Bon travail, mais ça manque parfois d'explications.

Attention à ne pas mélanger les noms des différents indices.

# Exercice 3. Solution.

1) $\lim_{n\to\infty} \int_E |f-f_n| d\mu = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \int_E |f-f_n| d\mu < \varepsilon'$

$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, prenez $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \delta$ :

$$\int_E |f-f_n| d\mu < \varepsilon' = \varepsilon \cdot \delta \Rightarrow \mu(|f-f_n| > \varepsilon) < \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(|f-f_n| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow f_n \to f \text{ en mesure.}$$ OK

Le contre-exemple pour la réciproque :

Soit $E = [-1, 1]$, $f \equiv 0$, et

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ \\ n/2, & x \in ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ \end{cases}$$

je conseille de faire un dessin

Il est facile à vérifier que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu(|f-f_n| > \varepsilon) = 0$, mais

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} |f-f_n| d\mu = 1.$$

OK

#

Montrer que si \mu(E)<\infty et si f_n --> f p.p., alors f_n --> f en mesure.

2) $f_n \to f$ $\mu$-p.p. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$,

$$0 = \mu\left(\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| > \tfrac{1}{m}\}\right)$$ expliquer cette formule

$$\geq \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{x \in E \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} \{x \in E \mid |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}\right)$$ (car $\mu(E) < \infty$) ok

suite décroissante d'ensembles

$$\geq \lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in E \mid |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(|f-f_n|>\varepsilon) = 0.$$

**Le contre-exemple pour la réciproque :**

faire un dessin

Soit $E=[0,1]$, $f\equiv 0$, et :

$$f_{\frac{i(i-1)}{2}+j}(x) = \begin{cases} 1, & x\in[\frac{j-1}{i}, \frac{j}{i}] \\ 0, & x\notin[\frac{j-1}{i}, \frac{j}{i}] \end{cases}, \quad 0\leq j\leq i-1, i\in\mathbb{N}^*.$$

il est facile à vérifier que :

$$\forall \varepsilon>0, \forall n\geq \frac{i(i-1)}{2}, \mu(|f-f_n|>\varepsilon)\leq \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(|f-f_n|>\varepsilon)=0, \text{ mais}$$

$\forall x\in[0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. ok #

**3)** Si $f_n \to f$ en mesure,

$$\forall m\in\mathbb{N}^*, \exists N_m\in\mathbb{N}, \forall n>N_m, \mu(|f-f_n|>\frac{1}{m})\leq\frac{1}{m^2}$$ OK

Posons $A_m = \{x\in E \mid |f-f_{N_m}|>\frac{1}{m}\}$, alors

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty,$$ par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mu(\limsup_{m\to\infty} A_m) = \mu(\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geq m} A_k) = 0.$$

$$\Rightarrow \mu(E) = \mu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{k\geq m} A_k^c) = \mu(\{x\in E \mid \cancel{\forall m\in\mathbb{N}^*}, \exists k\in\mathbb{N}, \forall n\geq k, |f(x)-f_{N_n}(x)|\leq\frac{1}{m}\})$$

que déduit-on de cette égalité?

attention, les indices m et n sont les mêmes !

$$\Rightarrow f_{N_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} f \quad \mu\text{-p.p.}$$ #

ok.

4)

a) Par 3), on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$ $\mu$-p.p.

Car $\forall k\in\mathbb{N}$, $|f_{n_k}|\leq|g|$ $\mu$-p.p., donc $|f|\leq|g|$ $\mu$-p.p.

b) $\forall \varepsilon>0$,

continuité uniforme ① $\exists\delta>0$, $\forall A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)<\delta$, $\int_A|g|\,d\mu\leq \varepsilon/4$;

converge ce en mesure ② $\exists N$, $\forall n>N$, $\mu(|f-f_n|>\varepsilon/2\mu(E))<\delta$

Posons $A_n=\{x\in E \mid |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon/2\mu(E)\}$.

Alors $\forall n>N$, on a :

$$\int_E|f-f_n|\,d\mu=\int_{A_n}|f-f_n|\,d\mu+\int_{A_n^c}|f-f_n|\,d\mu$$

uniforme continuité de l'intégrale

$$\leq\int_{A_n}2|g|\,d\mu+\mu(A_n^c)\cdot\frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$$

$$\leq 2\cdot\varepsilon/4+\varepsilon/2=\varepsilon.$$ ok

Donc $\int_E|f-f_n|\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. #

**Exercice 4.** Solution.

Si $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\int_X |f| d\mu < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) = \sum_{n\geq 1} n \cdot \mu(\{n \leq |f| < n+1\})$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n \leq |f| < n+1\}} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu < \infty ;$$

Si $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$, ~~car~~ et $\mu(X) < \infty$,

on a
$$\int_X |f| d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n \leq |f| < n+1\}} |f| d\mu$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \mu(\{n \leq |f| < n+1\})$$
$$= \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) + \mu(\{|f| \geq 0\})$$
$$= \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) + \mu(X) < \infty$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu)$. OK //

Si $\mu(X) = \infty$, "$\Rightarrow$" est vrai mais "$\Leftarrow$" est faux,

par exemple : $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}.$$

$\sum_{n \geq 1} \mu(|f| \geq n) = 0$, mais $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu = \infty$. OK #

**Exercice 5.** Solution.

a) Considerons $f_1, \cdots, f_{\boxed{n}}$ une famille finie de $\mathcal{L}_1(\mu)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\int_E f_i d\mu < \infty$, par td4.1 ex 3.1,

$\lim_{\boxed{n} \to \infty} \int_{\{|f_i| > \boxed{n}\}} |f_i| d\mu = 0$, c'est-à-dire $\left\{\int_{\{|f_i| > \boxed{n}\}} |f_i| d\mu\right\}_{\boxed{n} \in \mathbb{N}}$

que la suite de nombres posiifs

est décroissance et avoir une limite de 0. Donc

Attention, il ne faut pas utiliser la même lettre (n) pour indiquer le nombre de fonctions f_i, et le seuil dans l'intégrale, qui converge vers +\infty.

On a donc n suites décroissantes, qui convergent vers 0. Le maximum ce des n suites converge aussi vers zéro.

$$\lim_{C\to\infty} \sup_{i\in[\![1,n]\!]} \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu = \lim_{\cancel{n}\to\infty}\Big(\max_{1\leq i\leq n}\Big(\int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| d\mu\Big)\Big) = 0.$$

c

Alors $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est uniformément intégrable. #

b) Si $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable :

Vérifiez (i) : si $\sup_{i\in I} \int_E |f_i| d\mu = \infty$, alors

$\forall k\in\mathbb{N}, \exists i_k\in I, \int_E |f_{i_k}| d\mu \geq 2k\cdot\mu(E)$.

donc $\int_{\{|f_{i_k}|\geq k\}} |f_{i_k}| d\mu \geq k\cdot\mu(E)$ car l'intégrale sur le complémentaire est < k\mu(E)

$\Rightarrow \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq k\}} |f_i| d\mu \geq k\cdot\mu(E)$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq k\}} |f_i| d\mu = \infty$, contradiction.

Donc $\sup_{i\in I} \int_E |f_i| d\mu < \infty$ ; OK

Vérifiez (ii) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i| d\mu < \varepsilon/2$.

Prenons $\eta = \varepsilon/2C$, alors $\forall A\in\mathcal{A}, \mu(A) < \eta$,

$\forall i\in I, \int_A |f_i| d\mu \leq C\cdot\eta + \varepsilon/2 = \varepsilon$ // expliquer un peu plus cette inégalité (qui est OK)

Si les deux conditions sont satisfaites :

$\forall i\in I, \forall n\in\mathbb{N}$, soit $a_{i,n} = \mu(\{|f|\geq n\})$.

Par exercice 4, on sais que $\forall i\in I, \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f|\geq n\}) = 0$

car $\forall i\in I$, $f_i \in \mathcal{L}_1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $\mu(E) < \infty$.

Si $\exists \varepsilon > 0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, \exists i\in I, a_{i,n}\geq\varepsilon$, Tu veux montrer que les a_{i,n} convergent uniformément p/r i. Tu raisonnes par l'absurde.

alors $\int_E |f_i| d\mu \geq n\varepsilon$. Prenons $n\to\infty$, et

on a $\sup_{i\in I} \int_E |f_i| d\mu = \infty$, c'est une contradiction.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall i \in I, a_{i,n} \leq \varepsilon$. Donc les a_{i,n} convergent bien uniformément.

Par la deuxième condition, on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall i \in I, \mu(\{|f_i| \geq n\}) \leq \eta$.

donc $\forall i \in I, \int_{\{|f_i| \geq n\}} |f_i| d\mu \leq \varepsilon$ ok

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|f_i| \geq n\}} |f_i| d\mu = 0$. ok

#

c) $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_i)_{i \in I}$ sont uniformément intégrables, par (b),

on a : (1) $\sup_{i \in I} \int_E |f_i| d\mu < \infty$ et $\sup_{i \in I} \int_E |g_i| d\mu < \infty$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta$,

$\forall i \in I, \int_A |f_i| d\mu < \varepsilon/2, \int_A |g_i| d\mu < \varepsilon/2$

donc : (i) $\sup_{i \in I} \int_E |f_i + g_i| \leq \sup_{i \in I} \int_E |f_i| + \sup_{i \in I} \int_E |g_i| < \infty$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta$,

$\forall i \in I, \int_A |f_i + g_i| d\mu \leq \int_A |f_i| d\mu + \int_A |g_i| d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Rightarrow (f_i + g_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable. OK

#