Mardi 13 octobre 2020

Cours no 6 d'analyse semiclassique

Stéphane Nonnenmacher

But : étendre quantification $\longrightarrow$ symboles non Schwartz

ex : op Hamiltonien : $p(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$, $V \in C^\infty$

On garde l'aspect C^∞, mais on va autoriser des symboles non bornés en $x, \xi \longrightarrow \infty$.

On devra supposer 1 croissance tempérée

$\Longrightarrow$ on va définir des classes de symboles, qu'on pourra quantifier

1er ex : classe $S(\mathbb{R}^{2d})$

$$S(\mathbb{R}^{2d}) = \{ a = a(h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) ;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha\beta,a} \text{ tq } \|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\|_\infty \le C_{\alpha,\beta,a} \ \forall h \in]0,1] \}$$

$a(h)$ est bornée, ainsi que tes ses dérivées unift p/r h

C_b^∞ : pas de paramètre h

$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$I(u)(x) = Op_h^t(a) u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int e^{\frac{i\xi(x-y)}{h} {\color{red}- \epsilon|\xi|^2}} a(tx + (1-t)y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi$$

pb : pas intégrable p/r ξ

IPP formelles p/r $y \Longrightarrow$ récupérer de la $\downarrow$ p/r ξ.

Intégrale oscillante ${\color{red}\text{astucieuse}}$: on utilise un op. d'IPP judicieux :

$$L_\xi \hat{=} \frac{1 + ih\xi \cdot \partial_y}{1 + |\xi|^2} \quad : \quad \boxed{L_\xi\, e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}} = e^{\frac{i\xi\cdot(x-y)}{h}}}$$

$$I(u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int \left(L_\xi\, e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}} \right) a(\ )\, u(y)\, d\xi\, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}}\ {}^tL_\xi \left(a(\ ) u \right) d\xi\, dy$$

$${}^tL_\xi = \frac{1 - ih\xi\cdot\partial_y}{1 + |\xi|^2} \quad \text{appliqué à } a(tx + (1-t)y, \xi)\, u(y)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{1+|\xi|^2} - ih \frac{\xi\cdot\partial_y(au)}{1+|\xi|^2} = O\left(\frac{1}{\langle\xi\rangle}\right) \quad \underbrace{\partial_y a}_{\text{borné}} \cdot u + \underline{a} \cdot \underline{\partial_y u}$$

$L_\xi^N \longrightarrow O\left(\frac{1}{\langle\xi\rangle^N}\right)$ seminormes de a et u

$\longrightarrow$ intégrand $O\left(\frac{1}{\langle\xi\rangle^N} \frac{1}{\langle y\rangle^\infty}\right)$ $N \ge d+1$ intégrable

définit $Op_h^t(a)$ sur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

(2)

. On a fabriqué 1 noyau de Schwartz de l'op. $Op_h^t(a)$

$a \in \mathcal{S} \Rightarrow K_a(x,y) = \int \frac{d\xi}{(2\pi h)^d} e^{i\xi(x-y)} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$

$a \in S(\mathbb{R}^{2d}) \Rightarrow K_a$ n'est plus 1 fonction, en gal c'est 1 distribution tempérée

L'op. $Op(a)$ peut être défini comme 1 op. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$\longrightarrow$ étendre à tout symbole $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$

$a \mapsto K_a$ peut s'écrire $(h=1,\ t=1/2)$:

$$K_a(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \underbrace{\left(\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to z} a\right)\left(\frac{x+y}{2}, z\right)}_{\text{justifié si } a \in \mathcal{S}'}\Big|_{z=x-y}$$

$a \in \mathcal{S}' \longrightarrow K_a$ définit un op. $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle Op^W(a)v, u\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \overset{\text{def}}{=} \langle K_a, u(x)v(y)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}$$

$$Op^W(a) : \mathcal{S} \longmapsto \mathcal{S}'$$

K_a est bien approché (dans $\mathcal{S}'$) par les noyaux régularisés $K_{a,\epsilon}$ (avec $e^{-\epsilon|\xi|^2}$ dans l'intégrand)

. Vérifier que si $a \in S(\mathbb{R}^{2d}) \Rightarrow Op(a)u$ est mieux qu'1 distribution, en fait

Thme $a \in S(\mathbb{R}^{2d})$, $\forall h \in (0,1]$, $Op_h(a)$ est continu : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

h fixé >0

Rem : si on utilise $(h\partial)^\alpha$ au lieu de ∂^α dans les semi-normes

$\Rightarrow$ estimées uniformes $|(h\partial)^\alpha \cdot| \le C_\alpha h^{-|\alpha|}_{\epsilon}$ ~~indpt~~ dépt de h

Pr| on veut contrôler les semi-normes de $I(u)(x)$, en fct de seminormes de a et u

$$({}^tL_\xi)^n(au) = \frac{1}{\langle\xi\rangle^{2n}}\left(au + \xi.\partial_y(au) + \dots + (\xi.\partial_y)^n(au)\right)$$

$\|\partial^\alpha a\|_\infty$

$$|I(u)(x)| \le \int \underbrace{\frac{C_a}{\langle\xi\rangle^n\langle y\rangle^k}} \max_{|\alpha|\le n} \|\langle y\rangle^k \partial_y^\alpha u\|_\infty \, dy\, d\xi$$

$n \ge d+1$, $k \ge d+1 \Rightarrow$ converge

unif. par x

C_a dépend des semi-normes pour $|\alpha| \le n$

$C_a = C.\|a\|_{C^n}$

$\Rightarrow I(u)$ est bornée.

$$\partial_x^\beta I(u)(x) \underset{\text{à justifier}}{=} \int \partial_x^\beta\left(e^{i\xi(x-y)} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\right) = \int \sum_{\alpha\le\beta} e^{i\xi.(x-y)} \underbrace{(i\xi)^\alpha}_{\text{croissance polyn. en }\xi} \partial_x^{\beta-\alpha} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\, dy\, d\xi$$

On regagne des puissances $\frac{1}{\langle\xi\rangle^n}$ en IPP avec L_ξ^n

3

$\longrightarrow \|\partial^\beta I(u)\|_\infty \leq C_a \max_{|\alpha|\leq n} \|\langle y\rangle^{d+1}\partial^\alpha u\|_\infty \qquad n = d+1+|\beta|$

$I(u) \in C_b^\infty$.

Pour montrer une $\searrow$ de $I(u)$ en $x \to \infty$: il faut gagner des puiss. de $\langle x\rangle$.

$\longrightarrow$ autre op. d'IPP

$$L_x = \frac{1 + ih(x-y)\cdot\partial_\xi}{1+|x-y|^2} \qquad (\text{"dual" de } L_\xi)$$

$$L_x e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}} = e^{i\xi\cdot\frac{(x-y)}{h}}$$

On insère L_x^m dans $\partial^\beta I(u)$ après avoir IPP p/r ξ.

$\longrightarrow$ m IPP p/r ξ

$({}^tL_x)^m$ agit sur des termes $\frac{(\xi\cdot\partial_y)^k}{\langle\xi\rangle^{2n}}\xi^\alpha\partial_x^{\beta-\alpha}a(x,\xi)u \qquad k\leq n, \ \alpha\leq\beta$

∂_ξ

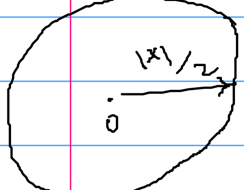
$$\left|{}^tL_x^m(\quad)\right| \leq \frac{C_a}{\langle\xi\rangle^{2n-k-|\alpha|}\langle x-y\rangle^m \langle y\rangle^\ell}\max_{|\gamma|\leq k}\|\partial^\gamma\langle y\rangle^\ell u\| \qquad k\leq n$$

$n-|\alpha|$ $\qquad k=n$

$\int d\xi$ conv. si $n=|\beta|+d+1$, $\quad |\quad| \leq \frac{C}{\langle\xi\rangle^{d+1}\langle x-y\rangle^m\langle y\rangle^{d+1}}\max_{|\gamma|\leq|\beta|+d+1}\|\langle y\rangle^\ell\partial^\gamma u\|$

$\ell = d+1 \Rightarrow$ l'intégrale sur y converge, et $\leq \frac{C}{\langle x\rangle^m}$

Lemme : $\displaystyle I_{d,m}(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\langle x-y\rangle^m}\frac{1}{\langle y\rangle^{d+1}}\,dy \leq C_{d,m}\langle x\rangle^{-m}$



$$\left|\langle x\rangle^m\partial^\beta I(u)(x)\right| \leq C_a\sum_{|\gamma|\leq\ldots}\|\langle y\rangle^{d+1}\partial^\gamma u\|$$

↗ semi-norme sur $S(\mathbb{R}^{2d})$

$\Longrightarrow Op(a)$ est contin $S\to S$

Ex de $a\in S(\mathbb{R}^{2d})$: $a\equiv 1 \Rightarrow K_a = \delta(x-y) = \int e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}}\frac{d\xi}{(2\pi h)^d}$

Ex : $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d) \Rightarrow Op_h(f) =$ multipl. par $f(x)$.

$g\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d_\xi) \qquad Op_h(g) = g(hD)$ mult. de Fourier.

4) Symboles à croissance polynomiale en (x,ξ)

on sait gagner des puissances de $\langle\xi\rangle$ et de $\langle y\rangle$

$\rightsquigarrow$ définir $Op(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Déf : Une fonction $m : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction d'ordre si $\exists C_0 > 0, N \in \mathbb{R}$, $\forall \rho, \rho' \in \mathbb{R}^{2d}$, $\underbrace{m(\rho) \leq C_0 \langle \rho - \rho'\rangle^N m(\rho')}$

$\rho' = 0 \Rightarrow \underbrace{m(\rho) \leq C_0' \langle\rho\rangle^N}$ croissance polyn.

$\times \rho$

$\times \rho'$

$\times$

0

Ex : $m(\rho) = \langle\xi\rangle^N \longrightarrow p(x,\xi) = |\xi|^2 + V(x)$ borné

$m(\rho) = \langle\xi\rangle^{N_1} \langle x\rangle^{N_2} \qquad p(x,\xi) = |\xi|^2 + \langle x\rangle^{N_2}$

Déf : Soit m une fonction d'ordre. Alors

$S(m) = \{a = a(h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \exists C_\alpha > 0, \forall h, \forall \rho \in \mathbb{R}^{2d}, |\partial^\alpha a(\rho; h)| \leq C_\alpha m(\rho)\}$

Généralise $S(\mathbb{R}^{2d}) = S(1)$.

$\longrightarrow$ classe d'opérateurs pseudodifférentiels $\{Op_h(a),\ a \in S(m)\} = \Psi_h(m)$

Seminormes sur $S(m)$: $\|a\|_n = \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{h \in (0,1]} \left\| \frac{\partial^\alpha a}{m} \right\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ topol. sur $S(m)$.

. $S(m) \subset \mathcal{S}' \Rightarrow Op(a) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$

Thme. $a \in S(m)$, $\forall h \in (0,1]$, $Op_h(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ continûment.

Les estimées sont uniformes si on utilise les $(h\partial)^\alpha$ seminormes. (plutôt h)

Pr : $\exists N, m(\rho) \leq C\langle\rho\rangle^N$. $\langle\rho\rangle^N \leq (\langle x\rangle + \langle\xi\rangle)^N \leq 2^N \langle x\rangle^N \langle\xi\rangle^N$

$L_x \downarrow \qquad \downarrow L_\xi$

. $({}^tL_\xi)^{N+d+1} \longrightarrow$ conv. p/r ξ.

$({}^tL_x)^m \longrightarrow \langle x-y\rangle^{-m} \langle y\rangle^k \longrightarrow \int C_a \frac{\underline{\langle x+y\rangle^N \langle\xi\rangle^N}}{\langle\xi\rangle^{N+d+1} \langle x-y\rangle^m \langle y\rangle^k} \times \|u\|$

$k = N+d+1$, $n \geq N$ $\longrightarrow |\partial^\beta I(u)(x)| \leq \frac{C}{\langle x\rangle^{n-N}} \|u\|$.

5

- $a \in S(m) \longrightarrow K_a(x,y)$ distributions
  $a = 1$ $\qquad \delta(x-y)$

- $a = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq N} \underbrace{a_\alpha(x)} \xi^\alpha}$ $\in S(m)$ si $|\partial^\alpha a_\alpha(x)| \leq C_\alpha m(x,0)$
  $\langle \xi \rangle^N \leq C\, m(0,\xi)$

$\Longrightarrow Op_h^R(a) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x)(hD)^\alpha$ $\quad$ op. diff. $\in \Psi_h(m)$

ex : $a(x,\xi) = \xi^\alpha$
$\Rightarrow Op_h(a) = (hD)^\alpha$, de noyau $K_a(x,y) = \left(\frac{h}{i}\right)^{|\alpha|} [\partial^\alpha \delta](x-y)$

- $Op(a) : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \Rightarrow$ on peut les composer.

Lemme $\quad a_1 \in S(m_1) \quad a_2 \in S(m_2)$ pour m_i 2 fonctions d'ordre
$\Rightarrow a_1 \times a_2 \in S(m_1 \times m_2)$.
Que peut-on dire de $a_1 \#_h a_2$? $\quad a_1 \#_h a_2 \in S(m_1 m_2)$

$\underbrace{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})}_{a_j \xrightarrow{?}} \subset S(m)$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \in$

$\Rightarrow a_j(h)$ telles que

Lemme $\quad \forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ est dense dans $S(m)$ pour la topologie de $S(\langle \rho \rangle^\varepsilon m)$.

topo $S(m)$: $\left\| \frac{\partial^\alpha a}{m} \right\|_\infty$

$a \in S(m)$
$a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ $\quad \max_h \left\| \frac{\partial^\alpha (a_j - a)}{m \langle \rho \rangle^\varepsilon} \right\|_\infty \longrightarrow 0$ $\quad j \to \infty$

$S(\underbrace{m \times \langle \rho \rangle^\varepsilon}_{\text{fonction d'ordre}})$ $\qquad \left\| \frac{\partial^\alpha a}{m \langle \rho \rangle^\varepsilon} \right\|$

Rem : En g^{al}, on ne peut pas avoir $\left\| \frac{\partial^\alpha (a_j - a)}{\langle m \rangle} \right\|_\infty \not\to 0$.

ex : $a \equiv 1 \in S(1)$ ne peut être approché par des $a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ pour les semi-normes $\| \partial^\alpha (a_j - a) \|_\infty \geq 1$
$\frac{\qquad}{\langle \rho \rangle^\varepsilon} \longrightarrow 0$

(- $a \in C_b^0$ ne peut pas être approché par $a_j \in C_c^0$ pour $\| \ \|_\infty$
mais marche pour $\| \frac{\cdot}{\langle \rho \rangle^\varepsilon} \|$.)

6

Prop : m fc° d'ordre sur $\mathbb{R}^n_x$, $a \in S(m)$, Q matrice $n\times n$ non-dégén. (sym.)

Alors la distribution $\underbrace{\exp\left(\frac{ih}{2}\langle D, Q^{-1}D\rangle\right)}$ a appartient à la classe $S(m)$.

L'opérateur agit continûment : $S(m) \to S(m)$.

Enfin, si $a \in S(m)$ est indépt de h, alors on a un dévt asymptotique en $h \searrow 0$

$$e^{i\frac{h}{2}\langle D, Q^{-1}D\rangle} a \sim \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}\left(\frac{ih}{2}\langle D, Q^{-1}D\rangle\right)^j a \quad \text{dans } S(m).$$

Pr : par la Transf. de Fourier à disposi° (n'agit pas bien sur $S(m)$).

$\longrightarrow$ utiliser la déf° de $e^{i\frac{h}{2}DQ^{-1}D}$ comme op. de "convolution + phase"

$$e^{i\frac{h}{2}\langle D Q^{-1}D\rangle} a(x) = C_Q \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-i\frac{\langle y, Qy\rangle}{2h}\right) a(x+y)\,dy}$$

$I(x,h)$ intégrale oscillante (non convergente absolument)

$\rightarrow$ on découpe en 1 partie à supp. compact $\ni 0$ (= pt de phase stat.)

et le reste (où phase non stationnaire)

$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(y) = 1$ si $|y| \leq 1$, $\chi = 0$ si $|y| \geq 2$.

$I(x) = \underbrace{I_1(x)} + I_2(x)$.

$\partial^\alpha I_1(x) = \int e^{i(\;)} \underbrace{\chi(y)\partial^\alpha a(x+y)}\,dy$ $\qquad I_2(x) = \int (1-\chi) e^{i(\;)} a(\;)\,dy$

Thm ph. stat. $\Rightarrow$ $I_1(x) \sim C_Q^{-1} \sum \frac{1}{j!}\left(\frac{ih}{2}\langle D_y, Q^{-1}D_y\rangle\right)^j a(x+y)\Big|_{y=0}$

Chaque terme $\leq C_n h^{n/2} m(x)$

Si on tronque à l'ordre N $\longrightarrow$ $R_N(x) \lesssim h^{\frac{n}{2}+N} \underbrace{\partial^{2N+n+1} a(x+y)}$ dans $|y| \leq 2$

$\leq C\, m(x+y) \leq C' m(x)$ $\leftarrow$ fc° d'ordre

$\longrightarrow$ $|\partial^\alpha I_1(x)| \lesssim h^{n/2} m(x)$

$\Rightarrow$ $I_1 \in S(m)$.

· I_2 intégr. oscillante $\Rightarrow$ on IPP $\boxed{L_Q = -\frac{\langle Qy, hD_y\rangle}{|Qy|^2}}$ bien définie sur $\underbrace{\{|y| \geq 1\}}$

$\frac{1}{c|y|} \geq \frac{1}{|Qy|} \geq \frac{1}{C|y|}$

Q inversible $\Rightarrow$ $c|y| \leq |Qy| \leq C|y|$

$\longrightarrow$ IPP avec $L_Q \longrightarrow$ gagne des puissances $\frac{1}{|y|}$

formelles $\quad I_2(x) = \int {}^tL_Q^k\left[(1-\chi(y))\, a(x+y)\right] e^{i(\;)}\,dy$

⑦

$$\left|\left({}^tL_\theta\right)^k (1-\chi)\, a(x+\cdot)\right| \leq C_k h^k \sum_{j=0}^{k} \frac{|\partial_y^j (1-\chi)\, a(x+\cdot)|}{|y|^{2k-j}} \leq C_{k,a} \frac{h^k}{|y|^k}\, m(x+y)$$

$$m(x+y) \leq C_N \langle y\rangle^N m(x)$$

$k \geq N+n+1$

$\longrightarrow \leq \frac{1}{\langle y\rangle^{n+1}}$, convergence absolue $\longrightarrow |\partial^\beta I_2(x)| \leq C h^k\, m(x)$

$\partial^\beta I_2 \longrightarrow \partial^\beta a \Rightarrow I_2 \in h^k S(m) \quad \forall k$

$h^\infty S(m)$.

$\Rightarrow I \in S(m)$.

Les constantes $C_{k,a}$ sont contrôlées par un nombre fini de seminormes de $\|a\|_n$ dans $S(m)$.

$\longrightarrow$ a-à-d $e^{i\frac{h}{2}\sigma D}$ est continue, $S(m)$

- Corollaire : $t, s \in [0,1]$, $a_s \in S(m) \Rightarrow a_t$, t.q $Op_h^t(a_t) = Op_h^s(a_s)$, appartient aussi à $S(m)$.

$\longrightarrow \Psi_h(m) = \{ Op_h^t(a),\ a \in S(m)\}$, $\forall$ choix de t.

Théorème m_1, m_2 f.c. d'ordre. $a_i \in S(m_i) \Rightarrow a_1 \#_h a_2 \in S(m_1 m_2)$.

Si a_i indépts de h

$$\Rightarrow a_1 \# a_2 = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(ih/2)^j}{j!}\, a_1 \left(\omega(\overleftarrow{D}, \overrightarrow{D})\right)^j a_2 + O(h^N)_{S(m_1 m_2)}.$$

Lemme $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ indep. de h ; $b \in S(m)$. Alors $a \#_h b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, avec seminormes unif. p/r h,

$$\forall \rho \notin \operatorname{supp}(a), \quad |\partial^\alpha (a \#_h b)(\rho)| = O\left(\left(\frac{h}{\operatorname{dist}(\rho, \operatorname{supp} a)}\right)^\infty\right)$$

Rem : $c \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ avec seminormes unif. p/r h

$$\Longleftrightarrow c \in S(\langle\rho\rangle^{-\infty}) = \bigcap_{N\geq 0} S(\langle\rho\rangle^{-N})$$

Preuve du lemme :

$$a \# b\,(x) = \int_{\mathbb{R}^{4d}} \frac{d\rho_0\, d\rho_1}{(\pi h)^{2d}}\, e^{-\frac{2i}{h}\omega(\rho_0,\rho_1)}\, a(\rho+\rho_0)\, b(\rho+\rho_1)$$

$n = 4d$ $\quad (\rho_0, \rho_1) \in \{\operatorname{supp}(a) - \rho \times \operatorname{supp}(b) - \rho\}$

Si $\rho \notin \operatorname{supp}(a) \Rightarrow |(\rho_0, \rho_1)| \geq \operatorname{dist}(\rho, \operatorname{supp}(a)) \Rightarrow$ ph. non stationnaire $\left(\frac{h}{|(\rho_0,\rho_1)|}\right)^k$