Bon devoir dans l'ensemble. Certains résultats ou raisonnements pourraient être un peu mieux expliqués.

Ex 1:

1) On va montrer que $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ est measurable

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n > t\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n\geq N}\{x : f_n > t+\frac{1}{k}\}$ est measurable ok

$\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n < t\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n\geq N}\{x : f_n(x) < t-\frac{1}{k}\}$ est measurable ok

2) $f :]0,1[\to\mathbb{R}$ une fonction measurable

On note $f_n :]0,1[\to\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} & x\in]0,1-\frac{1}{n}[\\ 0 & x\in [1-\frac{1}{n},1[\end{cases}$$

on voit bien $\forall x\in]0,1[$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. ok

et $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ est measurable, donc f' est measurable

1. Montrer que $A = \{B\subset Y ; f^{-1}(B)\in\mathcal{F}\}$ est une tribu.

① $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\in\mathcal{F} \Rightarrow \emptyset\in A$ ok

② Si $E\in A$ $f^{-1}(E)\in\mathcal{F}$ attention, la notation E est généralement réservée à l'ensemble total

$f^{-1}(E^c) = \{x\in X : f(x)\notin E\} = \{x\in X : f(x)\in E\}^c = f^{-1}(E)^c$

$\Rightarrow f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c\in\mathcal{F} \Rightarrow E^c\in A$ ok

③ Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ satisfie $E_i\in A$.

On va montrer $\bigcup E_i\in A$.

$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(E_i)\in\mathcal{F}$ comme $\mathcal{F}$ est un tribu ok #

2. (a) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B), B\in\mathcal{G}\}$ est un tribu.

① $\emptyset\in\mathcal{G} \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\in f^{-1}(\mathcal{G})$ ok

② Si $E\in f^{-1}(\mathcal{G})$ $\exists B\in\mathcal{G}$ $E = f^{-1}(B)$

$E^c = f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$ comme $B^c\in\mathcal{G}$

$\Rightarrow E^c\in f^{-1}(\mathcal{G})$ ok

③ Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ Satisfie $E_i\in f^{-1}(\mathcal{G})$

on note $E_i = f^{-1}(B_i)$ $B_i\in\mathcal{G}$.

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i)$ comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\in\mathcal{G}$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\in f^{-1}(\mathcal{G})$ ok

b) Si A est un tribu de X satisfie $f : (X,A)\to(Y,\mathcal{G})$ est mesurable. $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{G})\subseteq A$ donc $\sigma(f)$ est la plus petite.

c) $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(Y)$ montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))$:

comme $f^{-1}(\mathcal{B})\subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))$ on ~~peut savoir~~ doit avoir $\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))\subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))$

montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))\subseteq\sigma f^{-1}(\mathcal{B})$:

On note $\mathcal{M} = \{u\subset Y \mid f^{-1}(u)\in\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))\}$

on voit bien $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$

On peut montrer que $\mathcal{M}$ est un tribu : on le sait déjà, cf la question 1: M est la tribu image de \sigma(f^{-1}(B))

$f^{-1}(\bigcup_{i\geq1} u_i) = \bigcup_{i\geq1} f^{-1}(u_i)\in\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))$ si tous les $f^{-1}(u_i)\in\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))$

et $f^{-1}(u^c) = f^{-1}(u)^c$, donc $\mathcal{M}$ est un tribu

$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))\subseteq f^{-1}(\mathcal{M})$

mais par la définition $f^{-1}(\mathcal{M})\subseteq\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) \Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{B}))\subseteq\sigma(f^{-1}(\mathcal{B}))$ ok #

3. Claim : Si g est $\sigma(f)$ measurable.

$\forall x_1,x_2\in X$ si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $g(x_1) = g(x_2)$

Démo du claim : $g^{-1}(g(x_1)), g^{-1}(g(x_2))\in\sigma(f)$

on note $f(x_1) = f(x_2) = c$ alors $\forall T\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

si $c\in T$ $\{x_1,x_2\}\subseteq f^{-1}(c)\subseteq f^{-1}(T)$

$\Rightarrow x_1\in f^{-1}(T) \Leftrightarrow x_2\in f^{-1}(T)$ $\forall T\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

comme $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\begin{tikzcd} (X,\sigma(f)) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

comme g est measurable $x_1\in g^{-1}(g(x_1))\in\sigma(f)$, $x_2\in g^{-1}(g(x_2))\in\sigma(f)$

$g^{-1}(g(x_1))\cap g^{-1}(g(x_2)) = \emptyset$ ici je ne comprends pas ton raisonnement

$\Rightarrow$ il existe $T\in\sigma(f)$ $(g^{-1}(g(x_1)) = T)$

tel que $x_1\in T$ $x_2\notin T$ contraire. # ??

Rentre à la question ?? on commence par le cas où g est étagée

On definit $h : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\boxed{h = f\circ g^{-1}}$??? g n'est pas inversible !

comme g est étagée, on note $g = \sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ $\alpha_i\in\mathbb{R}$ est-ce l'écriture canonique de g? Les A_i forment-ils une partition?

$A_i\in\sigma(f)$ on définit h sur $\mathbb{R}$ $g^{-1}(a_i) = A_i$

comme $g : (X,\sigma(f))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est measurable $\Rightarrow A_i\in\sigma(f)$ ok

$\Rightarrow$ il existe un Borel set $B_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $f^{-1}(B_i) = A_i$.

$\Rightarrow f(A_i) = f(x)\cap B_i$

On defini $h(B_1) = a_1$ $h(B_2\setminus B_1) = a_2$ $\cdots$ $h(B_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k) = a_n$ donc h est une fonction étagée

on voit bien $h\circ f(A_i) = a_i$ Ce n'est pas clair. Il faut montrer que les B_i sont disjoints, si les A_i le sont

comme $\boxed{x_i\cap x_j = \emptyset \Rightarrow f(x_i)\cap f(x_j) = \emptyset \text{ pour } \forall i,j\in\mathbb{N}}$ Non $\Rightarrow f(x)\cap B_i\cap B_j = \emptyset$

$\Rightarrow$ le définition de h satisfie

$h(f(x_n)) = h(f(x)\cap B_n) = h(f(x)\cap(B_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)) = a_n$

et h est bien sur measurable par la définition. argument confus

On a fini le cas quand g est une fonctions étagée.

Pour le simple g :

On défini $g_n = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{n_i}\mathbb{1}_{A_{n_i}}$ $A_{n_i} = g^{-1}(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n})$ Attention, il faut bien indiquer 2 indices (n,i), pas un indice n_i. Que vaut a_{n,i}?

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction ~~étagée~~ qui converge pour une fonction étagée, il faut un nombre fini de termes

uniformément ver g, et $g_1\leq g_2\leq\cdots\leq g_n\leq\cdots$ pourquoi une suite croissante?

g_n satisfie $0\leq f-g_n\leq\frac{1}{2^n}$ Attention! g_n est proche de g, pas de f !

il exist un suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que. $g_n = h_n\circ f$.

On va montré que $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction croissantes $0\leq h_1\leq h_2\leq\cdots\leq h_n\leq\cdots$ il faut décrire plus clairement la construction de h_n

On voit bien $A_{n+1,2i}\sqcup A_{n+1,2i+1} = A_{n,i}$ ok

Par la claim on voit que $f(A_{n+1,2i})\cap f(A_{n+1,2i+1}) = \emptyset$

Par ailleur. $f(A_{n,i}) = f(A_{n+1,2i})\cup f(A_{n+1,2i+1})$

$h_{n+1}|_{\boxed{A_{n+1,2i}}} = h_n|_{A_{n+1,2i}}$ mais $h_{n+1}|_{A_{n+1,2i+1}} = h_n|_{A_{n+1,2i+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$ attention! h_n est définie sur les f(A_{n,i}), pas les A_{n,i}.

il existe une fonction $h : \mathbb{R}\to[0,+\infty]$ il faut mieux justifier que h_n converge.

$\{h_n\}$ converge simplement ver h. h est measurable

$h_n\circ f$ converge simplement ver $h\circ f$

main $h_n\circ f = g_n$ converge ver g donc $g = h\circ f$ ok

h satisfait $g = h\circ f$ #

4. a) $\sigma(f) = \{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$

$f(x) = x^2$ $\sigma(f) = \{f^{-1}(B) : B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

comme f est continue, $\sigma(f)\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si $x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x)\in B$

donc $f(-x) = f(x)\in B$ $-x\in f^{-1}(B)$ $\Rightarrow -f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f^{-1}(B) = -f^{-1}(B)$ expliquer le passage de l'inclusion à l'égalité

donc $\sigma(f)\subseteq\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$. ok

pour montrer que $\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}\subseteq\sigma(f)$, $\forall A\in\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.

il suffit de montrer que $f(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ non, ce n'est pas suffisant! Par exemple, si f était la fonction constante f(x)=0, on a bien f(A)\in B(R) pour tout borélien A, mais \sigma(f) est la tribu triviale {R,\emptyset}.

$f(A) = f(A\cap[0,+\infty))$ comme $f|_{[0,+\infty)}: [0,+\infty)\to[0,+\infty)$
est une bijection, f et $\boxed{f^{-1}}$ sont continues L'inverse de f_{| R_+}
$\Rightarrow f(A\cap[0,+\infty)) = \boxed{(f^{-1})}^{-1}(A\cap[0,+\infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ idem
comme $\boxed{f^{-1}}$ est continue donc measurable.

b) $(\mathbb{R},\sigma(f)) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

On a vu dans la question 3) que le fonction $g:(\mathbb{R},\sigma(f))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est measurable si et seulement si il existe une fonction $h:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ measurable telle que $g=h\circ f$.

$\Rightarrow g(x) = h\circ f(x) = h(x^2)$ l'ensemble des fonctions measurable est

$\{h(x^2) \mid h$ est une fonction measurable $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$

Oui, mais tu aurais pu remarquer qu'il s'agit exactement des fonctions boréliennes paires.

5. a) on va montrer $\sigma(f_i, i\in I) = \sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))$

il suffit de montrer que $f_i: Y\to Y_i$ est measurable sur l'espace $(X, \sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)))$

$\forall B\in\mathcal{B}_i$ $f_i^{-1}(B)\in f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ donc $f_i^{-1}(B)\in\sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))$

on va montrer $\sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)) \subseteq \sigma(f_i, i\in I)$

pour $\forall B\in\mathcal{B}_i$ $f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\in\sigma(f_i,i\in I)$ B comme f_i est measurable sur l'espace $(X,\sigma(f_i,i\in I))$, donc $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\subseteq\sigma(f_i,i\in I)$

$\Rightarrow \sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))\subseteq\sigma(f_i,i\in I)$ ok

b) $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ measurable $\Leftrightarrow \forall i\in I$ $f_i\circ f:(X,\mathcal{A})\to(Y_i,\mathcal{B}_i)$ est measurable.

le preuve de "⇒" est facile

Si toutes les fonction $f_i\circ f:(X,\mathcal{A})\to(Y_i,\mathcal{B}_i)$ est measurable

$\forall B\in\mathcal{B}_i$ $(f_i\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(f_i^{-1}(B)) \in\mathcal{A}$

$\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))\subseteq\mathcal{A} \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)))\subseteq\mathcal{A}$.

Comme la question 2. c) on a vu que

$\sigma(f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))) = f^{-1}(\sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))) = f^{-1}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{A}$

donc f est measurable.

implication inverse?

Ex 3:

1. On va montrer que l'ensemble $\{x\in E: \lim_{n\to+\infty} f(x) < +\infty\}$ est un ensemble measurable.

$\lim_{n\to+\infty} f(x)<+\infty \Leftrightarrow$ la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

donc $\{x\in E: \lim_{n\to+\infty} f(x)<+\infty\}$

$= \{x\in E: \forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n,m\in\mathbb{N}, n,m>N\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\}$

$= \bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2\\ n,m>N}}\{x\in E: |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$

C'est un ensemble measurable comme $\{x\in E: |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$ sont measurables. ok

2. a) On voit tous les boules ouverts dans l'espces sont l'ensemble d'un point seul ou $\mathbb{R}$ ok (tu pourrais mieux expliquer pourquoi)

Comme les ensemble ouverts ~~est~~ sont engendrés par les boules ouvertes $\Rightarrow$ tous les sous ensemble de $\mathbb{R}$ ~~est~~ sont ouvert.

$\Rightarrow$ la tribu borélienne est $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ok

le tribu engendre par les boules ouverts et fermé est

$\mathcal{A}=\{E\in\mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid E$ est dénombrable ou E^c est dénombrable$\}$ ok

on voit bien c'est un tribu contenant les boules

Comme tous les sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ peut s'écrit comme un union dénombrable des boules ouverts.

$\Rightarrow \mathcal{A}$ est le tribu engendre par les boules.

b) On note $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les ensemble ouvert dans X.

$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(X)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{U})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{U}))$

si $f^{-1}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{A}$ alors $\sigma(f^{-1}(\mathcal{U}))\subseteq\mathcal{A}$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}(\cancel{\mathbb{R}}))\subseteq\mathcal{A}$ X

f est measurable.

il suffit de montrer que pour tous ensemble ouvert V dans X $f^{-1}(V)\in\mathcal{A}$

mais $\boxed{f^{-1}(V) = \bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(V)}$ est measurable Parce que les $f_n^{-1}(V)$ sont measurable. #

expliquer cette formule