mu$.

③ $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (v_n) bornée$) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

④ $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \mu$.

⑤ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ avec $l \neq 0$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $n \ge m \Rightarrow u_n \neq 0$, et:

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ n \ge m}]{} \frac{1}{l}.$$

Démonstration:

i) Pour ②, on peut écrire:
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow (|u_n - \lambda| < \varepsilon$ et $|v_n - \mu| < \varepsilon))$.
On pose $M = \mathrm{Max}\,(|\alpha|, |\beta|, 1)$, et on peut écrire:

$$|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha \lambda + \beta \mu)| \le |\alpha|\,|u_n - \lambda| + |\beta|\,|v_n - \mu| < \varepsilon \text{ dès que } n \ge N\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$$

ii) Pour ④, $u_n (v_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après ③ puisque la suite (u_n) convergente est bornée et $u_n \mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \mu$ d'après ② donc $u_n v_n = u_n (v_n - \mu) + u_n \mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \mu$.

iii) Pour ⑤, si $m = N\left(\frac{|l|}{2}\right)$ pour tout $n \geq m$, $||u_n| - |l|| \leq \frac{|l|}{2}$, donc $|u_n| \geq \frac{|l|}{2}$.

Alors, pour tout $n \geq m$, $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leq \frac{2}{l^2}|l - u_n| < \varepsilon$ dès que $n \geq \text{Max}\left(m, N\left(\frac{\varepsilon l^2}{2}\right)\right)$.

b) Inégalités:

① Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l et si $\alpha < l < \beta$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\alpha < u_n < \beta$.

② Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels l et l' et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq p$, $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$ (***prolongement des inégalités*** aux limites).

③ Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles telles que

i) (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite l

ii) il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$, $a_n \leq c_n \leq b_n$,

alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l (***convergence par encadrement***).

Démonstration:

① On prend $0 < \varepsilon < \min(\beta - l, l - \alpha)$ et $N = N(\varepsilon)$.

② Si $l > l'$, à partir d'un certain rang, on a d'après ①, $u_n > \frac{l + l'}{2} > v_n$ ce qui contredit les hypothèses.

③ On prend $N(\varepsilon)$ valable à la fois pour (a_n) et (b_n) et:

$$n \geq \text{Max}(N_0, N(\varepsilon)) \Rightarrow l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon.$$

2- Suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

a) Définition:

i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on écrit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou plus simplement $u_n \to +\infty$ si:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A).$$

ii) On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on écrit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq A).$$

Remarques:

i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et l un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, la propriété «$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$» peut s'exprimer de façon unifiée par:

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l), \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \in V).$$

ii) Malgré cette unification, une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas bornée, donc n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$.

iii) Comme,d'après 2-a), $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \Leftrightarrow -u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on se limitera par la suite aux énoncés concernant les suites tendant vers $+\infty$.

b) Propriétés immédiates:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle.

① Si $u_n > 0$ pour $n \geq n_0$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

② Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

③ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et si $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $u_n + v_n \to +\infty$.

④ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et si $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R}^{*+} \cup \{+\infty\}$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exemples de suites tendant vers $+\infty$:

i) Si $r \in \mathbb{Q}^{*+}$, $n^r \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, car pour $A > 0$, $n > E(A^{1/r}) \Rightarrow n^r > A$, et par ①, $n^{-r} \to 0$.

ii) ***Suite géométrique:*** c'est une suite de la forme $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où a s'appelle la raison.

Si $a > 1$, $a^n = ((a-1)+1)^n \geq n(a-1) \to +\infty$.

Si $|a| < 1$, $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puisque si $a \neq 0$, $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \to +\infty$.

iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $\frac{n!}{a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

En effet, pour $p > E(a)$ et $n \geq p$, $\frac{n!}{a^n} \geq \frac{p!}{a^p} \times \left(\frac{p}{a}\right)^n \times \left(\frac{a}{p}\right)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

3- Suites monotones réelles.

Théorème de la limite monotone:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle, et $U = \{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

i) Supposons (u_n) croissante,
si elle est majorée, elle converge vers $l = \sup_{\mathbb{R}} U$, et sinon elle tend vers $+\infty$.

ii) Supposons (u_n) décroissante,
si elle est minorée, elle converge vers $l = \inf_{\mathbb{R}} U$, et sinon elle tend vers $-\infty$.

Démonstration:

Remarquons qu'on peut se limiter au cas où la suite est croissante (si elle est décroissante, on change u_n en $-u_n$). Posons alors $l = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} U$.

i) Si (u_n) est majorée i.e. $l \in \mathbb{R}$, par critère de borne supérieure dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, (\exists N \in \mathbb{N}; l - \varepsilon < u_N \leq l) \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l).$$

ii) Si (u_n) n'est pas majorée i.e. $l = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, (\exists N \in \mathbb{N}; u_N \geq A) \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq A).$$

Corollaires:

① Toute suite monotone a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, par exemple si (u_n) est croissante:

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \{u_n ; n \in \mathbb{N}\}.$$

② Une suite monotone réelle converge ssi elle est bornée.

Démonstration:

Le corollaire ① a été vu dans la démonstration du théorème, et pour le corollaire ②, on remarque qu'une suite croissante est toujours minorée (par son premier terme u_0).

Remarques:

i) Le *théorème de la limite monotone*, ainsi que ses corollaires s'applique aux suites monotones à partir d'un certain rang.

ii) On peut retrouver le *théorème sur les suites adjacentes* (A-1) à partir de ces résultats.

4- Extension de la notion de convergence aux suites complexes.

a) Définitions:

Une suite complexe est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u: n \mapsto u_n$.

Convergence d'une suite complexe:

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe $l \in \mathbb{C}$ (appelé limite de (u_n)) tel que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Remarque:

Cette définition ***s'écrit*** exactement comme celle de la convergence d'une suite réelle, mais ici $|u_n - l|$ est un module.

Terminologie: comme dans $\mathbb{R}$

On dit « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l » ou «l est limite de (u_n)», et on écrit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

b) Propriétés:

Les propriétés qui suivent se démontrent (et souvent s'énoncent) comme pour les suites réelles.

Unicité de la limite:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite complexe converge à la fois vers l_1 et vers l_2, alors $l_1 = l_2$.
On peut donc écrire $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Conséquence de la définition de la convergence:

i) Toute suite complexe convergente est bornée
i.e. $\exists M \in \mathbb{R}^{+};\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

ii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall l \in \mathbb{C}$,
$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Leftrightarrow \overline{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{l}$.

Propriétés d'opérations:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et l, α, β, λ, μ des complexes.

① $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Leftrightarrow |u_n - l| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
(dans $\mathbb{C}$) (dans $\mathbb{R}$)

② $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |l|$ (dans $\mathbb{R}$).

③ $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu) \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\lambda + \beta\mu$.

④ $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et (v_n) bornée$) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

⑤ $(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu) \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\mu$.

⑥ Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ avec $l \neq 0$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq m \Rightarrow u_n \neq 0$, et:
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ n\geq m}]{} \frac{1}{l}.$$

Proposition:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \Re e\, u_n$ et $b_n = \Im m\, u_n$. Alors, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + ib\right) \Leftrightarrow \left(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \text{ et } b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b.\right)$$

Conséquence:

Soit (u_n) une suite complexe ***dont toutes les valeurs sont réelles***. Si (u_n) converge vers l dans $\mathbb{C}$ alors l est réel et (u_n) converge vers l dans $\mathbb{R}$.

c) Suites de *Cauchy* dans $\mathbb{C}$:

Définition:

Une *suite de Cauchy* dans $\mathbb{C}$ est une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que:
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$

Théorème:

Une suite complexe converge ssi elle est de *Cauchy* dans $\mathbb{C}$.

Démonstration:

Il suffit de considérer la partie réelle et la partie imaginaire en remarquant que:

$$(a_n + i\, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de } Cauchy \text{ dans } \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_n) \text{ est de } Cauchy \text{ dans } \mathbb{R} \\ (b_n) \text{ est de } Cauchy \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

D) Limites de fonctions et continuité.

1- Limites de fonctions réelles de variable réelle.

Dans tout le paragraphe, on considère des fonctions réelles de variable réelle, c'est à dire des applications d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Définitions et premières propriétés:

Définition des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$:

i) Soit $f: D \to \mathbb{R}$, α un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f a pour limite l en α ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers α, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} l$, lorsque:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l), \exists V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha);\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \in V \cap D \Rightarrow f(x) \in W).$$

ii) Soit $f: D \to \mathbb{R}$, A une partie de D, et α un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A.
On dit que f a pour limite l en α suivant A ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers α dans A, et on note $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l$, lorsque $f_{|A}(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} l$.

Remarques:

i) Il y a équivalence entre $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A'}]{} l$, et $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l$, lorsqu'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha)$ tel que $A' \cap V_0 = A \cap V_0$.

ii) Cette définition, dans le cas où $D = \mathbb{N}$ et $\alpha = +\infty$, est compatible avec celle de la limite des suites.

Unicité de la limite:

> Soit l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l'$, alors $l = l'$.

En effet, si l et l' sont deux éléments différents de $\overline{\mathbb{R}}$, il existe W voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l et W' voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l' tels que: $W \cap W' = \emptyset$.
On peut donc parler sans ambiguïté de *la limite* de f en α et noter: $l = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}} f(x)$.

Critère séquentiel:

> Soit l dans $\overline{\mathbb{R}}$
> $$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l \Leftrightarrow (\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ (a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha) \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l)$$

Démonstration de la condition suffisante:

On raisonne par l'absurde, en supposant que l n'est pas limite de f:

$$\exists W \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l);\ \forall V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha), \exists x \in V \cap A; f(x) \notin W.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, - si $\alpha \in \mathbb{R}$, on prend $V_n =]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[$,
- si $\alpha = +\infty$, on prend $V_n = [n, +\infty[$,
- si $\alpha = -\infty$, on prend $V_n =]-\infty, -n]$,

et on choisit a_n dans $V_n \cap A$ tel que $f(a_n) \notin W$.

Composition des limites:

> On suppose données deux parties D et Δ de $\mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ et $g: \Delta \to \mathbb{R}$.
> Soit $A \subset D$ et $B \subset \Delta$, tel que $f(A) \subset B$ ainsi que α, β, l des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que α est adhérent à A.
> Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} \beta$ et $g(y) \xrightarrow[\substack{y \to \beta \\ y \in B}]{} l$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l$.

Remarques:

i) β est un point adhérent à B car $f(A) \subset B$ et $f(x)$ tend vers β quand x tend dans A vers α.

ii) Ce théorème de composition peut s'obtenir par le critère des suites ci-dessus.

b) Cas des limites réelles:

Critère pour les limites réelles:
On utilise le critère valable ***pour l réel.***

> $$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha);\ (x \in V \cap A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Remarques:

i) Dans le critère, ε étant quelconque dans $\mathbb{R}^{*+}$, on peut remplacer «$|f(x) - l| < \varepsilon$» par «$|f(x) - l| \leq \varepsilon$».

ii) $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l \Leftrightarrow |f(x) - l| \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} 0$.

iii) Si, de plus α est réel, le critère s'écrit:

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to \alpha \\ x \in A}]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+};\ \forall x \in A,\ (|x - \alpha| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Critère de Cauchy:

> Si f est une application de A dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \overline{A}$, pour que f admette une limite réelle en α suivant A, il faut et il suffit qu'elle vérifie le *critère de Cauchy:*
> $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha);\ \forall (x, y) \in A^2,\ (x \in V \text{ et } y \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Démonstration:

Condition nécessaire:

Si $f(x) \to l$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha)$; $\forall x \in A$, $(x \in V_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Donc, pour $x \in V_{\varepsilon/2}$ et $y \in V_{\varepsilon/2}$,

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-l| + |l-f(y)| < \varepsilon.$$

Condition suffisante

On suppose maintenant que:

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, V_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall\,(x,y)\in A^2,\ (x\in V_\varepsilon \text{ et } y\in V_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers α, et $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_\varepsilon$, donc:

$$\forall\,(p,q)\in \mathbb{N}^2,\ (p>n_0 \text{ et } q>n_0) \Rightarrow |f(x_p)-f(x_q)|<\varepsilon$$

et cela prouve que la suite $(f(x_n))$ est de *Cauchy* donc ***converge dans*** $\mathbb{R}$ ***vers une limite l.***

Si maintenant on considère une suite quelconque $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers α, on forme la suite (z_n) en posant:

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ z_{2n}=x_n \quad\text{et}\quad z_{2n+1}=y_n.$$

Elle converge vers α, donc par le raisonnement précédent, la suite $(f(z_n))$ est de *Cauchy* dans $\mathbb{R}$ donc converge vers l (puisque $f(z_{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$).

En appliquant le critère séquentiel, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l$.

Propriétés liées aux opérations.

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 étant définies sur $A \subset \mathbb{R}$, et l_1, l_2 étant des ***réels***.

En supposant que $f_1(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l_2$ on obtient:

① $|f_1(x)| \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} |l_1|$,

② Si $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$,

③ $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l_1 l_2$,

④ Si $l_1 \neq 0$ alors:

$$\exists\, V_0\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha),\ \exists\, m\in\mathbb{R}^{*+};\ \forall\, x\in V_0\cap A,\ |f_1(x)|\geq m \text{ et: } \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A\cap V_0}]{} \frac{l_2}{l_1}.$$

Propriétés liées à l'ordre:

① S'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que f_1 soit bornée sur $V_0 \cap A$ et si de plus $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} 0$, alors $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} 0$.

② Si $f_1(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l_1$ et $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l_2$ et si en outre il existe $V_0\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x\in V_0\cap A$, $f_1(x)\leq f_2(x)$, alors $l_1 \leq l_2$.

③ Si l est un réel, si $f_1(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l$, $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l$ et s'il existe $V_0\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x\in V_0\cap A$, $f_1(x)\leq f_3(x)\leq f_2(x)$, alors $f_3(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l$.

Indication sur les démonstrations:

- elles sont semblables à celles sur les suites: par exemple $n \geq \max(N, N')$ devient $x \in (V_1\cap V_2)\cap A$
- on utilise de façon essentielle la propriété d'intersection finie des voisinages.

c) «Limites infinies»:

Les applications f, g f_1, f_2, .. étant toutes définies au moins sur une partie A de $\mathbb{R}$ telle que α soit adhérent à A, on obtient:

Critères:

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty \Leftrightarrow (\forall\, C\in\mathbb{R}^{*+}, \exists\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha); (x\in V\cap A \Rightarrow f(x)\geq C))$$

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} -\infty \Leftrightarrow (\forall\gamma\in\mathbb{R}^{*-}, \exists\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha); (x\in V\cap A \Rightarrow f(x)\leq\gamma))$$

Propriétés:

① $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} -\infty \Leftrightarrow -f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$.

② S'il existe $V_0\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x\in V_0\cap A$, $f(x)>0$,

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in V_0\cap A}]{} 0.$$

③ S'il existe $V_0\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x\in V_0\cap A$, $g(x)\geq f(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$ implique $g(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$.

④ Si $f_1(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$ et $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, alors $f_1(x)+f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$.

⑤ Si $f_1(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$ et $f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} l\in\mathbb{R}^{*+}\cup\{+\infty\}$, alors $f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[\substack{x\to\alpha\\ x\in A}]{} +\infty$.

d) Expression des limites dans les cas particuliers:

1- *Limite à droite en α réel:*

A est de la forme $]\alpha, \alpha'[$, $\alpha < \alpha'$.

La propriété de limite ne dépend pas du choix de α' tel que $]\alpha, \alpha'[\subset D$, donc on écrit:

$$f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}}{\longrightarrow} l \text{ ou } f(x) \underset{x \to \alpha^+}{\longrightarrow} l \text{ au lieu de } f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}}{\longrightarrow} l.$$

Dans les critères on remplace «$\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$» par «$\exists\, \eta \in \mathbb{R}^{*+}$» et $V \cap A$ par $]\alpha, \alpha+\eta[$.

N.B: l est parfois noté $f(\alpha+0)$, si $l \in \mathbb{R}$.

2- *Limite à gauche en α réel:*

A est de la forme $]\alpha'', \alpha[$, $\alpha'' < \alpha$.

La propriété de limite ne dépend pas du choix de α'' tel que $]\alpha'', \alpha[\subset D$, donc on écrit:

$$f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}}{\longrightarrow} l \text{ ou } f(x) \underset{x \to \alpha^-}{\longrightarrow} l \text{ au lieu de } f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}}{\longrightarrow} l.$$

Dans les critères on remplace «$\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$» par «$\exists\, \eta \in \mathbb{R}^{*+}$» et $V \cap A$ par $]\alpha-\eta, \alpha[$.

N.B: l est parfois noté $f(\alpha-0)$, si $l \in \mathbb{R}$.

3- *Limite en α par valeurs différentes:*

A est de la forme $]\alpha'', \alpha'[\setminus \{\alpha\}$, avec $\alpha'' < \alpha < \alpha'$.

La propriété de limite ne dépend pas, là encore, du choix de α'', α' tels que $]\alpha'', \alpha'[\setminus \{\alpha\} \subset D$, donc on écrit:

$$f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x \neq \alpha}}{\longrightarrow} l \text{ au lieu de } f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x \in A}}{\longrightarrow} l.$$

On peut remarquer l'équivalence:

$$f(x) \underset{\substack{x \to \alpha \\ x \neq \alpha}}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \left(f(x) \underset{x \to \alpha^+}{\longrightarrow} l \text{ et } f(x) \underset{x \to \alpha^-}{\longrightarrow} l\right).$$

N.B: «limite en α» tout court signifie que $A = D$ et, en général, que α est point intérieur à $D \cup \{\alpha\}$.

4- *Limite en $+\infty$ (resp $-\infty$):*

$A = [a_0, +\infty[\subset D$ (resp. $A =]-\infty, b_0] \subset D$).
La propriété de limite ne dépend pas du choix de a_0 (resp. de b_0), donc on écrit:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l, \quad (\text{resp. } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} l.)$$

Dans les critères on remplace: «$\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$» par «$\exists\, a \in \mathbb{R}$» (resp. «$\exists\, b \in \mathbb{R}$») et $V \cap A$ par $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b]$).

2- Fonctions monotones.

a) Définition:

Définition:

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.
f croît (ou est croissante) signifie:

$$\forall (a, a') \in D^2, a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a')$$

f décroît (ou est décroissante) signifie:

$$\forall (a, a') \in D^2, a \leq a' \Rightarrow f(a') \leq f(a)$$

dans ces deux cas, on dit que ***f est monotone*** sur A.
f croît strictement signifie:

$$\forall (a, a') \in D^2, a < a' \Rightarrow f(a) < f(a')$$

f décroît strictement signifie:

$$\forall (a, a') \in D^2, a < a' \Rightarrow f(a') < f(a)$$

dans ces deux cas, on dit que ***f est strictement monotone***.

De même si A est une partie de D, on dira que f est croissante (resp. décroissante, resp. strictement croissante, etc...) sur A si $f_{|A}$ est croissante (resp. décroissante, resp. strictement croissante, etc...).

Remarque:

i) En général, on étudie la monotonie de f sur I, intervalle non trivial inclus dans D.
ii) Du fait de la structure de corps ordonné de $\mathbb{R}$, il y a quelques propriétés d'addition et de multiplication, par exemple:
f est croissante ssi $-f$ est décroissante,
la somme de deux fonctions croissantes est croissante,
le produit de deux fonctions positives croissantes est une fonction croissante mais

L'ensemble des fonctions monotones sur A n'est stable ni par addition ni par multiplication.

b) Limite monotone:

Il s'agit de théorèmes semblables à ceux vus sur les suites.

Théorème:

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$). On définit:

$m = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} (f(]a, b[))$

et $M = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} (f(]a, b[))$.

Si f est croissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} m$ et $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} M$,

si f est décroissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} M$ et $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} m$.

Démonstration:

En changeant éventuellement x en $-x$ ou f en $-f$, on peut se contenter ***d'étudier la limite en b pour f croissante***.

- ***1er cas***: si la fonction f est majorée, M est élément de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq M$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Le réel $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f donc il existe $y \in]a, b[$ tel que $f(y) > M - \varepsilon$.

Mais alors, en raison de la croissance de f,

$$\forall x \in]y, b[, \; M - \varepsilon < f(x) \leq M, \text{ et }]y, b[= V \cap]a, b[, \; V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(b)$$

et on a donc, $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} M$.

- $2^{ème}$ *cas*: la fonction f n'est pas majorée et $M = +\infty$.

Pour tout A réel, A n'est pas un majorant de $f(]a, b[)$ donc il existe $y \in \,]a, b[$ tel que $f(y) > A$ et alors,

$$\forall x \in \,]y, b[,\ f(x) \geq f(y) > A,$$

ce qui montre que $f(x) \xrightarrow[x<b]{x \to b} +\infty$.

Le théorème précédent ne peut s'énoncer sous cette forme simple qu'à condition de prendre les bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans la pratique on aura intérêt à distinguer les bornes *réelles* et les bornes $+\infty$ et $-\infty$ comme dans la démonstration.

Corollaire:

Si f est monotone sur un intervalle I et si c est un point intérieur à I, f a, au point c, une limite à gauche et une limite à droite réelles.
Si on pose par convention $f(c+0) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x>c}} f(x)$ et $f(c-0) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x<c}} f(x)$, on a de plus, si f est croissante, $f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$.

Démonstration:

Il suffit d'appliquer ce qui précède aux restrictions de f à chacun des intervalles

$$I' = I \cap \,]-\infty, c[\ \text{ et } \ I'' = I \cap \,]c, +\infty[,$$

qui sont non vides puisque c est un point intérieur.
Les limites sont dans $\mathbb{R}$, parce que si, par exemple, f est croissante, f est majorée sur I' et minorée sur I'' par $f(c)$.

c) Composition des fonctions monotones:

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, f une application de A dans $\mathbb{R}$, g une application de B dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(A) \subset B$.

Proposition:

Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones), alors $g \circ f$ est monotone (resp. strictement monotone).

Plus précisément, si f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, $g \circ f$ est croissante, et si l'une est croissante tandis que l'autre est décroissante, $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration:

Par exemple si ***f est croissante*** et ***g décroissante***:

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow g(f(a)) \geq g(f(b)),$$

et cela montre que ***g o f est décroissante***.

3- Continuité.

Dans ce paragraphe, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Continuité en un point:

Définition:

Soit f une application de A dans $\mathbb{R}$ et a un point de A.

f est dite continue à droite en a lorsque: $f(x) \xrightarrow[x \in A \cap]a, +\infty[]{x \to a} f(a)$ $(a \neq \max(A))$.

f est dite continue à gauche en a lorsque: $f(x) \xrightarrow[x \in A \cap]-\infty, a[]{x \to a} f(a)$ $(a \neq \min(A))$.

f est dite continue en a lorsque: $f(x) \xrightarrow[x \in A \setminus \{a\}]{x \to a} f(a)$

ou, ce qui revient au même: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

D'après les critères vus, la continuité en a de f (à gauche) [à droite] pourra s'exprimer par:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+}; \forall x \in A, (x < a)\ [x > a], |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarques:

i) Si a est un point intérieur à A:

f continue en $a \Leftrightarrow f$ continue à gauche et à droite en a.

D'après les propriétés sur les limites:

ii) la continuité en a de f (à gauche) [à droite] équivaut à:

pour toute $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a $(a_n < a)$ $[a_n > a]$, $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

iii) on peut ajouter, multiplier des fonctions continues (à gauche) [à droite] en a: la fonction obtenue est continue (à gauche) [à droite] en a.

iv) il y a aussi un théorème de composition: cf D-1. a).

b) Continuité sur une partie:

Définition 1:

On dit qu'une application f de A dans $\mathbb{R}$ est continue si elle est continue en tout point de A i.e.

$$\forall a \in A,\ f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} f(a).$$

Définition 2:

Si B est une partie de A on dit que f est continue sur B si $f_{|B}$ est continue, i.e.

$$\forall b \in B,\ f(x) \xrightarrow[x \in B]{x \to b} f(b).$$

Remarque:

Lorsque A est un intervalle d'intérieur non vide I,

$$f \text{ continue} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue en tout } a \text{ intérieur à } I, \\ \text{si } I \text{ a un maximum } b, f \text{ est continue à gauche en } b, \\ \text{si } I \text{ a un minimum } a, f \text{ est continue à droite en } a. \end{cases}$$

Théorème 1 (critère global):

> Une application f de A dans $\mathbb{R}$ est continue ssi l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de A.

Démonstration:

Condition nécessaire:

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega = \overset{-1}{f}(O)$. Pour tout $x \in \Omega$ il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que:

$$]f(a) - \varepsilon(x), f(a) + \varepsilon(x)[\subset O.$$

En raison de la continuité de f en x, il existe $\eta(x) > 0$ tel que:

$$f(]x - \eta(x), x + \eta(x)[\cap A) \subset]f(x) - \varepsilon(x), f(x) + \varepsilon(x)[\subset O$$

Posons $\Omega' = \bigcup_{x \in \Omega}]x - \eta(x), x + \eta(x)[$ de sorte que $\Omega' \cap A = \Omega$.

Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc Ω est un ouvert de A.

Condition suffisante:

Soit a un point de A et $\varepsilon > 0$. Comme l'image réciproque de $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ est un ouvert de A, il existe $\eta > 0$ tel que:

$$]a - \eta, a + \eta[\cap A \subset f^{-1}(\,]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[), \text{ donc}$$

$$\forall x,\ x \in]a - \eta, a + \eta[\cap A \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Cela montre ***la continuité de f en tout $a \in A$***.

Théorème 1 bis:

> Une application f de A dans $\mathbb{R}$ est continue ssi l'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de A.

Ce théorème est équivalent au théorème 1 par passage au complémentaire.

Théorème 2 (critère séquentiel):

> Une application f de A dans $\mathbb{R}$ est continue ssi pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un point de A, la suite $(f(a_n))$ est convergente.

Démonstration:

Condition nécessaire:

Soit (a_n) une suite convergente vers a, la fonction f étant continue en a,

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a) \text{ et d'après le critère 1-a), } f(a_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a).$$

Condition suffisante:

i) On part maintenant de l'hypothèse: «si $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in A$, alors $(f(a_n))$ converge.»

Montrons d'abord que ***si $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, $f(a_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$.***

Pour cela, il suffit d'envisager la nouvelle suite (b_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n} = a_n \text{ et } b_{2n+1} = a.$$

Elle converge bien sûr vers a, donc $f(b_n)$ est convergente et comme $(f(b_{2n+1}))$ est constante de valeur $f(a)$, $f(b_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(a)$.

ii) Supposons maintenant que ***f ne soit pas continue en a***.

$$\exists \varepsilon > 0;\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in A;\ |x - a| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Prenons $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in A;\ |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

On en déduit que $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(a)$, et donc, d'après i) que $(f(x_n))$ ne peut converger, d'où la contradiction.

c) Propriétés des applications continues:

Les propriétés qui suivent se déduisent immédiatement des propriétés vues pour les limites.

Proposition 1 (opérations):

> Si f et g sont des applications continues de A dans $\mathbb{R}$ et λ et μ des réels, $|f|$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues.
> Si de plus, g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est continue.

Conséquences immédiates:

i) L'ensemble des applications continues de A dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{R}^A$ (opérations usuelles) notée $C^0(A, \mathbb{R})$.

ii) Toute fonction polynôme est continue. Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

Proposition 2 (composition):

> Si f est une application continue de A dans $\mathbb{R}$ et g une application continue de B dans $\mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue.

Proposition 3 (prolongement):

> Soit f une application continue de A dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à A mais non dans A, et l un réel. On pose $A' = A \cup \{a\}$.
> Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} l$, on définit une application $\tilde{f}$ continue de A' dans $\mathbb{R}$, prolongeant f en posant $\tilde{f}(a) = l$.
> L'application $\tilde{f}$ s'appelle alors le ***prolongement par continuité*** de f en a.

Démonstration:

Remarquons d'abord qu'il était indispensable que f ait une limite en a selon A et indispensable alors aussi de poser $\tilde{f}(a) = l$.

Pour montrer que $\tilde{f}$ ainsi définie est continue, il suffit alors de démontrer qu'elle est continue en a, et c'est le cas puisque $\tilde{f}(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} \tilde{f}(a)$.

Remarques:

i) Cette proposition servira surtout dans la pratique à prolonger une fonction continue sur un intervalle à l'une des bornes de l'intervalle.

ii) a est un point d'accumulation de A puisque $a \in \bar{A}$ et $a \notin A$.

d) Image continue d'un compact:

Théorème:

> Si f est une application continue de D dans $\mathbb{R}$ et A une partie compacte de D, alors $f(A)$ est compacte. ***L'image continue d'un compact est un compact.***

Démonstration:

Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $f(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f(a_n)$ avec $a_n \in A$; A étant compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in A$.

Alors par continuité de f sur A, $(b_{\varphi(n)}) = f(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, vers $f(a) \in f(A)$.

Corollaire:

> Soit a et b avec $a < b$ deux réels et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
> Alors
> i) f est bornée et atteint ses bornes,
> ii) $|f|$ a un maximum noté souvent $\|f\|_\infty$.

Démonstration:

Le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact et $f([a, b])$ étant compact, il est borné et fermé donc contient ses bornes. Pour ii), on applique i) à $|f|$.

4- Uniforme continuité.

a) Définitions:

Définition 1:

On dit qu'une application f de A dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue lorsque:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall (x, y) \in A^2,\ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Définition 2:

Dire que f est lipschitzienne (de rapport $K \in \mathbb{R}^+$) signifie:

$$\forall (x, y) \in A^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

On dit alors aussi que f est K-lipschitzienne.
On dit que f est contractante si elle est K-lipschitzienne avec $0 \leq K < 1$.

Remarque:

Si $B \subset A$, on dit que f est uniformément continue (resp. lipschitzienne) sur B lorsque $f_{|B}$ est uniformément continue (resp. lipschitzienne).

Propriétés:

Si f est lipschitzienne, elle est uniformément continue.
Si f est uniformément continue, elle est continue.

b) Théorème de *Heine*:

Théorème:

> Si A est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue.

Démonstration:

On raisonne par l'absurde en supposant ***f non uniformément continue sur A***:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+};\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists (x, y) \in A^2;\ |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{2^n}$, on obtient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A, vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - y_n| < \frac{1}{2^n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Comme A est compact, il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \leq \frac{1}{2^n}$, $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a, et par continuité de f, $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))$ converge vers $0 = f(a) - f(a)$ ce qui est absurde.

Exemples d'applications continues non uniformément continues:

Avec $A = \mathbb{R}^+$ non borné: $f : x \mapsto x^2$,

Avec $A =]0, 1]$ non fermé: $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

5- Approximation uniforme.

a) Généralités sur l'approximation uniforme:

Dans les énoncés qui suivent, D est une partie de $\mathbb{R}$, et A une partie de D.

Définition 1:

Soit f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$, et $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$.
On dit que g approche uniformément f à moins de δ sur A si pour tout $x \in A$, $|f(x) - g(x)| \leq \delta$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de D dans $\mathbb{R}$, et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

Définition 2:

i) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

ii) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

iii) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si la suite des restrictions des f_n à A converge uniformément vers $f_{|A}$.

Remarques:

i) Dans les définitions i) et iii), on peut prendre pour f une application de A dans $\mathbb{R}$.

ii) Il est clair que ***la convergence uniforme sur A implique la convergence simple sur A.***

Théorème:

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble d'applications de A dans $\mathbb{R}$, f une application de A dans $\mathbb{R}$. On a l'équivalence des deux propriétés:
i) $\forall\ \delta \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $g \in \mathcal{G}$ approchant uniformément f sur A à moins de δ,
ii) il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur A.

Pour démontrer l'implication i) $\Rightarrow$ ii), il suffit de prendre par exemple $\delta = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Définitions:

Dans les énoncés qui suivent, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

***Définition* 1:**

Une subdivision s de $[a, b]$ est une famille finie de points de $[a, b]$, $(a_i)_{i\in[0,p]}$ telle que $a_0 = a$, $a_p = b$, et $\forall\ i \in [0, p-1]$, $a_i < a_{i+1}$.
On a donc $s = (a_0, a_1, .., a_p)$ avec $a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$, ce qu'on notera:

$$s : a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b.$$

En notant $E(s) = \{a_i;\ i \in [0, p]\}$ on remarque que $s \mapsto E(s)$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}(a, b)$ des subdivisions de $[a, b]$ sur l'ensemble des parties finies de $[a, b]$ contenant a et b.

***Définition* 2:**

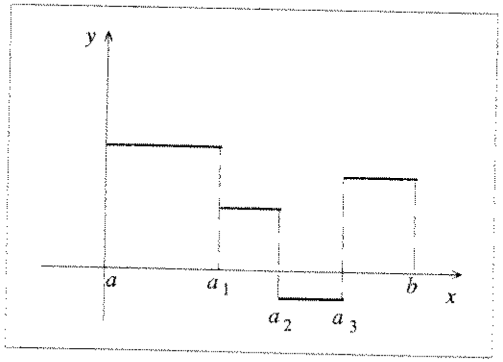
Soit s et s' deux subdivisions de $[a, b]$.
i) s' est plus fine que s signifie que $E(s) \subset E(s')$
ii) $s \cup s'$ désigne la subdivision de $[a, b]$ associée à $E(s) \cup E(s')$.

Les définitions qui suivent concernent une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

***Définition* 3:**

Dire que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ signifie:
i) il existe $s : a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ subdivision de $[a, b]$, telle que:
ii) la restriction de f à chaque $]a_i, a_{i+1}[$ est constante, i.e.

$$\forall\ i \in [0, p-1],\ \exists\ \gamma_i \in \mathbb{R};\ \forall\ x \in\ ]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \gamma_i.$$



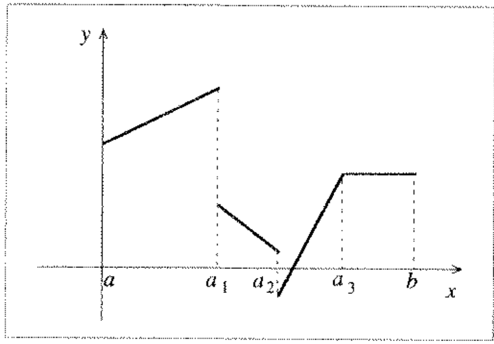
s s'appelle alors ***subdivision adaptée*** à la fonction en escalier f. Il est clair qu'on peut la remplacer par une subdivision plus fine s', puisque alors:

$$\forall j,\ \exists i;\ (]a'_j, a'_{j+1}[\ \subset\ ]a_i, a_{i+1}[).$$

***Définition* 4:**

Dire que f est une fonction affine par morceaux sur $[a, b]$ signifie:
i) il existe $s = a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ subdivision de $[a, b]$, telle que:
ii) la restriction de f à chaque $]a_i, a_{i+1}[$ est affine, i.e.

$$\forall\ i \in [0, p-1],\ \exists\ (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2;\ \forall\ x \in\ ]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$



s s'appelle alors subdivision adaptée à la fonction affine par morceaux f. Il est clair qu'on peut la remplacer par une subdivision plus fine.

Un cas particulier mérite une certaine attention, celui des ***applications continues affines par morceaux***.
Si f est une telle application et $s : a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ une subdivision adaptée à f, l'application f est ***définie par la donnée de ses nœuds*** $\{(a_i, f(a_i));\ i \in [0, p]\}$, puisqu'une application affine est entièrement déterminée par l'image de deux points distincts.

***Définition* 5:**

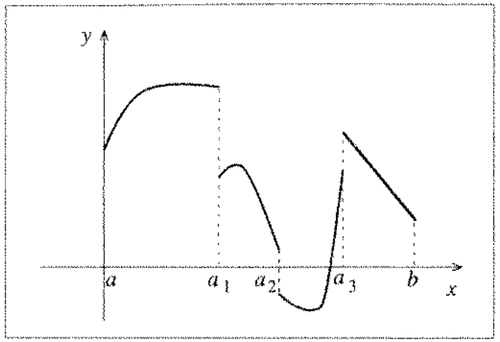
Dire que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ signifie
i) il existe s subdivision de $[a, b]$: $a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$, vérifiant:
ii) pour tout i de $[0, p-1]$, il existe une application φ_i continue de $[a_i, a_{i+1}]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall\ i \in [0, p-1],\ \forall\ x \in\ ]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \varphi_i(x).$$

s s'appelle alors subdivision adaptée à la fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Il est clair qu'on peut la remplacer par s' subdivision plus fine.

Proposition:

Une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est continue par morceaux ssi
i) f est continue en tout point de $]a, b[$ sauf éventuellement un nombre fini formant l'ensemble $\mathcal{D} \subset\ ]a, b[$,
ii) f a une limite à droite en a et une limite à gauche en b,
iii) f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point de D.



Notation:

On note:

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues et affines par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Alors:

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et

$\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R}) \subset C^0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

Remarques:

i) $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ sont des ***sous-algèbres*** de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, ***algèbre des applications bornées de [a, b] dans*** $\mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$ est un ***sous-espace vectoriel*** de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

iii) $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$ sont ***stables par passage à la valeur absolue*** i.e.

$$f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$$
$$f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$$
$$f \in \mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$$

c) Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment:

Théorème:

> Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe une application $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et une application $h \in \mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ qui approchent uniformément f à moins de δ sur $[a, b]$

Démonstration:

D'après le théorème de *Heine*, f est ***uniformément continue***. Le réel δ étant donné,

$$\exists\, \alpha > 0;\ \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2}\ ).$$

On choisit alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{p} < \alpha$ et ***on définit la subdivision régulière*** $a_0 = a < a_1 < .. < a_p = b$ avec $a_i = a + i\,\frac{b-a}{p}$ pour $i = 0, 1, .., p$.

On définit alors les applications g et h, par:

$$\forall\, i \in [0, p],\ g(a_i) = h(a_i) = f(a_i),$$

$$\forall\, i \in [0, p-1],\ \forall\, x \in]a_i, a_{i+1}[,\ g(x) = f(a_i) \text{ et } h(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(x - a_i),$$

de sorte que $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ (l'application h est définie à partir de ses nœuds).

Pour $x \in]a_i, a_{i+1}[$, on a donc:

$$|g(x) - f(x)| = |f(a_i) - f(x)| < \frac{\delta}{2} \text{ puisque } |a_i - x| < \alpha.$$

$$|h(x) - f(x)| \le |f(a_i) - f(x)| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)|\,\frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$$

$$\le |f(a_i) - f(x)| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Corollaire:

> Pour toute application f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ il existe une suite (g_n) dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et une suite (h_n) dans $\mathcal{CAM}([a, b], \mathbb{R})$ qui convergent uniformément vers f.

d) Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment:

Proposition:

> Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, pour tout $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ approchant uniformément f à moins de δ sur $[a, b]$.

Démonstration:

Il suffit d'appliquer le théorème du c) sur les sous-intervalles d'***une subdivision adaptée à f***.

Plus précisément, si $s : c_0 = a < c_1 < .. < c_q = b$ est une subdivision adaptée à f continue par morceaux,

$$\forall\, k \in [0, q-1],\ \exists\, \varphi_k \in C^0([c_k, c_{k+1}], \mathbb{R});\ \forall\, x \in]c_k, c_{k+1}[,\ \varphi_k(x) = f(x).$$

Il existe $g_k \in \mathcal{E}([c_k, c_{k+1}], \mathbb{R})$ approchant uniformément φ_k à moins de δ sur $[c_k, c_{k+1}]$.

On définit alors g par:

$$\begin{cases} \forall\, k \in [0, q],\ g(c_k) = f(c_k) \\ \forall\, k \in [0, q-1],\ \forall\, x \in]c_k, c_{k+1}[,\ g_k(x) = g(x). \end{cases}$$

Alors $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et approche uniformément f à moins de δ.

Corollaire:

Toute application continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque:

Il n'y a pas lieu d'énoncer de résultats avec les applications affines par morceaux dont les applications en escalier sont des cas particuliers.

TRAVAUX DIRIGÉS

1- Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

a) Soit H un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$.
On définit $H' = \{x \in H; x > 0\}$.
a-1) Montrer que H' est non vide. Soit a sa borne inférieure.
a-2) Montrer que si $a > 0$, a est dans H' (c'est le minimum de H').
Prouver qu'alors H s'écrit $a\,\mathbb{Z}$.
a-3) Montrer que si $a = 0$, H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

b) *Applications:*

b-1) Montrer que si u, v sont des réels non nuls et $\frac{u}{v}$ est irrationnel, alors $u\,\mathbb{Z} + v\,\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.

b-2) Prouver que si $r \in \mathbb{Q}^*$, $\{\cos(r\,n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

N.B. Dire que A est dense dans B signifie que $B \subset \overline{A}$.

b-3) Montrer que l'ensemble des rationnels décimaux inversibles est dense dans $\mathbb{R}$.

c) *Variante et applications:*

c-1) Soit u, v deux réels strictement positifs tels que $\frac{u}{v}$ soit irrationnel.
Montrer que $u\,\mathbb{N} - v\,\mathbb{N} = \{u\,n - v\,k; (n, k) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c-2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}^{*+}$, $\{\sin(r\,n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

c-3) Montrer que si $c_1, .., c_q$ sont q entiers compris entre 0 et 9, il existe p entier tel que l'écriture de 2^p en base dix commence par les chiffres $c_1, .., c_q$ (2 peut évidemment être remplacé par 3, 4, .., 9, 11, ..).

Solution:

a-1) Il existe x non nul dans H. Si $x \notin H'$, $x < 0$, alors $-x \in H$ et $-x > 0$, donc $-x \in H'$. Comme H' est non vide minoré par 0, il admet une borne inférieure a dans $\mathbb{R}$.

a-2) Supposons $a > 0$, et $a \notin H'$.

Il existe, par critère de borne inférieure, un élément h_1 de H' tel que $a \leq h_1 < a + a$, donc (vu l'hypothèse), $a < h_1 < 2a$.
De même il existe h_2 élément de H' tel que $a \leq h_2 < h_1$ donc $a < h_2 < h_1$.
Alors $h_1 - h_2 \in H$, et $h_1 - h_2 > 0$.
Donc $h_1 - h_2 \in H'$ alors que $h_1 - h_2 < 2a - a = a = \inf_{\mathbb{R}} H'$. C'est absurde.
Donc si a est strictement positif, a appartient à H, donc à H': ***c'est le minimum de H'.***
Dans ce cas, $a \in H$, donc H étant un sous-groupe, $a\,\mathbb{Z} \subset H$.

Si x appartient à H, on considère $m = \mathrm{E}(x/a)$. Alors $m\,a \leq x < (m+1)\,a$, et $x - m\,a$ élément du sous-groupe H vérifie:

$$0 \leq x - m\,a < a = \inf H'.$$

Comme $x - m\,a$ est positif et n'appartient pas à H', il est nul, donc $x = m\,a$.

Finalement, $H = a\,\mathbb{Z}$ par double inclusion.

a-3) Plaçons-nous dans le cas $a = 0$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On va intercaler h élément de H entre x et y ***en utilisant une «graduation» suffisamment fine de*** $\mathbb{R}$.

Pour cela on utilise le critère de borne inférieure dans $\mathbb{R}$ qui donne: «il existe η élément de H' tel que $a = 0 \leq \eta < y - x$».

Comme $\eta \in H'$ il est strictement positif, et on peut poser $m = \mathrm{E}(x/\eta)$.

Alors $m\,\eta \leq x < (m+1)\,\eta \leq x + \eta < y$. Et $(m+1)\,\eta$ est un élément de H puisque H est un sous-groupe.

H est bien dense dans $\mathbb{R}$.

b-1) Ici, v, u sont des réels non nuls et $\frac{v}{u}$ est irrationnel.

$u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = \{m\,u + m'\,v;\ (m, m') \in \mathbb{Z}^2\}$ est clairement un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Il n'est évidemment pas réduit à $\{0\}$, donc, d'après 1), il est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Supposons que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, où a est un réel strictement positif.

Alors $u = u \times 1 + v \times 0 = a\,q$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$

$v = u \times 0 + v \times 1 = a\,p$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$.

Donc $\frac{v}{u} = \frac{p}{q}$ ce qui contredit l'hypothèse.

En conclusion, $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

b-2) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$.

$H = \{r\,m + 2k\,\pi;\ (m, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$ car 2π est un irrationnel (cf exercice C-5 du chapitre II).

$C = \{\cos(r\,n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est aussi l'ensemble des $\cos(r\,m)$, $m \in \mathbb{Z}$ (parité de cosinus).

On veut montrer que C est dense dans $[-1, 1]$, c'est à dire que l'adhérence de C est $[-1, 1]$. Cela va résulter de la continuité de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Soit t élément de $[-1, 1]$. Il existe un x réel dans $[0, \pi]$ tel que $t = \cos x$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que pour tout y réel,

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |\cos x - \cos y| < \varepsilon.$$

Par densité de H, il existe y élément de H tel que $|x - y| < \eta$.

Alors $y = m\,r + 2k\,\pi$, avec m et k entiers et $|\cos x - \cos y| = |t - \cos n\,r| < \varepsilon$ en posant $n = |m| \in \mathbb{N}$.

b-3) L'ensemble des rationnels décimaux est l'ensemble des rationnels s'écrivant $\frac{a}{10^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; c'est un anneau dont on note D l'ensemble des éléments inversibles.

Si x est élément de D, $x = \frac{a}{10^n}$ et $\frac{1}{x} = \frac{b}{10^p}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n, p \in \mathbb{N}$.

Donc $a\,b = 10^{n+p}$ et ***a et b ne contiennent que 2 et 5 comme diviseurs premiers***.

La réciproque étant immédiate, on obtient:

$$\boxed{D = \{\pm 2^{\alpha} 5^{\beta},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}}$$

Donc $D' = \{\ln |x|,\ x \in D\}$ est l'ensemble des réels s'écrivant $\alpha \ln 2 + \beta \ln 5$ avec α et β entiers.

Si $\frac{\ln 5}{\ln 2}$ était un rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q entiers naturels), on aurait $5^q = 2^p$ ce qui est absurde, donc d'après a), D' est dense dans $\mathbb{R}$.

Par continuité de l'exponentielle, pour tout réel x strictement positif et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $|\ln x - t| < \eta \Rightarrow |e^{\ln x} - e^t| < \varepsilon$.

Par densité de D', il existe $t \in D'$ tel que $|\ln x - t| < \eta$. Alors $t = \alpha \ln 2 + \beta \ln 5$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ et $|x - e^t| = |x - 2^{\alpha} 5^{\beta}| < \varepsilon$.

Donc $D \cap \mathbb{R}^{*+}$ est dense dans $\mathbb{R}^{*+}$ et, en prenant les opposés, D est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque: on aurait le même résultat pour toute base de numération dont la décomposition en facteurs premiers comprend au moins deux entiers premiers distincts.

c-1) Ici, $u > 0$, $v > 0$, $\frac{v}{u}$ est irrationnel et $A = \{n\,u - k\,v;\ (n, k) \in \mathbb{N}^2\}$.

Comme $A^{*+} = A \cap \mathbb{R}^{*+}$ est non vide, appelons a sa borne inférieure. On va montrer que $a = 0$ et conclure de façon semblable à a-3).

On introduit $H = u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$. D'après b-1), H est dense dans $\mathbb{R}$.

Supposons a strictement positif. Par critère de borne inférieure, il existe $(n_0, k_0) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leq n_0\,u - k_0\,v < \frac{3a}{2}$.

Par densité de H, il existe $(m, k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{a}{2} < m\,u - k\,v < a$. Alors,

$$-a < -m\,u + k\,v < -\frac{a}{2} \text{ et en ajoutant: } 0 < (n_0 - m)\,u - (k_0 - k)\,v < a.$$

Donc $(n_0 - m)\,u - (k_0 - k)\,v \notin A$, et on est dans l'un des deux cas:

$*$ **ou $n_0 - m < 0$**: $n_0 < m$ donc $m \in \mathbb{N}$ et comme $0 < m\,u - k\,v < a$, $k \notin \mathbb{N}$.

On a donc $m\,u - k\,v > m\,u$, soit $m\,u < a$ et $m\,u \in A^{*+}$; c'est absurde.

$*$ **ou $k_0 - k < 0$**: $k > k_0 \geq 0$ donc $k \in \mathbb{N}$ et comme $0 < m\,u - k\,v < a$, $m \notin \mathbb{N}$.

On a donc $m < 0$ et $-k \leq 0$, soit $m\,u - k\,v < 0$; c'est absurde.

Finalement a ne peut être strictement positif, et $\mathbf{\inf A^{*+} = 0}$.

On obtient de même, si $A^{*-} = A \cap \mathbb{R}^{*-}$, $\sup A^{*-} = 0$.

Soit x, y deux réels tels que $x < y$. Examinons les trois configurations:

$*$ $\mathbf{0 \leq x < y}$.

On prend ε tel que $0 < \varepsilon < y - x$. Par critère de borne inférieure, il existe $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < n\,u - k\,v < \varepsilon$.

Soit p la partie entière de $\frac{x}{n\,u - k\,v}$. On a $p \in \mathbb{N}$ et,

$$p\,(n\,u - k\,v) \leq x < (p+1)\,(n\,u - k\,v) < p\,(n\,u - k\,v) + \varepsilon \leq x + (y - x) = y.$$

Or $(p+1)\,(n\,u - k\,v) \in A$.

$*$ $\mathbf{x < y \leq 0}$.

On prend ε tel que $0 < \varepsilon < y - x$. Par critère de borne supérieure, il existe $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 - \varepsilon < n\,u - k\,v < 0$.

Soit p la partie entière de $\frac{y}{n\,u - k\,v}$. On a $p \in \mathbb{N}$ et,

$$p\,(n\,u - k\,v) \geq y > (p+1)\,(n\,u - k\,v) \geq y + n\,u - k\,v > y - \varepsilon > x.$$

$*$ $\mathbf{x < 0 < y}$.

On applique par exemple le premier résultat à $(0, y)$.

Finalement A est dense dans $\mathbb{R}$.

c-2) On reprend le raisonnement du b-2) en utilisant $u\mathbb{N} - v\mathbb{N}$ avec $u = r \in \mathbb{Q}^{*+}$, $v = 2\pi \in \mathbb{R}^{*+}$ et la continuité de sinus.