Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation
Analyse Semiclassique (2019-2020, 1er semestre)
Stéphane Nonnenmacher

Examen final, 19/11/2019, 9h-12h

Les documents sont autorisés durant l'épreuve

Propagation du front d'onde semiclassique

Ce problème a pour objectif de montrer un théorème de *propagation* du front d'onde semiclassique, un pendant semiclassique du théorème de *propagation des singularités* en analyse microlocale.

On se donne une fonction d'ordre $m \geq 1$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ et un symbole $p \in S(m)$, qu'on suppose de la forme $p \sim \sum_{j\geq 0} h^j p_j$ avec $p_0 \in S(m)$ à valeurs réelles. On quantifie ce symbole en $P = \mathrm{Op}_h^W(p)$, et on cherche à obtenir des informations sur des quasi-fonctions propres, autrement dit des fonctions $u_h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ supposées normalisées, satisfaisant une équation du type :

$$\|(P - E_h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon_h, \quad \text{avec } E_h \overset{h\to 0}{\to} E, \quad \epsilon_h = o(1)_{h\to 0}\,. \tag{1}$$

Une telle fonction u_h est appelée un *quasimode* de P, de quasi valeur propre E_h et d'erreur ϵ_h.

On veut montrer que les lieux de concentration de ces quasimodes *se propagent* le long du flot Hamiltonien $\varphi^t : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ engendré par le champ de vecteurs hamiltonien H_{p_0} (on supposera que ce flot est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Pour cela, on définit une notion de contrôle sous le flot φ^t :

Définition 1. *On dit qu'une fonction $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ contrôle $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ sous le flot φ^t si tout point $\rho_0 \in supp(a)$ peut être atteint, dans le futur, à partir d'un point de l'ensemble elliptique de b, $\mathrm{elli}(b) \overset{\text{def}}{=} \{\rho \in \mathbb{R}^{2d},\ b(\rho) \neq 0\}$.*
Autrement dit, pour tout $\rho_0 \in \mathrm{supp}(a)$ il existe $T = T(\rho_0) \geq 0$ tel que $\varphi^{-T}(\rho_0) \in \mathrm{elli}(b)$.

En se servant de cette définition, notre théorème de propagation s'énonce comme suit.

Théorème 2. *Soit $P = \mathrm{Op}_h(p)$ comme ci-dessus. On considère 3 fonctions $a, b, b_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, telles que*
i) a est contrôlée par b sous le flot φ^t.
ii) $\mathrm{elli}(b_1)$ contient l'ensemble de trajectoires $\mathcal{S} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\rho_0\in\mathrm{supp}(a)} \bigcup_{t\in[-T(\rho_0),0]} \varphi^t(\rho_0)$.

Alors, en notant $A = \mathrm{Op}_h^W(a)$ etc, on a l'estimée suivante : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $h \in (0, 1]$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$,

$$\|Au\| \leq C\|Bu\| + \frac{C}{h}\|B_1(P - E_h)u\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|\,. \tag{2}$$

(toutes les normes sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$).

On commence par tirer quelques conséquences de ce théorème.

1. Faire un schéma montrant les supports de a, b, b_1 et les trajectoires de φ^t les traversant.

2. Montrer que si (u_h) est une famille de quasimodes d'erreur ϵ_h décroissant assez vite vers zéro, alors l'estimée (2) donne des informations non-triviales sur la microlocalisation de (u_h). Justifier en quoi le front d'onde de (u_h) « se propage » par le flot.

3. Montrer que l'estimée ci-dessus peut se déduire facilement de l'estimée avec $E_h = 0$. Dans la preuve on se restreindra à ce cas.

Nous commençons maintenant la preuve du théorème 2, dans le cas $E_h = 0$.

Construction d'une fonction de fuite.

La première étape consiste à construire une certaine fonction auxiliaire, appelée *fonction de fuite*. Une fonction de fuite a comme propriété principale d'être *décroissante* par rapport au flot φ^t, au moins dans une certaine région de l'espace des phases.

Définition 3. *Fixons un paramètre $\beta > 0$. Une fonction de fuite $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ associée à notre problème satisfait les conditions suivantes :*
i) $\mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{elli}(b_1)$
ii) $g \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}^{2d}$
iii) $g > 0$ *sur* $\mathrm{supp}(a)$
iv) $H_{p_0} g \leq -\beta g$ *dans un voisinage de* $\mathbb{R}^{2d} \setminus \mathrm{elli}(b)$ *(hypothèse de décroissance).*

4. Faire un schéma montrant la forme de g le long d'une trajectoire $\varphi^t(\rho_0)$.

   On va chercher à recouvrir l'ensemble de trajectoires $\mathcal{S}$ par un ensemble fini de « tubes ». Pour simplifier l'exposition on suppose que $H_{p_0}(\rho)$ ne s'annule pas sur $\mathrm{supp}(a)$.

5. Montrer que, quitte à prendre un T plus petit, on peut supposer que $t \in [-T, 0] \mapsto \phi^t(\rho_0)$ réalise une bijection sur son image.

6. Montrer que si on choisit $\delta > 0$ assez petit, on peut « épaissir » ce segment de trajectoire en considérant $\Sigma_{\rho_0,\delta}$ la boule fermée $(2d-1)$-dimensionnelle centrée en ρ_0 orthogonale à $H_{p_0}(\rho_0)$, de rayon δ, telle que

   $$\Phi_{\rho_0} : [-T-\delta, \delta] \times \Sigma_{\rho_0,\delta} \ni (t, \rho) \mapsto \varphi^t(\rho)$$

   réalise une bijection sur son image, que ce *tube* $T_{\rho_0} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\rho_0}([-T-\delta, \delta] \times \Sigma_{\rho_0,\delta})$ soit contenu dans $\mathrm{elli}(b_1)$, et la portion de tube $\Phi_{\rho_0}([-T-\delta, -T+\delta] \times \Sigma_{\rho_0,\delta})$ soit contenue dans $\mathrm{elli}(b)$.
   Conseil : faire des dessins.

   Pour chaque tube T_{ρ_0}, on va construire une fonction de fuite g_{ρ_0} supportée dans T_{ρ_0}, telle que la propriété *iii)* est remplacée par $g_{\rho_0}(\rho_0) > 0$.

7. Proposer une construction de g_{ρ_0} sous la forme $g_{\rho_0} = (\psi \otimes \chi) \circ \Phi_{\rho_0}^{-1}$, avec $\psi = \psi_{\rho_0} \in C_c^\infty([-T-\delta, \delta])$ et $\chi \in C_c^\infty(\Sigma_{\rho_0,\delta})$ ayant les propriétés qu'on précisera.

8. Montrer qu'on peut trouver un ensemble fini $\mathcal{F} \subset \operatorname{supp}(a)$ tel que $g = \sum_{\rho_0 \in \mathcal{F}} g_{\rho_0}$ satisfait la Définition 3.

Un argument de commutateur positif

Nous allons quantifier notre fonction de fuite g en un opérateur $G = \mathrm{Op}_h^W(g)$. On va s'en servir pour exhiber un commutateur ayant des propriétés de positivité intéressantes. On parlera d'un argument de commutateur positif, un argument fréquent dans l'étude des EDP.

On cherche à estimer la quantité suivante :

$$Q(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(\langle Pu, G^2 u\rangle), \quad \text{initialement définie pour } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{3}$$

(ici $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$).

9. Dans quelle classe d'opérateurs pseudodifférentiels (OPD) est G ? En déduire que G est borné et autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En déduire que $Q(u)$ s'étend naturellement à tout $u \in L^2$.

10. Notons P^* l'adjoint formel de P, et les combinaisons

$$\mathrm{Re}\, P = \frac{1}{2}(P + P^*), \qquad \mathrm{Im}\, P = \frac{1}{2i}(P - P^*)\,.$$

Décomposer $Q(u)$ en deux termes $Q_R(u)$ et $Q_I(u)$, faisant intervenir respectivement $\mathrm{Re}\, P$ et $\mathrm{Im}\, P$.

11. Montrer que $Q_R(u)$ peut s'écrire en termes du commutateur $Z = \frac{i}{2h}[\mathrm{Re}\, P, G^2]$. Dans quelle classe d'OPD se trouve Z ? Montrer que Z est borné et autoadjoint.

12. Quel est l'expression du symbole principal $z_0(\rho)$? A partir de l'hypothèse de monotonie locale de g, montrer que

$$z_0(\rho) + \beta g(\rho)^2 \leq 0 \quad \text{près de} \quad \mathbb{R}^{2d} \setminus \mathrm{elli}(b). \tag{4}$$

Pour se servir de cette négativité locale, on va utiliser une version microlocale du théorème de Gårding fort (qu'on admettra).

Théorème 4 (Gårding fort microlocal)**.** *Soient $a_1, a_2, a_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ tels que*
i) $\mathrm{Re}\, a_1(\rho) \geq 0$ *dans un voisinage de* $\mathbb{R}^{2d} \setminus \mathrm{elli}(a_2)$*.*
ii) $\operatorname{supp}(a_1) \subset \mathrm{elli}(a_3)$*.*
Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $h \in (0, 1]$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathrm{Re}\langle A_1 u, u\rangle \geq -C\|A_2 u\|^2 - Ch\|A_3 u\|^2 - \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2\,.$$

13. En appliquant ce théorème de Gårding à l'inégalité (4), montrer que

$$(5)\qquad \langle Zu, u\rangle \le -\beta\|Gu\|^2 + C\|Bu\|^2 + Ch\|B_1 u\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2, \qquad \forall u \in L^2.$$

Contribution de la partie imaginaire

14. On va maintenant s'occuper du terme $Q_I(u)$. Montrer que ce terme peut s'écrire

$$Q_I(u) = \langle (\operatorname{Im} P)Gu, Gu\rangle + \langle \operatorname{Re}(G[G, \operatorname{Im} P])u, u\rangle .$$

Dans quelle classe d'OPD est $\operatorname{Im} P$? En utilisant un cutoff microlocal $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ avec $\chi \equiv 1$ près de $\operatorname{supp}(g)$, montrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ *indépendante des seminormes de g* telle que

$$(6)\qquad \langle (\operatorname{Im} P)Gu, Gu\rangle \le C_2 h\|Gu\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2 ,$$

pour tout $h \in (0, 1]$, $u \in L^2$.

15. Dans quelle classe d'OPD est l'opérateur $G[G, \operatorname{Im} P]$? Et l'opérateur $\operatorname{Re}(G[G, \operatorname{Im} P])$? Montrer que le front d'onde de cet opérateur est contenu dans $elli(b_1)$.

On rappelle le résultat d'ellipticité locale suivant :

Proposition 5. *Soit $a_1, a_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ tels que $\operatorname{supp}(a_1) \subset \operatorname{elli}(a_2)$. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $h > 0$ assez petit*

$$\|A_1 u\| \le C\|A_2 u\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|, \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

16. En déduire la borne

$$(7)\qquad \langle \operatorname{Re}(G[G, \operatorname{Im} P])u, u\rangle \le Ch^3\|B_1 u\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2 .$$

17. Déduire des 3 inégalités ci-dessus la borne supérieure

$$(8)\qquad Q(u) \le (C_2 - \beta)h\|Gu\|^2 + Ch\|Bu\|^2 + Ch^2\|B_1 u\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2$$

Expliquer pourquoi on a le droit de choisir le paramètre $\beta = C_2 + 1$ dans la définition de la fonction de fuite.

18. Par ailleurs, montrer l'inégalité $|Q(u)| \le \|GPu\|\,\|Gu\|$, puis en déduire

$$|Q(u)| \le C\|B_1 Pu\|\|Gu\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2 .$$

19. En combinant cette dernière inégalité avec (8), montrer

$$\|Gu\|^2 \le C\|Bu\|^2 + Ch^{-1}\|B_1 Pu\|\,\|Gu\| + Ch\|B_1 u\|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2$$

Par des arguments algébriques simples, recombiner cette inégalité en

$$\|Gu\| \le C\,\|Bu\| + Ch^{-1}\|B_1 Pu\| + Ch^{1/2}\|B_1 u\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\| .$$

20. En se servant des la propriété *iii*) de la fonction de fuite, montrer qu'on peut remplacer le membre de gauche par $\|Au\|$ (quitte à modifier les constante C).

Fin de la preuve

On a donc obtenu l'inégalité annoncée (2) (dans le cas $E_h = 0$), modulo le terme $h^{1/2}\|B_1 u\|$. Pour se débarrasser de ce terme, on va procéder par récurrence : à partir de l'inégalité

$$\|Au\| \leq C\,\|Bu\|^2 + Ch^{-1}\|B_1 Pu\| + Ch^{\ell/2}\|B_1 u\| + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2\,, \tag{9}$$

pour un entier $\ell \geq 1$, on va montrer une inégalité similaire avec ℓ remplacé par $\ell + 1$.

21. Pour le passage $\ell \to \ell + 1$, on va se servir d'une fonction intermédiaire b_2 « intermédiaire » entre a et b_1 : dans les hypothèses du théorème 2, b_2 peut soit remplacer a, soit remplacer b_1.
    Montrer qu'une telle fonction $b_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ existe effectivement.
22. En appliquant l'estimée (9) au triplet (a, b, b_2), et l'estimée (9) au triplet (b_2, b, b_1), montrer l'estimée (9) avec $\ell \to \ell + 1$ pour le triplet (a, b, b_1).
23. Montrer que cet argument itératif conduit à la preuve de (2) (pour $E_h = 0$).