Bon travail

Ex 1. 1. On a $\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcap_{k\geq n+1} A_k \subseteq \dots$, donc :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k\Big)$$ OK

Il suffit de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k\Big) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf\big(\mu(A_n)\big) \quad (*).$$

Alors, pour $m\geq n$, c'est évidement que
évident

$$\mu\Big(\bigcap_{k\geq n} A_n\Big) \leq \mu(A_m)$$ ok

Donc, on a $\mu\big(\bigcap_{k\geq n} A_k\big) \leq \inf_{m\geq n} \mu(A_m)$, qui montre l'inégalité $(*)$. ok

Pour la deuxième inégalité, on note $A_k^c := \bigcup_{n\geq 1} A_n \setminus A_k$. notation un peu dangereuse

Si $\mu\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) < \infty$, alors, on a tout d'abord

$$\mu\big(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n^c)$$ en appliquant (*) aux A_k^c:

C'est également de dire :
équivalent à dire que

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) - \mu\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big) \leq \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) - \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$ ok

qui donne la deuxième inégalité.

2. $\mu\big(\limsup_{n\to+\infty} A_k\big) = \mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)$

Pour $k\in\mathbb{N}$, on a $\mu\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big) \leq \mu\Big(\bigcup_{n\geq k} A_k\Big) \leq \sum_{n\geq k} \mu(A_k)$.

Alors que la suite $\{\mu(A_n)\}_{n\geq 1}$ est $\boxed{\text{une suite de Cauchy}}$, on a naturellement $\sum_{k\geq n} \mu(A_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

ce n'est pas le bon argument. Il suffit de remarquer que la série converge, ce qui veut dire que la "queue" de la série tend vers zéro.

3. Note $A_q := \Big\{ x\in[0,1] \;\Big|\; \boxed{\text{il n'existe qu'un nombre fini de rationnels}}\ \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux tels que $\big|x-\frac{p}{q}\big| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \Big\}$

je ne comprends pas bien l'argument ici. Si tu fixes q, il n'y aura qu'un nombre fini de p tels que

Il est facile de calculer que $\mu(A_1)=1$, $\mu(A_q) = \varphi(q)\cdot\frac{2}{q^{2+\varepsilon}} < \frac{2}{q^{1+\varepsilon}}$ quand $q\geq 2$.

p/q est dans [0,1], et pour chaque x il n'y aura qu'un seul p qui fonctionnera.
Tu peux prendre pour A_q l'union des intervalles [p/q-1/q^{2+eps},p/q+1/q^{2+eps}]\cap [0,1]

Alors, $\sum_{q\geq 1} \mu(A_q) < +\infty$ car $\varepsilon > 0$.

En utilisant la proposition au-dessus, on a

$$\mu(\limsup_{q\to+\infty} A_q) = 0 .$$

C'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in [0,1] \mid$ il existe un nombre infini de rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers tels que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\}$ est μ-négliegeable, qui donne la proposition que on veut. ok

Ex 2. Si une telle mesure existe, il y a alors un $a \in \mathbb{N}^*$ tel que pour un $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mu(x) = \mu(x+a)$. Là, on a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(x+ka) = \infty$ où x est sélectionné pour $\mu(x) > 0$ ($\boxed{\text{un tel } x \text{ existe car } \mu \neq 0}$). C'est une contradiction !

en fait, dans la définition d'une mesure on n'a pas exclu la mesure nulle. Ce serait ici la seule solution.

Ex3 (Entropie d'une mesure discrète).

1. On appelle une mesure μ la mesure de probabilité si $\mu(E) = 1$.

2. Pour $\mu(E_j) \in [0,1]$, on a $-\mu(E_j)\ln(\mu(E_j)) \geq 0$, donc $H(\mathcal{P}) \geq 0$. ok

   Si $H(\mathcal{P}) = 0$, alors il existe un seule $i \in [\![1,N]\!]$ tel que $\mu(E_i) = 1$, pourquoi?
   et pour $j \in [\![1,N]\!]$, $j \neq i$, on a $\mu(E_j) = 0$.

3. $H(\mathcal{P}) = -\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - \frac{n-k}{n}\ln\frac{n-k}{n} = -\frac{k}{n}\ln k - (n-k)\ln(n-k) + \ln n$. ok

4. Il suffit de montrer l'inégalité au-dessous pour $x, y \in (0,1)$,

$$-x\ln x - y\ln y \geq -(x+y)\ln(x+y)$$

on veut une inégalité stricte

C'est facile parce que $x\ln x \leq x\ln(x+y)$ et $y\ln y \leq y\ln(x+y)$. il faut les inégalités strictes (x,y>0)

5. À cause de la question 4. $\boxed{\text{on sait que}}$ l'entropie maximale est

justifier

$$H(\mathcal{P}) = n \cdot \left(-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right) = \ln n$$

où $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_n\}$, $\# E_i = 1$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.

Ex4 (Sur l'intégrale de Riemann).

1. Pour une fonction en escalier (alors il exist une partition de I en un nombre fini d'intervalles $I = \bigsqcup_{k=1}^{K} I_k$, tels que chaque restriction $f|_{I_k}$ est constante, égale à une valeur $a_k \in \mathbb{R}$: $f = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot \mathbb{1}_{I_k}$), on défint sa intégrale de Riemann comme $\int_I f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot |I_k|$, où $|I_k|$ est le longueur de l'intervalle I_k.

Alors, pour $f, g \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$, on a $cf = \sum_{k=1}^{K} c a_k \cdot \mathbb{1}_{I_k}$, qui est encore une fonction en escalier. Donc $\int_I cf(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} c a_k \cdot |I_k| = c \cdot \int_I f(x)\,dx$. ok

Et si la partition de g est $I = \bigsqcup_{j=1}^{J} I_j$, on peut prend une partition
utiliser une autre lettre (J) pour les intervalles de g
plus fine: $I := \bigsqcup_{\substack{1 \le j \le J \\ 1 \le k \le K}} \boxed{I_k \cap I_j}$, et là, on obtenit une nouvelle fonction
mauvaises notations
$f+g$ en prennant cette partition. Donc $\int_I (f+g)(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (a_k + b_j) \cdot |I_k \cap I_j|$

$$= \sum_{k=1}^{K} a_k \sum_{j=1}^{J} |I_k \cap I_j| + \sum_{k=1}^{K} b_j \sum_{j=1}^{J} |I_k \cap I_j| = \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot |I_k| + \sum_{j=1}^{J} b_j \cdot |I_j| = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx.$$ ok

En conclusion, l'application $S : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est linéaire. ok

En plus, $\int_I (f-g)(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (a_k - b_j)\,|I_k \cap I_j| \le \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} \|f-g\|_\infty |I_k \cap I_j|$

$= \|f-g\|_\infty \cdot |I|$, donc l'application S est $|I|$-lipschitzienne. ok

2. Si $f_n \rightrightarrows f$ et $\tilde{f}_n \rightrightarrows f$, on a $\|f_n - \tilde{f}_n\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty + \|\tilde{f}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Et $f_n - \hat{f}_n$ est encore les fonctions en escalier. Ça implique que

$$\lim_{n\to+\infty} S(f_n) - \lim_{n\to+\infty} S(\hat{f}_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f_n) - S(\hat{f}_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f_n - \hat{f}_n) = 0$$

Donc ils ont la même limite. ok

3. Pour $f, g \in \mathcal{B}$, et deux suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ (donc $f_n + g_n \rightrightarrows f+g$)

$$S(cf) = \lim_{n\to+\infty} S(cf_n) = \lim_{n\to+\infty} c\cdot S(f_n) = c\cdot \lim_{n\to+\infty} S(f_n) = c\cdot S(f), \text{ où } c\in\mathbb{R}.$$

$$S(f+g) = \lim_{n\to+\infty} S(f_n+g_n) = \lim_{n\to+\infty} (S(f_n)+S(g_n)) = \lim_{n\to+\infty} S(f_n) + \lim_{n\to+\infty} S(g_n) = S(f)+S(g).$$

$$S(f-g) = \lim_{n\to+\infty} S(f_n - g_n) \leq \lim_{n\to+\infty} |I|\cdot \|f_n - g_n\|_\infty = |I|\cdot\|f-g\|_\infty.$$

Alors on voit que cette application est linéaire et $|I|$-lipschitzienne. ok

4. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $\hat{\mathcal{E}}(\alpha f) = \{|\alpha| p \mid p\in\hat{\mathcal{E}}(f)\}$, donc c'est facile de voir que $N(\alpha f) = |\alpha|\, N(f)$. ok

Et pour $f, g\in\mathcal{B}$, on a $\hat{\mathcal{E}}' := \{p_1+p_2 \mid p_1 \in \hat{\mathcal{E}}(f),\ p_2\in\hat{\mathcal{E}}(g)\} \subseteq \hat{\mathcal{E}}(f+g)$. justifier

$$\text{Alors, } N(f+g) = \inf_{p\in\hat{\mathcal{E}}(f+g)} S(p) \leq \inf_{p\in\hat{\mathcal{E}}'} S(p) = \inf_{\substack{p_1\in\hat{\mathcal{E}}(f)\\ p_2\in\hat{\mathcal{E}}(g)}} S(p_1+p_2) = \inf_{p_1\in\hat{\mathcal{E}}(f)} S(p_1) + \inf_{p_2\in\hat{\mathcal{E}}(g)} S(p_2)$$

$$= N(f) + N(g).$$

Donc c'est vraiment une semi-norme. ok

5. D'abord, pour tout $p\in\mathcal{E}$, on a $\boxed{N(p) = \|p\|_\infty}$ NON: N(p)=S(|p|)

Donc, si $N(f-f_n)\to 0$, où $f_n\in\mathcal{E}$, on sait que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $n(\varepsilon)$ tel que pour tout $m, k > n$, $N(f_m - f_k) = \|f_m - f_k\| < \varepsilon$. non

Ça implique $|S(f_m) - S(f_k)| = |S(f_m - f_k)| < \varepsilon\cdot|I|$. Alors, $S(f_n)$ convergent
attention à bien prendre les valeurs absolues
car la complété de $\mathbb{R}$.
car R est complet

l'inégalité à utiliser est, pour p\in E, |S(p)| \leq S(|p|) = N(p).

Pour deux suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $N(f-f_n) \to 0$, $N(f-\tilde{f_n}) \to 0$, alors

$$N(f_n-\tilde{f_n}) \leq N(f-f_n) + N(f-\tilde{f_n}) \to 0$$

Donc $S(f_n-\tilde{f_n}) \to 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(\tilde{f_n})$. ok

On a ~~déjà~~ montré que la limite est indépendente du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.