Analyse semiclassique, 4e cours. (1)

- Relier les symboles a_ℓ et a_s d'un même op.

  $\rightsquigarrow$ développement asymptotique.

Formule intégrale :

$$a_1(x,\xi;h) = \int \frac{dy\,d\eta}{(2\pi h)^d}\, \underbrace{e^{-\frac{i\eta\cdot y}{h}}}_{\text{phase rapide}}\, \underbrace{a_0(x+y,\xi+\eta)}_{\text{fonction " lente "}}$$

Estimée de phase (non) stationnaire $\longrightarrow$ l'intégrale est dominée par le voisinage du point $(y,\eta) = (0,0)$.

- Lemme 2.4

$$\langle u, Op^R(a) v\rangle = \iiint a(x,\xi)\, e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}}\, v(y)\, \frac{dy\,d\xi}{(2\pi h)^d}\, \bar u(x)\, dx$$

$$\langle Op^L(\bar a) u, v\rangle \overset{\text{Fubini}}{=} \int dy \left[\iint \frac{dx\,d\xi}{(2\pi h)^d}\, e^{\frac{i\xi(x-y)}{h}}\, \bar u(x)\, a(x,\xi)\right] v(y)$$

(2)

Phase (non) stationnaire

: comprendre (estimer) des intégrales du type

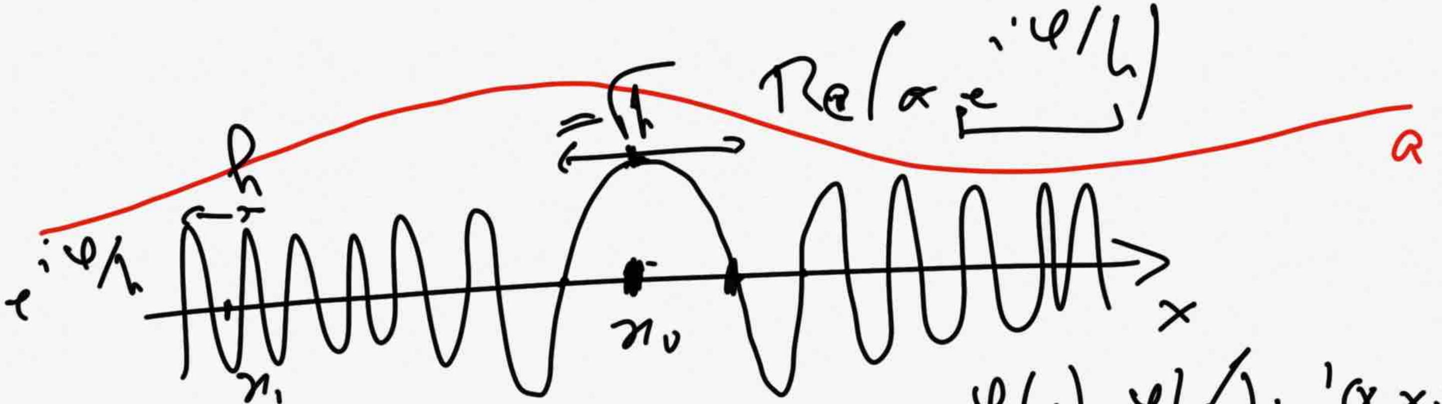
$$I(h) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, e^{i\frac{\varphi(x)}{h}}\, dx \,, \qquad a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

($\mathrm{supp}(a) \subset \Omega$ domaine borné)

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow$ la fonction de phase

$a \longrightarrow$ le symbole de l'intégrand

Quel est l'asymptotique $I(h)$ lorsque $h \to 0$?



$$\frac{\varphi(x)}{h} = \underbrace{\cancel{\varphi(x_0)}}_{=0} + \frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{h}\varphi''(x_0) + O(|x-x_0|^3)$$

point critique : $\nabla\varphi(x_0) = 0$

(supp. non-dégénéré : $\det(\mathrm{Hess}(\varphi)(x_0)) \neq 0$

Cas d'une phase quadratique : $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle$,

Q : matrice réelle symétrique

$$\left[I(h) = \int a(x)\, e^{i\frac{\langle x, Qx\rangle}{2h}}\, dx \right.$$

<u>Thme</u> : Q matr. sym. réelle non dégénérée ($\det Q \neq 0$) sur $\mathbb{R}^n$.
$a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ($\rightsquigarrow a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$). $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$,
L'intégrale $I(h)$ admet le dévt asympt :

$$\left| I(h) - \frac{(2\pi h)^{n/2}\, e^{\frac{i\pi\, \mathrm{sgn}(Q)}{4}}}{|\det(Q)|^{1/2}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h^j}{j!} \left(\frac{\langle D, Q^{-1} D\rangle}{2i}\right)^j a \Big|_{x=0} \right| \leq C_N\, h^{N+n/2} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq 2N+n+1}} \|\partial^\alpha a\|_{L^1}$$

$\forall h \in]0,1]$.

Terme $j=0$ $\to$ $\times\, a(0)$

point critique de $\varphi(x)$

Développt de phase <u>stationnaire</u>.

<u>Rem:</u> les seminormes $\|\partial^\alpha a\|_{L^1}$ peuvent être remplacées par les semi-normes habituelles de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|a\|_{L^1} \leq C_n \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\langle x\rangle^{n+1} a(x)\right|$$

Notation (crochet japonais) $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$
$x \in \mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow \infty : \langle x\rangle \sim |x|$

- $\langle x\rangle \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\langle x\rangle$ est lisse

<u>Preuve du thm.</u>

<u>T Fourier</u> : $I(h) = \left\langle e^{\frac{i\langle x, Qx\rangle}{2h}}, a\right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$

$$= \frac{h^{n/2} e^{\frac{i\pi \,\mathrm{sgn}(Q)}{4}}}{|\det Q|^{1/2}} \int \underbrace{e^{-\frac{ih}{2}\langle \xi, Q^{-1}\xi\rangle}} (\mathcal{F} a)(\xi)\, d\xi$$

$$\left|e^{it} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(it)^j}{j!}\right| \leq \frac{|t|^N}{N!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\left| e^{-i\pi \frac{\operatorname{sgn}(Q)}{4}} \frac{|\det Q|^{1/2}}{h^{n/2}} I(h) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(h/2i)^j}{j!} \int \big(\langle \xi, Q^{-1}\xi\rangle\big)^j (\mathcal{F}_1 a)(\xi)\, d\xi \right| \leq$$

$$\frac{(h/2)^N}{N!} \int \left| \langle \xi, Q^{-1}\xi\rangle^N \right| \, |\mathcal{F}_1 a(\xi)|\, d\xi$$

$$\int (\langle \xi, Q^{-1}\xi\rangle)^j (\mathcal{F}_1 a)(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_1 \big((\langle D, Q^{-1} D\rangle)^j a \big)(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{n/2} \big((\langle D, Q^{-1} D\rangle)^j \big) a \quad (x = 0)$$

$$\| \mathcal{F}_1 a \|_{L^1} \leq C_n \sum_{|\alpha| \leq n+1} \| \partial^\alpha a \|_{L^1}$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{\left| \langle \xi, Q^{-1}\xi\rangle^N \right|}_{\text{polyn. de } d^\circ 2N.} |\mathcal{F}_1 (a)|\, d\xi \leq C_n \sum_{|\alpha| \leq n+1+2N} \| \partial^\alpha a \|$$

$\square$

⑥

$$\mathcal{F}(a)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi\cdot x}\, a(x)\, dx$$

<u>Rem</u>: pour retrouver les termes du dév^t asymptotique :

$$\int a(x)\, e^{i\frac{1}{2}\langle x, Q x\rangle}\, dx$$

$\hookrightarrow a(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{x^\alpha\, \partial^\alpha a(0)}{\alpha!}$ dév^t de Taylor de a en $x = 0$

$\longrightarrow \int x^\alpha\, e^{i\frac{\langle x, Q x\rangle}{2h} - \epsilon|x|^2}\, dx$ si $|\alpha|$ impair $\longrightarrow \int x^\alpha e^{i\frac{\langle x, Qx\rangle}{2h}} = 0$

$\hookrightarrow$ ds le dév^t asympt. seul^t des polyn. différentiels d'ordre pair apparaissent.

$$(D, Q^{-1} D)^k a(0) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{i}\partial_i\, Q^{-1}_{ij} \frac{1}{i}\partial_j\right)^k a\,(0)$$

• <u>Rem</u> : Thm appliqué à l'intégrale

$$a_1(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} dy\, d\eta\, e^{\frac{i\,\eta\cdot y}{h}}\, \underline{a_0(x+y, \xi+\eta)}$$

$\eta\cdot y = \frac{1}{2}\left\langle \binom{y}{\eta}, Q\binom{y}{\eta}\right\rangle$

Dist de phase **non** stationnaire $\quad I(h) = \int a(x)\, e^{\frac{i\varphi(x)}{h}}\, dx$

$\mathrm{supp}(a) \subset \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Thm Supposons que φ n'a pas de point critique sur $\overline{\Omega}$.

Alors, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\, C_{N,\varphi,\Omega}$, t.q.

$\forall h \in]0,1]$, $\quad |I(h)| \leq \underbrace{C_{n,N,\varphi,\Omega}}_{\text{dépend de bornes sup de } \varphi'', \varphi^{(3)}, \dots \varphi^{(N+1)}} h^N \sum_{j=0}^{N} \left\| \frac{|\partial^j a|}{|\nabla\varphi|^{2N-j}} \right\|_{L^1}$

$\forall N \quad I(h) = O(h^N)$

$\hookrightarrow \quad I(h) = O(h^\infty)$

- Si $\exists\, x_0$ tq $\nabla\varphi(x_0) = 0 \longrightarrow I(h) \sim C h^{n/2}$, $h \searrow 0$

  $\nexists$ " " $= 0 \qquad |I(h)| \leq C_N h^N$, $\forall N > 0$

- **Pr.** IPP en x, de façon astucieuse : on utilise l'op. différentiel

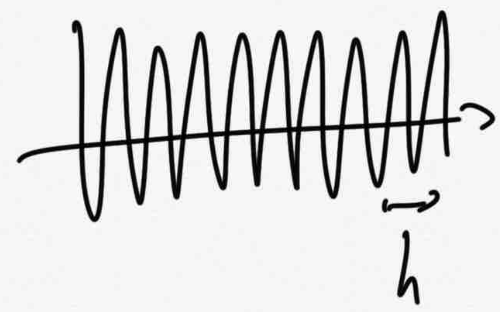
$$L = \frac{h}{i} \frac{\varphi'(x) \cdot \nabla}{|\varphi'(x)|^2} = \frac{h}{i} \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|^2} \cdot \nabla$$

op différentiel de d° 1

$\varphi'(x) = \nabla\varphi(x)$

L op L satisfying : $L\, e^{i\frac{\varphi(x)}{h}} = e^{i\varphi(x)/h}$

$$I(h) = \int a(x)\, \underline{e^{i\frac{\varphi(x)}{h}}}\, dy = \int a\left[L^k e^{i\frac{\varphi}{h}}\right] dx \underset{\text{IPP}}{=} \int \left[{}^tL^k a\right] e^{i\varphi/h}\, dx$$



$${}^tLa = -\frac{h}{i}\nabla\cdot\left[\left(\frac{\varphi'(x)}{|\varphi'(x)|^2}\right)a\right]$$

$$= -\frac{h}{i}\underbrace{\left[\nabla\cdot\frac{\varphi'}{|\varphi'|^2}\right]}_{\sum_{j=1}^{n}\partial_j\left(\frac{\partial_j\varphi}{|\varphi'|^2}\right)} a - \frac{h}{i}\frac{\varphi'}{|\varphi'|^2}\nabla a$$

$$\left|\left[{}^tLa\right](x)\right| \le C\underline{\underline{h}}\left(\underline{\frac{|\varphi''(x)|}{|\varphi'(x)|^2}\,|\underline{a(x)}| + \frac{1}{|\varphi'(x)|}\,|\partial \underline{a}|(x)}\right)$$

$$L^k e^{i\varphi/h} = e^{i\varphi/h}$$

$$k\ \text{IPP} \longrightarrow \int \left|{}^tL^N a\right|(x)\, dx \le \underline{C_{n,N,\varphi}}\ \underline{\underline{h^N}}\ \underline{\sum_{j=0}^{N}\int\frac{|\partial^j a|(x)}{|\varphi'(x)|^{2N-j}}\, dx} \quad \square$$

Thme de phase stationnaire (non quadratique) $\boxed{\text{Hyp: } x_0 \text{ seul point stationr. de } \varphi \text{ sur } \Omega}$ non dégén.

$$I[h] = \int a(x)\, e^{i\varphi/h}\, dx \quad , \quad \text{supp}(a) \subset \Omega \text{ borné} \quad a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Il existe des opt différentiels $A_{2k}(x, D)$ d'ordre $\leq 2k$, $k = 0, 1, \ldots \infty$. tels que, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\left| I(h) - e^{i\frac{\varphi(x_0)}{h}} \sum_{k=0}^{N-1} h^{\frac{n}{2}+k} \underline{A_{2k}(x_0, D)\, a}\Big|_{x = x_0} \right| \leq$$

$$\underline{C_N}\, h^{N + \frac{n}{2}} \sum_{|\alpha| \leq 2N+n+1} \| \partial^\alpha a \|_{C^1}$$

$$A_{2k} = \cancel{*}\ \frac{\langle D, \dot{Q}' D\rangle^k}{k!}$$

Pour montrer le thme gal, on transforme $I(h)$ en une intégrale à phase quadratique, en faisant un bon changement de variable. On utilise pour cela le Lemme de Morse.

Lemme de Morse :

Suppos. que $\varphi(x)$ a 1 point critique non dég. $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors $\exists$ un chang^t de coordonnées κ : $\underline{\mathrm{Vois}(0)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Vois}(x_0)}$,

avec $\kappa(0) = x_0$ et $\underline{\partial\kappa(0) = \mathrm{Id}}$, et tel que :

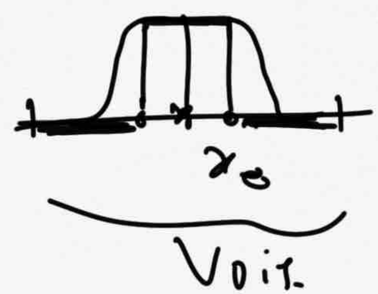
$$\underline{\varphi(x) = \varphi_2 \circ \kappa^{-1}(x)}, \quad \text{avec } \varphi_2(y) = \underline{\varphi(x_0)} + \underline{\tfrac{1}{2}\langle y, \varphi''(x_0) y\rangle}.$$

$$\Longrightarrow I(h) = I_0(h) + I_1(h)$$

$$I_0(h) = \underline{\int \chi(x)\, a(x)\, e^{i\varphi(x)/h}\, dx} \qquad I_1(h) = \int a(x)\,\underline{(1-\chi(x))}\, e^{\frac{i\varphi}{h}}\, dx$$

$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$, $\chi = 1$ près de x_0

$\mathrm{supp}(\chi) \subset\subset \mathrm{Vois}(x_0)$.



$\cdot\, I_1(h) = O(h^\infty)$ (phase non stat.)

$\cdot\, I_0(h) = \int \underbrace{e^{i\varphi_2(y)/h}}_{\text{phase quadr.}} \underbrace{(\chi a)\circ\kappa(y)\,|\det\partial\kappa(y)|}_{b(y)}\, dy$

$Q = \varphi''(x_0)$

$$(\langle D, Q^{-1} D\rangle)^j b = \overline{A_{2j}(x,h)\, a}_{|x=x_0}$$

11

Démo formelle

$$\int a\, e^{i\varphi/h}\, dx \qquad \varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_0) + \frac{1}{2}\langle (x-x_0), \varphi''_{(x_0)}(x-x_0)\rangle}_{\varphi_2(x)} + g(x)$$

$g(x) = O(|x-x_0|^3)$

$$\int a\, e^{i\frac{\varphi_2(x)+g(x)}{h}}\, dx$$

$$\underbrace{e^{ig(x)/h} a(x)}_{b(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{i g(x)}{h}\right)^k a(x)$$

$$\int \frac{(x-x_0)^{3k}}{h^k} e^{i\frac{\varphi_2}{h}} = \frac{h^{\frac{3k}{2}}}{h^k} = O(h^{k/2})$$

$$\int e^{i\frac{\varphi_2(x)}{h}} b(x)\, dx$$

$$= \int e^{i\frac{\varphi_2}{h}} a(x)\, dx + \int \frac{i g(x)}{h} a(x)\, e^{i\frac{\varphi_2}{h}}\, dx$$

$$g(x)a(x) = (x-x_0)^3 + \dots + \qquad \int \frac{(x-x_0)^3}{h} e^{i\varphi_2/h} = 0$$

$$= (x-x_0)^4 \qquad \int \frac{C(x-x_0)^4}{h} e^{i\varphi_2/h}\, dx = O(h)$$

$h^j\, \boxed{A_{2j}(x, D)}$ dép des germes des fonctions $g(x)^k a(x)$ au pt x_0, pour $k \leq j$

Composée de 2 opérateurs $Op_h(a)$, avec $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$

$a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}) \overset{?}{\longrightarrow} Op_h^t(a) \circ Op_h^t(b) = Op_h^t(c)$

Comment calculer le symbole $c(x, \xi; h, t)$?

ex : $Op(f(x)) \quad Op(g(\xi)) \longrightarrow Op^R(f(x)\, g(\xi))$

$Op(g(\xi)) \quad Op(f) \longrightarrow Op^G(f(x)\, g(\xi))$

$\downarrow$

$Op^t(\quad)$

Rem : $A_h = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(hD)^\alpha$

$B_h = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta(x)(hD)^\beta$

$A_h = Op\big(\underbrace{a}_{\sum a_\alpha \xi^\alpha}\big)$

$B_h = Op\big(\underbrace{b}_{\sum b_\beta \xi^\beta}\big)$

$(A_h \circ B_h)u = \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha (hD)^\alpha\, b_\beta (hD)^\beta u$

$\underbrace{Op\Big[\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \xi^\alpha \xi^\beta\Big]}_{= Op(ab)} = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta (hD)^{\alpha + \beta} u + \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \big[(hD)^\alpha, b_\beta\big] \underbrace{(hD)^\beta}_{Op_h(\xi^\beta)} u$

$\big[(hD)^\alpha, b_\beta\big] u = \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = \alpha \\ |\alpha^{(1)}| \neq 0}} \underbrace{c_{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}}\, h^{|\alpha^{(1)}|} \big(D^{\alpha^{(1)}} b_\beta^{(r)}\big) \big(hD^{\alpha^{(2)}}\big)}\, u$

12

$a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$

$\Rightarrow$ noyau intégral $k_A(x,y)$ de l'op. $Op_h^t(a) = A$ est 1 fonction de Schwartz.

$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\Rightarrow [A \circ B]u(x) = \int k_A(x,y)\, k_B(y,z)\, u(z)\, dz\, dy$$

$Cu(x) =$

$$= \int k_C(x,z)\, u(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \underset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})}{\underset{\in}{k_C(x,z)}} = \int dy\, k_A(x,y)\, k_B(y,z)$$

$$k_C(x,y) = \int e^{-i\xi\cdot y/h} \left(\mathcal{F}_{h,\, y\to\xi}^{-1} k_C\right)(x,\xi) \frac{d\xi}{(2\pi h)^{d/2}}$$

$\Rightarrow C = Op_h^R(c_1)$, avec

$$c_1(x,\xi;h) = (2\pi h)^{d/2}\, e^{-i\xi\cdot x/h} \left(\mathcal{F}_h^{-1} k_C\right)(x,\xi)$$

$$[Cu](x) = \int e^{i\xi(x-y)/h}\, c_1(x,\xi)\, u(y)\, \frac{dy\, d\xi}{(2\pi h)^d}$$

$c_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$

13

Noyau intégral $k_C \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y) \longrightarrow$ symbole $c_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}_{x,\xi})$

$\downarrow$

symboles c_t

$c_t =$ t-symbole total de l'op C.

$= \sigma_h^t(C)$

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & c_t = \sigma_h^t(C) \quad \text{bijection} \\ \swarrow & & \cap \\ k_C \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) & & \mathcal{S} \end{array}$$

$C = A \circ B$, $A = Op(a)$, $B = Op(b)$

- $A = Op_h^t(a) = \int \underbrace{Op_h^t(e_{V_0})}\, \hat{a}(V_0) \frac{dV_0}{(2\pi)^d}$

$$A \circ B = \int \frac{dV_0\, dV_1}{(2\pi)^{2d}}\, \hat{a}(V_0)\, \hat{b}(V_1)\, \underbrace{Op_h^t(e_{V_0})\, Op_h^t(e_{V_1})}_{e^{ih((1-t)\xi_0\cdot x_1 + t\xi_1\cdot x_0)}\, Op_h^t(e_{V_0+V_1})}$$

$$\begin{cases} V_+ = V_0 + V_1 \\ V_- = \frac{V_0 - V_1}{2} \end{cases}$$

(14)

$$A \circ B = \iint \frac{dV_+ \, dV_-}{(2\pi)^{2d}} \, \hat{a}\left(\frac{V_+}{2} + V_-\right) \hat{b}\left(\frac{V_+}{2} - V_-\right) e^{i\varphi_t \times h} \quad Op_h^t(e_{V_+})$$

$$\varphi_t = (1-2t)\cancel{(\xi_+ x_d/2} - 2\xi_- \cdot x_-) + (-\xi_d \cdot x_- + \xi_- \cdot x_+)/2$$

$t = 1/2$ (Weyl)

$$\varphi_{1/2} = \frac{1}{2}\omega(V_-, V_+) = \frac{1}{2}\omega(V_0, V_1)$$

$$\hat{c}(V_+) = \int \frac{dV_-}{(2\pi)^d} \, e^{\frac{ih}{2}\omega(V_-, V_+)} \, \hat{a}\left(\frac{V_+}{2} + V_-\right) \hat{b}\left(\frac{V_+}{2} - V_-\right)$$

$$\hat{c}(V_+) = \int \frac{dV_-}{(2\pi)^d} \, e^{\frac{ih}{2}\omega(V_0, V_1)} \, \hat{a}(V_0) \, \hat{b}(V_1)$$

$c = c_{1/2}$ symbole de Weyl de $A = Op_h^W(a)$

$B = Op_h^W(b)$.

multipl. de Fourier sur $\mathbb{R}^{4d}$

TF de $\tilde{c}(\rho_0, \rho_1) = e^{\frac{ih}{2}\omega(D_{\rho_0}, D_{\rho_1})} a(\rho_0) b(\rho_1)$

$$c(\rho; h) = \int e^{i\omega(V_+, \rho)} \hat{c}(V_+) \frac{dV_+}{(2\pi)^d} = \iint \frac{dV_0 \, dV_1}{(2\pi)^{2d}} e^{i\omega(V_0 + V_1, \rho)} e^{\frac{ih}{2}\omega(V_0, V_1)} \hat{a}(V_0) \hat{b}(V_1)$$

$$c(\rho;h) = \tilde{c}(\rho_0,\rho_1)\Big|_{\rho_0=\rho_1=\rho} \qquad \rho_0=(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^{2d}, \quad \rho_1=(x_1,\xi_1)\in\mathbb{R}^{2d}$$

$$= e^{\frac{ih}{2}\omega(D_{\rho_0},D_{\rho_1})}\, a(\rho_0)\, b(\rho_1)\Big|_{\rho_0=\rho_1=\rho}$$

<u>Thme</u> (Composition de 2 ops - quantification de Weyl).

$a,b\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Alors $\underset{A}{Op_h^w(a)}\circ \underset{B}{Op_h^w(b)} = \underset{C}{Op_h^w(c)}$ ← symbole de Weyl de C

$$c(x,\xi;h) = e^{\frac{ih}{2}\omega(D_{\rho_0},D_{\rho_1})}\, a(\rho_0)\, a(\rho_1)\Big|_{\rho_0=\rho_1=\rho}$$

$$= e^{\frac{ih}{2}(D_{\xi_0}\cdot D_{x_1} - D_{\xi_1}\cdot D_{x_0})}\, a(x_0,\xi_0)\, b(x_1,\xi_1)\Big|_{\substack{x_0=x_1=x\\ \xi_0=\xi_1=\xi}}$$

$$= a(\rho)\, e^{\frac{ih}{2}\omega(\overleftarrow{D},\overrightarrow{D})}\, b(\rho)$$

On écrit ce "produit" $a \underbrace{\#_h}\, b$

produit de <u>Moyal</u> de a par b.

Le produit de Moyal n'est pas commutatif,

il dépend explicit^t de h.

$\#_h$: traduction au niveau des symboles du produit d'opérateurs.

Exercice : calculer le "produit pour la quantif. à droite :

$$Op_h^R(a)\, Op_h^R(b) = Op_h^R(c)$$

$$c_1(\rho;h) = a(\rho)\, \underline{e^{ih \overleftarrow{D}_\xi \cdot \overrightarrow{D}_x}}\, b(\rho)$$

• On peut écrire $c(\rho;h)$ comme 1 intégrale en terme de a,b :

$$c(\underline{\underline{\rho}};h) = (a \#_h b)(\rho;h) = \int_{\mathbb{R}^{4d}} \frac{d\rho_0\, d\rho_1}{(\pi h)^{2d}} \underbrace{\exp\left(-\frac{2i}{h}\omega(\rho_0,\rho_1)\right)}_{\text{phase oscillant quadratique}} a(\rho+\rho_0)\, b(\rho+\rho_1)$$

$\hookrightarrow$ Dévt asymptotique du Π de Moyal, pour chaque point ρ

Rem : La f. quadratique $(\rho_0,\rho_1) \longmapsto 2\omega(\rho_0,\rho_1)$ est non dégénérée.

elle a pour Hessienne $Q = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

$$a \#_h b(\rho) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(ih/2)^j}{j!}\, a(\rho)\left(\omega(\overleftarrow{D},\overrightarrow{D})\right)^j b(\rho) + O(h^N)$$

$$\frac{(ih/2)^N}{(N-1)!}\int_0^1 du\,(1-u)^{N-1}\, a(\rho)\, \left(\omega(\overleftarrow{D},\overrightarrow{D})\right)^N\, \overline{\overline{e^{iuh\omega(\overleftarrow{D},\overrightarrow{D})}}}\, b(\rho)$$

<u>Prop :</u> semi-normes du symbole $c = a \# b$.

$\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{N}^{2d}, \forall \rho \in \mathbb{R}^{2d}$

$$\underline{\left|\rho^\gamma \partial^\alpha (c)(\rho)\right|} \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(h/2)^j}{j!} \left|\rho^\gamma \partial^\alpha \left[a(i\,\omega(D,\bar{D}))^j b(\rho)\right]\right|$$
$$+ C_{N,\gamma,\alpha}\, h^N \left\| \langle\rho\rangle^{|\gamma|} \langle D\rangle^{N+|\alpha|+2d+1} a \right\|_{L^1} \times \left\| \langle D\rangle^{N+|\alpha|+|\gamma|+2d+1} b \right\|_{L^1}$$

$\alpha = \gamma = 0,\ N = 0$

$$\left|(a \#_h b)(\rho)\right| \leq C \left\| \langle D\rangle^{2d+1} a \right\|_{L^1} \left\| \langle D\rangle^{2d+1} b \right\|_{L^1}$$

$$\text{cf. } \|\mathcal{F}_1 a\|_{L^\infty} \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2d+1} \|\partial^\alpha a\|_{L^1}$$

<u>preuve :</u> partir par la TF du terme de reste

$$h^N \int_0^1 du\, (1-u)^{N-1} \left| \underbrace{\hat{a}(V_0)}\, \underbrace{(\omega(V_0,V_1))^N}\, \underbrace{e^{ihu\,\omega(V_0,V_1)}}\, \underbrace{\hat{b}(V_1)} \right|$$
$$\leq C \langle V_0\rangle^N \langle V_1\rangle^N |\hat{a}(V_0)|\,|\hat{b}(V_1)| = \left|\widehat{(\langle D\rangle^N a)}(V_0)\, \widehat{\langle D\rangle^N b}(V_1)\right|$$

18

$\Longrightarrow$? de reste, ($\alpha = \gamma = 0$)

$$|R_N(g;h)| \leq C \, \| \langle v_0 \rangle^{N+|\alpha|} \hat{a}(v_0) \|_{L^1} \; \| \langle v_1 \rangle^{N+|\alpha|} \hat{b}(v_1) \|_{L^1}$$

$$\leq C \, \| \langle D \rangle^{N+2d+1} a \|_{L^1} \; \| \langle D \rangle^{N+2d+1} b \|_{L^1}$$

en utilisant :

$$|f(x)| \leq C_n \|\hat{f}\| \leq C_n' \, \| \langle D \rangle^{n+1} f \|_{L^1}$$

• Si je calcule $\partial^\alpha c \Longleftrightarrow \hat{c} \times \underbrace{(i\, J(v_0 + v_1))^\alpha}_{\leq \langle v_0 \rangle^{|\alpha|} \langle v_1 \rangle^{|\alpha|}}$

• Si je multiplie par $\rho^\gamma \Longleftrightarrow D^\gamma_{J v_0} \, e^{i\omega(v_0+v_1, \rho)}$

$\Longrightarrow$ int IPP $|\gamma|$ fois $\longrightarrow$ tape sur $\omega(v_0,v_1)$ $e^{ih\,\omega(v_0,v_1)}$ $\bar{a}(v_0) \hat{b}(v_1)$

$$\leq \langle v_0 \rangle^N \underbrace{\langle v_1 \rangle^{N+|\gamma|}}\; \underbrace{|\langle D \rangle^{|\gamma|}} \bar{a}(v_0)| \, |\bar{a}(v_1)|$$

$\Longrightarrow \#_h$ est bien continu : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ et unif^t p/r $h \in]0,1]$

$\forall h$ fixé : $a, b \longmapsto c = a \#_h b$

$$a \#_h b = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(ih/2)^j}{j!} a(\rho) \left(\omega(\overleftarrow{D}, \overrightarrow{D})\right)^j b(\rho) + O(h^N)_\rho$$

$$= a(\rho)b(\rho) + \frac{ih}{2}\left(D_\xi a \cdot D_x b - D_x a \cdot D_\xi b\right) - \frac{h^2}{8} a \left(\overleftarrow{D}_\xi \overrightarrow{D}_x - \overleftarrow{D}_x \cdot \overrightarrow{D}_\xi\right)^2 b + O(h^3)$$

$$= \underbrace{h^0 a(\rho)b(\rho)}_{\text{produit classique de symbole}} - \frac{ih}{2}\underbrace{\{a,b\}}_{\text{Crochet de Poisson antisymétrique}} + O(h^2)$$

symétrique p/r a,b

$\cancel{k_\ell} \cancel{k} \cancel{k_a k_c}$

$h^{2k+1} \longrightarrow$ antisym. p/r $a \longleftrightarrow b$

$h^{2k} \longrightarrow$ sym.

a,b ? fcts indép. de h

$\longrightarrow a \#_h b = c = ab + O(h) \ldots$

Calcul symbolique : Calculer $A \circ B$ en terme de leurs symbole(s) : symbole principal de $Op_h^V(a)\, Op_h^W(b)$

noté $\sigma_0^W(AB) = a.b.$

Lemme $Op_p^t(a)\, Op_p^t(b) = Op_p^t(ab) + O(h) \ldots$ $\quad a_1 = a_0 + h \ldots$

Quantification anti-Wick

$a \longmapsto Op_h^{AW}(a)$ - autoadjointe

- positive

$a \geq 0 \Longrightarrow Op_h^{AW}(a) \geq 0$

$\forall u, \ \langle u, Op_h^{AW}(a) u \rangle \geqslant 0$

$(x,\xi) \underset{K}{\longmapsto} (y,\eta)$ K linéaire et symplectique

(Darboux)

Op_h^W est covariant p/r $\nearrow$.