Bon travail dans l'ensemble. Certaines affirmations demandent à être justifiées.

TD 1.1

Bin LIN (Bilal)

26 février 2022

Il est inutile de répéter les énoncés des exercices dans ta copie.

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Que dire si f est dcroissante ?

Démonstration. Par définition, on a

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

Donc par la continuité de f, on a

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\sup_{k\geq n} x_k)$$

il faut justifier que la limite de droite existe. Tout ce qu'on sait, c'est que la suite y_n=sup_k>=n x_k est décroissante. Il faut alors utiliser le fait que f est croissante pour dire que la suite f(y_n) est décroissante, et donc qu'elle admet une limite.

Fixe $n \geq 1$, car f est croissante, $f(\sup_{k\geq n} x_k) \geq f(x_k) \Rightarrow f(\sup_{k\geq n} x_k) \geq \sup_{k\geq n} f(x_k)$. ok

Par ailleurs, il existe une sous-suite $(x_{l_m})_{m\geq 1}$, $l_m \geq n$ de $(x_k)_{k\geq n}$ telle que $\lim_{m\to\infty} x_{l_m} = \sup_{k\geq n} x_k$. ok (les l_m peuvent être tous égaux) ici tu utilises la continuité de f

Là encore, il faut justifier l'égalité. Tu as montré que f(y_n)=\sup_{k>=n} f(x_k). Les 2 suites sont décroissantes (car f est croissante), donc elles admettent une limite.

Donc $f(\sup_{k\geq n} x_k) = \lim_{m\to\infty} f(x_{l_m}) \leq \sup_{k\geq n} f(x_k)$, et on a $f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$.

Pour la limite inférieure, avec la même discussion on va montrer l'égalité.

Si f est décroissante, la fonction $-f$ est croissante, donc on a

$$-f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} -f(x_n) = -\liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

ainsi $f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ (et de même, $f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$). OK □

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caratéristique de A ou tout simplement l'indicatrice de A).

1. Si $A, B \subseteq E$, écrire $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Relier les fonction indicatrices $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\geq 1} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}, n \geq 1$.

3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes (definies sur $\mathbb{R}$) :

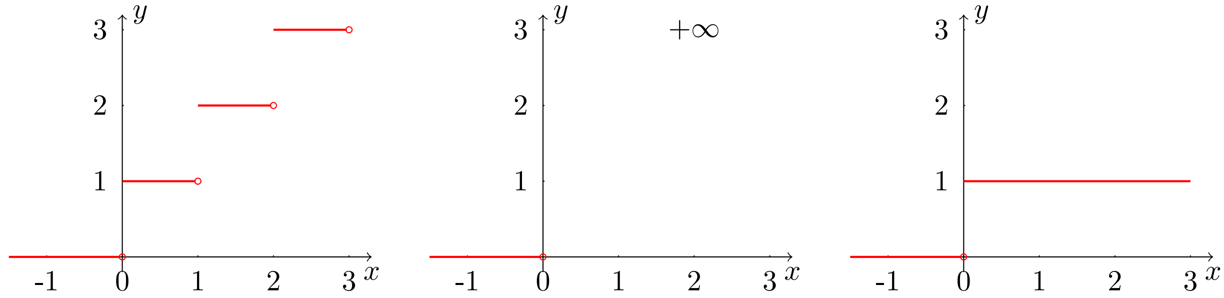
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,\infty[}\ ,\quad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[0,n]}\ ,\quad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}\ .$$

Solu. 1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. Et on a $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} = 1$, donc $\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{(A\cup B)^c} = 1 - \mathbb{1}_{A^c\cap B^c} = 1 - (1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$. OK

2. $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\geq 1} A_n} = \prod_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$. Car le produit de $\mathbb{1}_{A_n}(x)$ est 1 si pour chaque n $\mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$, et 0 sinon, donc le produit est bien défini, et l'égalité tient. Donc $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = 1 - \prod_{n\geq 1}(1-\mathbb{1}_{A_n})$. ok

On peut aussi l'écrire $\mathbb{1}_{\bigcap_{n\geq 1} A_n}(x) = \inf_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(x)$ et $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1} A_n}(x) = \sup_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(x)$.
OK OK

3.



Bien

$\square$

Exercice 3

On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique.

1. Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k, \quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k?$$

Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}, \quad \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

aux fonction $\mathbb{1}_{A_n}, n \geq 1$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \left\{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\right\}, \quad \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \left\{\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\right\}.$

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n, \quad \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n.$

3. Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ dans les cas suivants

(a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,

(b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2p} = 1 + 1/(2p)$ et $a_{2p+1} = -1 - 1/(2p+1)$,

(c) $A_{2p} =]0, 3 + 1/(2p)]$ et $A_{2p+1} =]-1-1/(3p), 2]$,

(d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de

p_n,

(e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

Solu. 1. Par la conclusion de l'exercice précédent, on a

Il fallait expliquer (avec des mots) ce que représentent ces ensembles. x\in \liminf A_n ssi, pour un N assez grand, x est dans tous les A_n avec n>N. Par contre, x\in \limsup A_n si x est dans A_n pour une infinité de n.

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x) = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k}(x)$$

$$= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)$$ OK

$$\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x) = \mathbb{1}_{\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k}(x)$$

$$= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)$$ OK

□

Démonstration. 2. (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = (\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$. OK

$\forall x \in \liminf_{n\to\infty} A_n,\ \exists\ n \geq 1\ t.q.\ x \in \bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq A_k \Rightarrow \forall m \geq 1,\ \exists\ k \geq m\ t.q.\ x \in \bigcup_{k\geq m} A_k \Rightarrow x \in$ $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

La solution vient tout de suite avec l'explication de ces ensembles "avec des mots": si x est dans tous les A_n pour n>N, alors il est dans une infinité de A_n.

Donc $\limsup_{n\to\infty} A_n \supseteq \liminf_{n\to\infty} A_n$.

(b) $\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \infty \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$. Donc $X = \left\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1\right\}$.

$\mathbb{1}_X = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = X$.

OK. Là aussi, la définition "avec des mots" montre tout de suite que x\in \limsup A_n ssi il y a une infinité de n t.q.1_{A_n}(x)=1

$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left(\limsup_{n\to\infty} A_n^c\right)^c = \left\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} = \infty\right\}^c = \left\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\right\}$. OK

(c)

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) &= \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}(A_k \cup B_k)\\
&= \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k \cup \bigcup_{k\geq n} B_k\right)\\
&= \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k \cup \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} B_k\\
&= \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_k \quad \text{OK}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &= \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}(A_k \cap B_k)\\
&= \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k \cap \bigcup_{k\geq n} B_k\right)\\
&\subset \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k \cap \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} B_k \quad \text{expliquer le \textbackslash subset}\\
&= \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_k
\end{aligned}$$

Ces deux propriétés peuvent aussi s'expliquer "avec les mots". Etre dans une infinité de (A_n\cup B_n), c'est être dans une infinité de A_n ou dans une infinité de B_n. Etre dans une infinité de A_n\cap B_n, c'est être dans une infinité de A_n et de B_n, pour une même sous-suite d'indices n, alors que \limsup A_n \cap \limsup B_n ne nécessite pas que ce soit la même sous-suite d'indices n.

Solu. 3. (a) $\forall n \geq 1$, $\bigcup_{k\geq n} A_k = F\cup G$, $\bigcap_{k\geq n} A_k = F\cap G \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = F\cup G$, $\liminf_{n\to\infty} A_n = F\cap G$. ok

(b) $\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{2k\geq n} A_{2k} = A_{2l}$, où $l = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Donc $A_{2l} =]-\infty, 1+\frac{1}{2l}]$, et $\limsup_{n\to\infty} A_n =]-\infty, 1[$.

$\bigcap_{k\geq n} A_k = A_{2l+1}$, où $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donc $\liminf_{n\to\infty} A_n =]-\infty, -1[$. ok

(c) $\bigcup_{k\geq n} A_k = A_n \cup A_{n+1} =]-1-\frac{1}{3(n-l)}, 3+\frac{1}{2l}[$, où $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc $\limsup_{n\to\infty} = [-1, 3]$. ok

$A_k \cap A_{k+1} = [0, 2]$ et $[0, 2] \subseteq A_n$ $\forall n$, donc $\liminf_{n\to\infty} A_n = [0, 2]$.

(d) $p_n\mathbb{N}$ est tous les entiers naturels divisé par p_n, donc $\bigcap_{k\geq n} p_k\mathbb{N} = \{0\}$, et $\liminf_{n\to\infty} p_n\mathbb{N} = \{0\}$.

$\left(\bigcup_{k\geq n} p_k\mathbb{N}\right)^c$ est tous les entiers naturels avec seulement facteurs premiers dans $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}\}$.
non nuls

Donc $\bigcup_{n\geq 0}\left(\bigcup_{k\geq n} p_k\mathbb{N}\right)^c = \mathbb{N}^*$, et $\limsup_{n\to\infty} p_n\mathbb{N} = \{0\}$. OK

(e)$\limsup_{n\to\infty} A_n =]-2, 2[$, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\}$. OK, mais il faut justifier $\square$

Exercice 4

Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \cdots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E; f(x) \geq n\}, \quad B_{n,i} = \{x \in E; i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose $f_n = \sum_{i \geq 0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{B_{n,i}} + n\mathbb{1}_{A_n}$. Soit $x \in E$ fixé. Que dire de la suite $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$? Conclusion. $f_n(x) \to f(x)$ ok

Démonstration. Si $f(x) = +\infty$, on a $x \in A_n$, donc $f_n(x) \geq n\mathbb{1}_{A_n} = n \Rightarrow f_n(x) \to +\infty = f(x)$.

Sinon, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $f(x) < N$. Et $\forall n > N$, il existe unique $i \in \{0, 1, \cdots, n2^n - 1\}$ t.q. $x \in B_{n,i}$, donc $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$, et $|f(x) - f_n(x)| < 2^{-n} \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$. ok $\square$