TD2 Bon Travail

EX 5

① Soit $\mathcal{C} = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R} \}$. alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Soit $A_n =]-n,n[\in \mathcal{C}$, $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \mathbb{R}$.

pour tout $A \in \mathcal{C}$, $f_*\lambda(A) = \lambda(f^{-1}(A)) = \frac{1}{2}\lambda(A)$

alors, $f_*\lambda = \frac{1}{2}\lambda$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ OK. Tu pourrais expliquer que, d'après le corollaire au Lemme de classe monotone, \lambda/2 est la seule mesure de Borel donnant le poids (b-a)/2 à chaque intervalle]a,b[.

② Soit $x \neq 0$. alors $]x,+\infty[\neq]2x,+\infty[$.

comme $f_*\mu = \mu$. on a $\mu(]x,+\infty[) = \mu(]2x,+\infty[)$. ok

donc $\forall a>0$, $\mu(]a,2a[) = 0$ ok

$\forall b>0$, $\mu(]2b,b[) = 0$. ici tu prends b<0 ?

fixe a et b.

on a $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}]2^n a, 2^{n+1}a[\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}]2^{n+1}b, 2^n b[\right)$

donc $\mu(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = 0$. $\mu(\{0\}) = \mu(\mathbb{R}) = \lambda < \infty$. car μ est finie

si $0 \in A$, on a $0 \in 2A$ et $\mu(2A) = \lambda = \mu(A) = f_*\mu(2A)$.

donc $\mu(B) = \begin{cases} \lambda & 0 \in B \\ 0 & 0 \notin B \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. OK. On appelle cette mesure \mu la mesure de Dirac en x=0, normalisée par \lambda.

③ Soit $f(x) = -x$, alors $f_*\lambda(]a,b[) = \lambda(]-b,-a[) = b-a = \lambda(]a,b[)$. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

OK, il faut argumenter un peu pour conclure que f_*\lambda sera forcément égale à \lambda sur tout borélien.

④ Soit $T = \{\mu\{x\} \mid x \in E\}$

On va montrer que $f_*\mu = \mu \Leftrightarrow f^{-1}(\{x\in E \mid \mu(\{x\}) = t\}) \subseteq \{x \in E \mid \mu(\{x\}) = t\}$

pour tout $t \in T$.

" $\Leftarrow$ " $\forall w \in E$, $\mu(\{w\}) = t \in T$, alors, $\mu(f^{-1}(\{w\})) = t$

$f_*\mu(\{w\}) = \mu(f^{-1}(\{w\})) = \mu(\{w\})$

" $\Rightarrow$ " $\forall t \in T$, $\forall x \in E$, t.q. $\mu(\{x\}) = t$

$f_*\mu(\{x\}) = \mu(f^{-1}(\{x\})) = \mu(\{x\}) = t$. donc, $f^{-1}(x) \in \{y \in E \mid \mu(\{y\}) = t\}$.

donc $f^{-1}(\{x\in E \mid \mu(\{x\}) = t\}) \subseteq \{x \in E \mid \mu(\{x\}) = t\}$

Cela ne suffit pas à décrire les mesures \mu invariantes. Tu ne t'es pas servi de la décomposition en cycles.

Ex 6

① $\forall (x_n)_{n\geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$. fabrique $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k}$.

alors, $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et borné $\left(0 < S_n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 1\right)$

donc $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe est $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ est bien définie.

$\forall x \in [0,1]$, supposons que $x_0 = 0$ et $x_n = \lfloor 3^n x - \sum_{k=1}^{n-1} 3^{n-k} x_k \rfloor$, $n \geq 1$.

$x_1 = \lfloor 3x \rfloor \in \{0,1,2\}$. et quand $n\geq 2$, $x_n = \lfloor 3(x - \sum_{k=1}^{n-2} 3^{n-1-k} x_k - \lfloor x - \sum_{k=1}^{n-2} 3^{n-1-k} x_k \rfloor) \rfloor \in \{0,1,2\}$.

donc $(x_n)_{n\geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, et c'est claire que $S((x_n)_{n\geq 1}) = x$. ok

② Soit $x_1 = 1$, $x_n = 0$, $n \geq 2$, et $y_1 = 0$, $y_n = 2$. $n \geq 2$.

alors $S((x_n)_{n\geq 1}) = 1 = S((y_n)_{n\geq 1})$. donc S n'est pas injective. ok

Supposons que $x \in [0,1]$ admet plusieurs antécédent par S.

$S((x_n)_{n\geq 1}) = S((y_n)_{n\geq 1}) = x$. où $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\geq 1} \neq (y_n)_{n\geq 1}$.

Suppose que le premier coefficients qui ne sont pas la même sont x_t et y_t, $t \in \mathbb{N}^*$

i.e. $\forall n < t$, $x_n = y_n$.

On peux supposer que $x_t > y_t$.

$S((x_n)_{n\geq 1}) \geq \sum_{n=1}^{t} \frac{x_n}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{t} \frac{y_n}{3^n} + \frac{1}{3^t}$ ils sont équivalent ssi $x_i = 0$, $\forall i > t$. et $x_t = y_t + 1$

$S((y_n)_{n\geq 1}) \leq \sum_{n=1}^{t} \frac{y_n}{3^n} + \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{t} \frac{y_n}{3^n} + \frac{1}{3^t}$ ils sont équivalent ssi $\forall i > t$, $y_i = 2$.

don $S((x_n)_{n\geq 1}) = S((y_n)_{n\geq 1}) \Leftrightarrow x_t = y_t + 1$, $\forall i > t$, $x_i = 0$, $y_i = 2$. ok

Si il y a encore une suite $(z_n)_{n\geq 1}$, t.q. $S((z_n)_{n\geq 1}) = x$.

Suppose que le premier coefficients qui ne sont pas la même entre (x_n) et (z_n) sont x_s et z_s, $s \in \mathbb{N}^*$

Comme $\forall i > t$, $x_i = 0$, $z_s < x_s$. Donc $z_s = x_s - 1$, et $\forall i > s$, $x_i = 0$, $z_i = 2$.

Si $s = t$, $(z_n)_{n\geq 1} = (y_n)_{n\geq 1}$.

Si $s > t$, $x_s = 0$, $z_s = -1$.

Si $s < t$ $x_t = 0$, $y_t = x_t - 1 = -1$.

Ainsi, il y a seulement deux antécédent de x par S. ok

$\forall x \in [0,1]$ admet deux antécédent par S, soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, t.q. $S((x_n)_{n\geq 1}) = x$ et $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, $x_n = 0$. Donc le nombre de x est dénombrable ssi le nombre de $(x_n)_{n\geq 1}$ est dénombrable.

Soit $A_n \subseteq \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \{ (y_k)_{k\geq 1} \mid \forall k > n,\ y_k = 0 \}$.

Donc A_n est dénombrable et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi dénombrable

Comme $(x_n)_{n\geq 1} \in A_N$, $(x_n)_{n\geq 1} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Donc D est dénombrable. OK

③ Fabrique $\Phi : \Sigma' \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$(x_n)_{n\geq 1} \longrightarrow \{ i \in \mathbb{N} \mid x_i = 2 \}$

Si $\Phi((x_n)_{n\geq 1}) = \Phi((y_n)_{n\geq 1}) = E$, $\forall i \in E$, $x_i = y_i = 2$, $\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus E$, $x_j = y_j = 0$.

$\forall F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, fabrique $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = \begin{cases} 2 & n \in F \\ 0 & n \notin F \end{cases}$, donc $\Phi((z_n)_{n\geq 1}) = F$.

Ainsi, Φ est bijective. OK Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, Σ' n'est pas dénombrable. OK

Soit $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in \Sigma'$, $(x_n)_{n\geq 1} \neq (y_n)_{n\geq 1}$ t.q. $S((x_n)_{n\geq 1}) = S((y_n)_{n\geq 1})$.

Suppose $k \in \mathbb{N}$ le plus petit nombre, t.q $x_n \neq y_n$. Suppose que $x_n > y_n$, donc $x_k = y_k + 2$

$S((x_n)_{n\geq 1}) - S((y_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq k} \frac{x_n - y_n}{3^n} \geq \frac{2}{3^k} - \sum_{n\geq k+1} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^k} > 0$

Donc $S|_{\Sigma'}$ est injective. Donc $S|_{\Sigma'} : \Sigma' \longrightarrow K$ est bijective. OK