De bonnes idées. Mais attention à la rédaction, les phrases sont parfois difficiles à comprendre.

Ex 1

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\{O \mid O \text{ est ouverte de } \mathbb{R}^2\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{O_1 \times O_2 \mid O_1, O_2 \text{ sont ouvertes de } \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ c'est facile OK

si O est ~~ouverte~~ ouvert de $\mathbb{R}^2$

prendre $x \in O$ $\exists O_x = (a,b) \times (c,d)$ t.q $x \in O_x \subset O$ ~~est~~ $a, b, c, d \in \boxed{\mathbb{Q}}$ OK

$O = \bigcup_{x \in O} O_x$

Mal dit. O_x est un "pavé rationnel". Ce que tu veux dire, c'est que la famille des pavés rationnels est dénombrable. Mais chaque pavé contient un ensemble indénombrable de points de R^2.

$O_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\boxed{O_x \text{ est au plus dénombrable}}$

alors $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

car l'union des O_x est, effectivement, une union sur une famille dénombrable (même si, au départ, l'ensemble des points x de O est indénombrable).

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ OK

Donc l'argument principal, c'est que tout ouvert O\subset R^2 est une union dénombrable de pavés, donc que O est dans la tribu B(R)\otimes B(R).

Ex 3

① <u>une example de mesure diffuse</u> : le mesure de lebesgue OK

<u>mesure purement atomique</u> :

$[\![1, n]\!]$ t.q $\forall i$ $\mu(\{i\}) = \frac{1}{n}$. OK

② Soit μ diffuse purement atomique.

$\text{supp}(\mu) = \{\omega \in \Omega \mid \mu(\{\omega\}) > 0\} = \emptyset$

$\Rightarrow \mu(\Omega) = 0$ OK

On dit que \mu est la mesure nulle.

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ $\mu(A) = 0$ OK

③ On suppose $C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ est un atome ponctuel}\}$

On défini :

$$\mu_a(A) = \begin{cases} \mu(A \cap C) & \text{si } A \cap C \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si } A \cap C \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases}$$

③ On suppose $C = \{w \in \Omega \mid w$ est un atome ponctuel$\}$

On défini :

$$\mu_a(A) = \begin{cases} \mu(A \cap C) & \text{si } A \cap C \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si } A \cap C \text{ n'est pas dénombrable} \end{cases}$$

pourquoi faire la différence?

$$\mu_d(A) = \begin{cases} \mu(A \setminus C) & \boxed{\text{si } A \cap C \text{ est dénombrable}} \\ \boxed{\infty \quad \text{si } A \cap C \text{ n'est pas dénombrable.}} \end{cases}$$

??? ???

je ne comprends pas

④ noté $M_m^{(n)} = \{ w \in A_n \mid \mu(w) > \frac{1}{m} \}$

Que vaut A_n ici? Un des éléments de la suite croissante (A_n) tel que A=\cup A_n ?

alors $\# M_m^{(n)} < \infty$, sinon $\bigcup_{w \in M_m^{(n)}} w \subset A_n$.

alors $\infty = \mu\left(\bigcup_{w \in M_m^{(n)}} w \right) \leq \mu(A_n) < \infty$

alors $\# M_m^{(n)}$ fini OK

noté $M_m = \{ w \in \Omega \mid \mu(w) > \frac{1}{m} \}$. alors $M_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_m^{(n)}$ OK

alors M_m dénombrable. pour $\forall m \in \mathbb{N}^*$ OK

noté $M = \{ w \in \Omega \mid \mu(w) > 0 \}$. alors $M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} M_m$

alors M est dénombrable OK $\Rightarrow$ des atomes pontuels sont dénombrable. OK

Ex 5

① pour montre S fermé, pendre une S $(X_i) \to X$

Alors $\forall r > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $|X_n - x| < \frac{r}{3}$ Alors $B(x, r) \supseteq B(X_n, \frac{r}{2})$

Donc $\mu(B(x,r)) \geq \mu(B(X_n, \frac{r}{3})) > 0$, $x \in S$, Donc S Fermé ok

② Car $\mathbb{R}^n / S$ ouvert, $\forall x \in \mathbb{R}^n / S$

À cause de $x \in S$ $\exists r_0$, tq $\mu(B(x, r)) = 0$

sur $r \leq r_0$ vrai alors a $r_x \leq r_0$ t.q $B(x, x_x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$

recouvrement

mais $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n/S} B(x, r_x)$ est ~~couverture~~ ouverte de $\mathbb{R}^n / S$

car $\mathbb{R}^n$ a base dénombrable en ensemble ouvert

(sous-)recouvrement

$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n/S} B(x, r_n)$ a ~~sous-couverture~~ dénombrable

noté $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ expliquer un peu comment on utilise la propriété de base dénombrable pour montrer que ce recouvrement peut être rendu dénombrable

Alors $\mu(\mathbb{R}^n / S) \leq \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})) = 0$. ok

③ $\mu(S/F) = \mu(S/F) + \mu(\mathbb{R}^n / S) = \mu(\mathbb{R}^n / F)$

$\forall x \in S/F \subseteq \mathbb{R}^n / F$, $\mathbb{R}^n / F$ ouverte, Alors $\exists r$, $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n / F$

Mais $x \in S$. Alors $\mu(\mathbb{R}^n / F) \geq \mu(B(x, r)) > 0$. OK

EX 6

① On a $\forall x \in E\ x \in \dot{x}$. 故 $\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E$

pour montre si $x \in \dot{y}$, alors $y \in \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$

Si $y \notin \dot{x}$. $\exists A \in \mathcal{A}$ $x \in A$ mais $y \notin A$

A^c dans le tribu, mais $y \in A^c$, $x \notin A^c$, Mais $x \in \dot{y}$ contradictoire

alors si $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \phi$. $\exists a \in \dot{x} \cap \dot{y}$. $a \in \dot{x}$ et $a \in \dot{y}$

Donc $x \in \dot{a}$. $y \in \dot{a}$. $\dot{x} = \dot{y} = \dot{a}$ OK

② On a $\forall x \in E$, $\dot{x} \in \mathcal{A}$

intersection

Car $\dot{x} = \bigcap A$ est une ensemble ~~réunion~~ dénombrable d'éléments de la tribu, donc c'est aussi un élément de la tribu

rappeler sur quels A on prend l'intersection

$\supseteq$ $x \in \dot{x} \Rightarrow B \subseteq \bigcup_{x \in B} \dot{x}$

pour tout x dans B, $\dot{x} \subseteq B \Rightarrow \bigcup_{x \in B} \dot{x} \subseteq B$

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{A}$. $B = \bigcup_{x \in B} \dot{x}$

Mieux expliquer l'argument: il n'y a en tout qu'un ensemble au plus dénombrable d'atomes distincts, donc B est une union au plus dénombrable d'atomes distincts (même si l'ensemble des points x peut être indénombrable)

$\dot{x} \in A$. $\mathcal{A}$ est ~~une réunion~~ au plus dénombrable.

une famille

③ $\mathcal{Y}_1 = \{\dot{x} \mid x \in E\}$ est ensemble infini.

sinon élément de $\mathcal{A}$ sont réunion de élément de $\mathcal{Y}$, $\mathcal{A}$ fini.

Si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable. Car ②

$\forall x \in E$. $\dot{x} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{Y}$ est dénombrable ok peux suppose $\mathcal{Y} = \{E_i \mid i \in I\}$, I infini dénombrable

et $E = \bigsqcup_{i \in I} E_i$, $\forall J_1 \subseteq I$, $J_2 \subseteq I$

$J_1 \neq J_2 \Rightarrow \bigsqcup_{j_1 \in J_1} E_{j_1} \neq \bigsqcup_{j_2 \in J_2} E_{j_2}$

donc c'est une injectif ~~map~~ $\mathcal{P}(I) \to A$ définis proprement cette application !

application injective

$\Rightarrow A$ n'est pas dénombrable car P(N) n'est pas dénombrable

(4) on a $\mathcal{F}_n = \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n\}\}$ \sigma? $\boxed{\subset \mathcal{P}\{[\![1,n]\!]\}} = 2^n$.

on ne comprend pas ce que tu veux dire

$\boxed{\text{est infini}}$, et F_n est croissance.

finie?

$\lim_{n \to +\infty} \# F_n = +\infty$.

donc, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ n'est pas fini et il est dénombrable.

dom par 3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ n'est pas une tribu ok