TD 1.2 Bon travail

Exercice 4.

1) Supposons $X=\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, $\forall i\in\mathbb{N}^*, A_i\in S$, $\mu(A_i)<\infty$.

On note $B_1=A_1$, $B_k=\bigcup_{i=1}^{k} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, donc $\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i = X$, et $\{B_i\}\subset S$, $\mu(B_i)<\infty$

alors $\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(B_i) = \mu(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i) = \mu(X)=+\infty$.

Il existe une $N\in\mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=1}^{N}\mu(B_i) \boxed{>\mu(M)}$ >M (attention, M est un nombre, pas un ensemble

Prenons $A=\bigsqcup_{i=1}^{N} B_i$, on a $\mu(M)<\mu(A)=\sum_{i=1}^{N}\mu(B_i)<+\infty$

2) Soit $\{A_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, on a $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \begin{cases} +\infty, & \text{il existe } i\in[\![1,n]\!], |A_i|=+\infty \\ 0, & \text{pour tout } i\in[\![1,n]\!], |A_i|<+\infty \end{cases} = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$

Alors m est ~~limité~~ additive.

Prenons $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}\subset X$, on a $+\infty = m(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\}) \neq \sum_{i=1}^{+\infty} m(\{x_i\})=0$

Alors m n'est pas dénombrablement additive. ok

3) (a) $\operatorname{card}(\phi)=0<+\infty$, $\operatorname{card}(X^c)=0<+\infty \Rightarrow \phi\in\mathcal{A}, X\in\mathcal{A}$

si $A,B\in\mathcal{A}$. 1° $|A|<+\infty, |B|<+\infty \Rightarrow |A\cup B|<+\infty$

2° $|A^c|<+\infty$ ou $|B^c|<+\infty$, sans perte de généralité.

$|A^c|<+\infty$, on a $|(A\cup B)^c| = |A^c\cap B^c|<+\infty$. Donc $A\cup B\in\mathcal{A}$

D'autre part, si $|A|<+\infty$, on a $|A\setminus B|<+\infty$. Sinon, $|A^c|<+\infty$

si $|B|<+\infty$, $|(A\setminus B)^c| = |(A\cap B^c)^c| = |A^c\cup B|<+\infty$.

si $|B^c|<+\infty$ $|A\setminus B| = |A\cap B^c|<+\infty$. Donc $A\setminus B\in\mathcal{A}$,

i.e. $\mathcal{A}$ est algèbre. ok

Supposons $X=\mathbb{Z}$, $A_i=\{i\}$, on a $A_i\in\mathcal{A}$, mais $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\notin\mathcal{A}$

alors $\mathcal{A}$ n'est pas σ-algèbre. ok

b) pour tout $\{A_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathcal{A}$, $\forall i\neq j$, $A_i\cap A_j=\phi$

Si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|A_i|<+\infty$, alors $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|<+\infty$, $m(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i)=0=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)$

S'il existe $j\in[\![1,n]\!]$ t.q. $|A_j^c|<+\infty$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$,

$A_i\subset A_j^c \Rightarrow |A_i|<+\infty$, donc $m(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i)=1=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, i.e. m est limité additive

=m(A_j)+\sum_{i\neq j} m(A_i)=1+\sum 0 = 1

c) m peut s'étendre à une mesure dénombrablement additive à une σ-algebre si et seulement si X est innombrable.
indénombrable

- Si X est dénombrable, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)$, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ $m(\{x_n\}) = 0$, mais $m(X) = 1$. Donc m n'est pas dénombrablement additive. ok

il faut justifier que c'est bien une tribu

- Si X est innombrable, $\sigma(\mathcal{A}) = \{U \subseteq X \mid U \text{ ou } U^c \text{ est dénombrable}\}$

On prend $m' : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{N}$. C'est le extension de m

$$U \text{ dénombrable} \longmapsto 0$$
$$\boxed{U \text{ innombrable}} \longmapsto 1$$ U tel que U^c est dénombrable

à $\sigma(\mathcal{A})$, et il est dénombrablement additive.

Exercice 3

1) 1° $\phi \in \mathcal{F} \Rightarrow \phi \cap B = \phi \in \mathcal{F}_B$, $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \cap B = B \in \mathcal{F}_B$ ok

2° Soit $X \in \mathcal{F}_B$, $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{F}$, $X = A \cap B$.

alors $B \setminus X = A^c \cap B$, on a $A^c \in \mathcal{F} \Rightarrow B \setminus X \in \mathcal{F}_B$ ok

3° Soit $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_B$ avec $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, t.q. $A_i \cap B = X_i$

alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cap B \in \mathcal{F}_B$ (car $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$) ok

en résumé, $\mathcal{F}_B$ est une tribu de B.

2) Suppos~~s~~ons $X = Y = \{1, 2\}$. $\mathcal{F} = \{\phi, X\times Y, A = \{(1,1)\}, A^c\}$

$\mathcal{F}$ est une tribu mais $\mathcal{F}_X = \{\pi(F) \mid F \in \mathcal{F}\} = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}\}$ n'est pas une tribu. ok

3) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, c'est car $\{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n\}\} \subset \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n+1\}\}$

On prend $A_i = \{2i\} \in \mathcal{F}_{2i} \subset \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$, mais $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{\{0\}, \{2\}, \cdots, \{2n\}, \cdots\}$

justifier $\notin \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$. Donc $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu. ok

4) On considère $\mathcal{B} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}) \mid \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \text{ dénombrable t.q. } B \in \sigma(\mathcal{D})\}$

1° $\phi \in \mathcal{B}$ (trivial), supposons $\mathcal{D} = \{A\} \subset \mathcal{C}$, alors $E \in \sigma(\{A\})$

donc $E \in \mathcal{B}$. ok

2° Soit $B \in \mathcal{B}$, muni $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, $B \in \sigma(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}$ dénombrable.
on a $B^c \in \sigma(\mathcal{D}) \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$. ok

3° Soit une suite $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, muni $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$
t.q. $\mathcal{D}_i$ dénombrable et $B_i \in \sigma(\mathcal{D}_i)$.
Notons $\mathcal{D} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}$ est dénombrable. $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$
pour tout $i \in \mathbb{N}$, $B_i \in \sigma(\mathcal{D}_i) \subset \sigma(\mathcal{D}) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \sigma(\mathcal{D})$
Donc $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}$. ok

en résumé, $\mathcal{B}$ est une tribu. Et $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$
Donc Alexandra a raison. ok

5) On a $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ montrons que f^{-1}(\sigma(A)) est une tribu

1° $\phi = f^{-1}(\phi) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$

2° Soit $B \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, alors il existe $A \in \sigma(\mathcal{A})$ t.q $B = f^{-1}(A)$
on a $A^c \in \sigma(\mathcal{A})$, $B^c = f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ i.e. ok

3° Soit $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, avec $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \sigma(\mathcal{A})$ t.q. $B_i = f^{-1}(A_i)$.
On a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \sigma(\mathcal{A})$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$

en résumé, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ est une tribu ~~i.e.~~ donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$

D'autre part, on note $\mathcal{B} := \{B \in \sigma(\mathcal{A}) \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}$
et on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. montrons que B est une tribu

1° $f^{-1}(\phi) = \phi \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, $f^{-1}(Y) = X \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$

2° Soit $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) = A \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$,
on a $f^{-1}(B^c) = A^c \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, i.e. $B^c \in \mathcal{B}$ ok

3° Soit $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, $f^{-1}(B_i) = A_i$
on a $f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$

en résumé, $\mathcal{B}$ est une tribu et $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$ utiliser aussi le fait que A\subset B pour déduire que B=sigma(A)
Alors $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$
Donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. ok