TD 2.1 Bon travail

日期: /

Louis

Ex 4. les (A_n) forment une suite croissante?

① Soit $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Soit $B_k = \bigcup_{n=1}^{k+1} A_k \setminus \bigcup_{n=1}^{k} A_n$, $B_0 = A_1$

Alors, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = X$, et $\forall m, n$, $B_m \cap B_n = \emptyset$,

et $\mu(B_k) < +\infty$, Donc on a $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) = +\infty$

$\forall M$, $\exists N$ tq $\sum_{n=0}^{N} \mu(B_n) > M$. Soit $A = \bigcup_{n=0}^{N} B_n$, donc

$M < \mu(A) < +\infty$ ok

② $\forall \{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, $A_i \subseteq X$, si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{card}(A_i) < +\infty$

$\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) < +\infty$, dans ce cas, $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 0 = m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

Si $\exists k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{card}(A_k) = +\infty$, alors $\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = +\infty$,

donc, $m(A_k) = +\infty$, $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = +\infty = m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

Soit $A_1 = \{a\} \subseteq X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, $\mathrm{card}(A_n) = 1$

Donc $\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = +\infty$, et $\mathrm{card}(A_i) = 1$ pour tout i,

$m(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = +\infty \neq 0 = \sum_{i=1}^{+\infty} m(A_i)$ ok $\square$.

③ (a) Évidement, si $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$

$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}$, (1) $\#A < +\infty$, $\#B < +\infty$, $\#A \cup B < +\infty$

(2) Si $\#A^c < +\infty$, $\#(A \cup B)^c = \#(A^c \cap B^c) < \#A^c < +\infty$

On sait $\forall a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{A}$.

Soit $a_1 \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in X \setminus \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$,

Alors, $\{a_k \mid k = 2n+1, n \in \mathbb{N}\} = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}} \{a_{2n+1}\} \notin \mathcal{A}$, c'est une union, pas une somme. Mais l'idée est OK. Expliquer pourquoi cet ensemble n'est pas dans A.

Donc, $\mathcal{A}$ n'est pas σ-algèbre.

(b) Soit $\{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, $A_i \subseteq \mathcal{A}$, et deux à deux disjoint.

Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\#A_i < +\infty$, $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$

Sinon, $\exists! k$, $\#A_k^c < +\infty$, $\#(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c < +\infty$, $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ ok

(c) $\Leftrightarrow$ X est indénombrable.

(1) si X est dénombrable, $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$

$m(\{x_n\}) = 0 \Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{x_i\}) = 0 \Rightarrow m(X) = 0$, contradiction!

(2) si X est indénombrable, ok

soit $\sigma(\mathcal{A}) = \{U \subseteq X : U$ a.p.d (au plus dénombrable) ou U^c a.p.d$\}$

il faudrait argumenter un peu pour montrer que l'ensemble ci-dessus fournit effectivement la tribu engendrée par A (et déjà, que c'est une tribu).

日期: /

soit $m(U) = \begin{cases} 0, & U \text{ a.p.d} \\ 1, & U^c \text{ a.p.d} \end{cases}$

Alors, $\sigma(A)$ est une tribu, et m est dénombrablement additive. $\square$ c'est une tautologie, par définition de \sigma(A).

Ex 3.

(1) $B \cap B = B \subseteq F$, $B \in F_B$.

$\forall A \in F_B$. $A^c \cap B = (A \cap B)^c \cap B$, $A \cap B \in F$, $(A \cap B)^c \in F$, $(A\cap B)^c \cap B \in F$

Donc $A^c \in F_B$.

$\forall \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq F$. $(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap B) \in F$

Donc $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F_B$, alors. F_B est une tribu. ok

(2) Non, par exemple :

Soit $X = Y = \{1, 0\}$ et une tribu $\mathcal{A} \{\phi, \{(1,0)\}, \{(0,1), (0,0), (1,1)\}, X \times Y\}$, (c'est bien une tribu)

mais $\pi(\mathcal{A}) = \{\phi, \{1\}, \boxed{\{1, 2\}}\}$, {0,1} ? c'est pas une tribu. ok

(3) $\{\{0\}, \cdots \{n\}\} \subseteq \{\{0\}, \cdots, \{n+1\}\}$, Donc, $F_n \subseteq F_{n+1}$,

Considère $\{\{0\}, \{2\}, \cdots, \{2n\}, \cdots\} = M$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{2n\} \in F_{2n}$,

Si $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est une tribu, on a $M \in \bigcup_{n\geq 0} F_n$,

mais $\forall n$, $M \notin F_n$, expliquer pourquoi donc, $M \notin \bigcup_{n\geq 0} F_n$,

Alors, $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ n'est pas une tribu. ok

(4) Soit $\mathcal{B} = \{M \in \sigma(\mathcal{C}) \mid \exists$ une suite dénombrable $D \subset \mathcal{C}$, tq $B \in \sigma(D)\}$

ok, bonne idée M=B?

① $E \in \mathcal{B}$, car, $\forall X \in \mathcal{C}$, $X \cup X^c \in E$. donc E\in \sigma({X}).

=

② $\forall A \in \mathcal{B}$, si $A \in \sigma(D)$, $D \subseteq \mathcal{C}$, D dénombrable,

on a bien $A^c \in \sigma(D)$, donc $A^c \in \mathcal{B}$ ok

③ $\forall \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, $A_i \in \sigma(D_i)$, $D_i \subseteq \mathcal{C}$, D_i dénombrable

Alors $\bigcup_{i=1}^{+\infty} D_i$ est dénombrable, et $\subseteq \mathcal{C}$,

Donc, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \sigma(\bigcup_{i=1}^{+\infty} D_n)$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{B}$,

Donc, $\mathcal{B}$ est une tribu, $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ ok

日期:

C et \beta sont des familles d'ensembles
\subset

et $C \in \beta$, donc $\sigma(C) \subseteq \beta$, donc $\sigma(C) = \beta$, ok

$\forall B \in \sigma(C)$, $B \in \beta$. il y a une suite dénombrable D

$B \in \sigma(D)$ ok

(5) $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\sigma(A))$,

on a $f^{-1}(\sigma(A))$ est une tribu, car :

① $X \in f^{-1}(\sigma(A))$

② si $B \in f^{-1}(\sigma(A))$, $\exists D \in \sigma(A)$, $B = f^{-1}(D)$

Alors $B^c = f^{-1}(D^c)$, $B^c \in f^{-1}(\sigma(A))$ ok

③ Si $\{A_i\} \subseteq f^{-1}(\sigma(A))$, $\exists D_i \in \sigma(A)$, $A_i = f^{-1}(D_i)$

Alors $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} D_i)$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in f^{-1}(\sigma(A))$

Donc, $\sigma f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\sigma(A))$ Montrons maintenant l'inclusion inverse

Soit $\beta = \{B \in \sigma(A), f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(A))\}$, $A \subseteq \beta$,

On a β est une tribu, car :

① $Y \in \beta$

② Si $B \in \beta$, $f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(A))$, $B \in \sigma(A)$

On a $B^c \in \sigma(A)$, $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \sigma(f^{-1}(A))$

donc $B^c \in \beta$ ok

③ Si $\{A_i\} \subseteq \beta$, $A_i \in \sigma(A)$, $f^{-1}(A_i) \in \sigma(f^{-1}(A))$

On a $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \sigma(A)$, $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(A_i) \in \sigma(f^{-1}(A))$

donc $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \beta$.

et, on a, $A \subseteq \beta$, donc, $\sigma(A) \subseteq \beta$, $\beta \subseteq \sigma(A)$, donc $\beta = \sigma(A)$

Alors, $f^{-1}(\sigma(A)) \subseteq \sigma f^{-1}(A)$ ok

Alors, $f^{-1}(\sigma(A)) = \sigma f^{-1}(A)$ ok