Bon travail

TD 6.2

Ex1 On prouve d'abord le cas particulier

① $f = 1_A$. et A est fermé

$f_n = \max\{1 - n d(x, A), 0\}$.

f_n est clairment une fonction continue.

$\{f_n \neq f\} = \{x : 0 < d(x, A) < \frac{1}{n}\}$. ces ensembles forment une suite décroissante

tout x dans A^c ?

On remarque que pour ~~tout~~ X. On a $d(X, A) > 0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \downarrow \{f_n \neq f\} = \emptyset$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{f_n \neq f\} = 0$ ici, \mu = \lambda

Donc pour tout $\varepsilon > 0$. existe une fonction f_n

t.q. $\mu\{f_n \neq f\} < \varepsilon$ ok

② $f = 1_A$. A est borélien

En raison de la ~~régulière~~ régularité de μ.

On peut trouver un ensemble fermé $A' \boxed{\supset} A$. qui satisfait $\mu(A' - A) < \frac{\varepsilon}{2}$

la régularité donne un fermé A' sous-ensemble de A, tel que..

Et ~~car~~ d'après ① on peut trouver f qui satisfait

$\mu\{f \neq 1_{A'}\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Et car $\{f \neq 1_A\} \subset \{f \neq 1_{A'}\} \cup (A' - A)$

donc on a $\mu\{f \neq 1_A\} < \mu\{f \neq 1_{A'}\} + \mu(A' - A) = \varepsilon$ ok

③ $0 \leq f \leq 1$. et f est une fonction borélienne.

On supposer $A_n = \left\{ x : \frac{2k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2k}{2^n} \text{ pour certains } k \in [\![1, 2^{n-1}]\!] \right\}$ Donc A_n est borélien

D'un autre point, le ~~k~~ n ème. bit du binaire de l'élément de A_n

est 1. A_n est l'ensemble des points x tels que le n-ieme bit de f(x) est égal à 1.

Alors evidemment on a $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 1_{A_n}$ ok

Car ② on peut trouver f_n continue.

. qui satisfait $\{f_n \neq 1_{A_n}\} < \frac{\varepsilon}{2^n}$ et f_n(x) \in [0,1] pour tout x

On remarque que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ converge uniformément

donc $f' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ est continue. ok

Et $\{f' \neq f\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \neq 1_{A_n}\}$

donc $\mu\{f' \neq f\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$ ok

④ $-k \leq f < k$. et f est une fonction borélienne.

On supposer $A_n = \{x : n-1 \leq f(x) < n\}$ $n \in [\![-k+1, k]\!] = T$

$$f = \sum_{n \in T} f 1_{A_n} = \sum_{n \in T} \left[\left(f 1_{A_n} - n + 1 \right) + n - 1 \right]$$

$$= -k + \sum_{n \in T} g_n \quad \left(g_n = f 1_{A_n} - n + 1 \;, 0 \leq g_n \leq 1 \right)$$

pour tout $n \in T$ on peut trouver f_n qui satifait

$\mu\{f_n \neq g_n\} < \frac{1}{2k+2} \varepsilon$

on ~~supposer~~ pose $f' = -k + \sum_{n\in I} f_n$.

alors $\mu\{f' \neq f\} \leq \sum_{n\in I} \mu\{f_n \neq g_n\} = \varepsilon$

⑤ f est une fonction borélienne.

Evidemment. il y a un k. qui satisfait $\mu\{|f| \geq k\} < \frac{\varepsilon}{2}$ ok

Et ~~car~~ d'après ④ on peut trouver f' qui satisfait $\mu\{f_1 \neq f 1_{\{|f|<k\}}\} < \frac{\varepsilon}{2}$

Alors $\mu\{f' \neq f\} \leq \mu\{|f| \geq k\} + \mu\{f_1 \neq f 1_{|f|<k}\} = \varepsilon$ ok

$\square$.

Ex2. $E_n = \{x : |f(x)| \leq n\}$ $\quad \lim E_n^c = \emptyset$. $\exists N \quad \mu(E_N^c) \leq \frac{\varepsilon}{4}$

donc $f 1_{E_N} \in \mathcal{L}^1$. $\Rightarrow \exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $g_n \in L^1$ et g_n continue t.q g_n converge vers $f 1_{E_N}$ dans L^1

on peut extraire une sous-suite t.q. $\Rightarrow \exists (g_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$, $g_{n_k} \to f 1_{E_N}$ P.P ok

Par Egoroff. $\exists M$. satisfait $\mu(M^c) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et $g_{n_k} \rightrightarrows f 1_{E_N}$ sur M.

que veux-tu dire? on ne sait pas si g_{n_k} conv. uniformément sur tout l'intervalle

$\boxed{\text{supposer } \lim_{k\to\infty} g_{n_k} = g}$. g continue. Et pour $\forall x \in M \cap E_N$. $g(x) = f(x)$

Et $M \cap E_n$ mesurable. et $\mu[(M \cap E_n)^c] \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $\exists K_\varepsilon$ compact, qui satisfait $K_\varepsilon \subset M \cap E_N$ et $\mu(M \cap E_N - K_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

par la régularité de \mu

donc $\mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et $f = g$ sur K_ε $\quad \square$

Ex 3

1

(i) On prouve d'abord. Si $a+b+c=1$. On a $ax+by+cz \geqslant x^a y^b z^c$

On utilise Si $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha m+\beta n \geqslant m^\alpha n^\beta$

$$ax+by = (a+b)\left(\frac{a}{a+b}x+\frac{b}{a+b}y\right) \geqslant (a+b)\, x^{\frac{a}{a+b}}\, y^{\frac{b}{a+b}}$$

$$(a+b)\, x^{\frac{a}{a+b}}\, y^{\frac{b}{a+b}} + cz \geqslant x^a y^b z^c$$ ok

(ii) Ensuite, On prouve. Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ et f, g, h mesurable

On a $\int |fgh|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$ ok

Car (i) On a $\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y+\frac{1}{r}z \geqslant x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} z^{\frac{1}{r}}$ $(x, y, z > 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q+\frac{1}{r}z^r \geqslant xyz$$

On supposer $x=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ $y=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ $z=\frac{|h(x)|}{\|h\|_r}$

$$\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}+\frac{1}{r}\frac{|h(x)|^r}{\|h\|_r^r} \leq \frac{f(x)g(x)r(x)}{\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r}$$

Donc $\int - - - \, d\mu \leqslant \int - - \, d\mu$.

Donc $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq \frac{\int fgh\, d\mu}{\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r}$.

Donc $\int |fgh| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$ ok

iii) $f*g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

$|f(x-y)\, g(y)| = \left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q \right)^{\frac{1}{r}} \left(|f(x-y)|^p \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(|g(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$

$|f*g(x)| \leq \int |f(x-y)\, g(y)| \, dy$

noter que le membre de droite pourrait être infini pour certaines valeurs de x, auquel cas le membre de gauche peut être mal défini

$\leq \left[\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int |f(x-y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left[\int |g(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$

$= \left[\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right]^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}$

pour tout x, $|f*g(x)|^r \leq \left[\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right] \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$ ok

on intègre
le 1er facteur de droite par rapport à x

$\iint |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \, dx = \iint |g(y)|^q |f(x-y)|^p \, dx \, dy$

Il faut dire que tu utilises Fubini-Tonnelli ici.

$= \int g(y)^q \|f\|_p^p \, dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q$

on intègre l'inégalité par rapport à x

$\Rightarrow \|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

cette inégalité est valable pour la fonction |f|*|g|, qui majore la fonction | f*g |

$\Rightarrow f*g < \infty$ p.p ok

②

On définit la correspondance T de L^p à L^p

$$k \longmapsto af*k+g$$

(i) T est bien défini

$f \in L^1$ $k \in L^p$ $\xRightarrow{1+\frac{1}{p}=1+\frac{1}{p}}$ $f*k \in L^p$ ok (car ①)

(ii) T est un application contractante

$$\|(af*k_1+g)-(af*k_2+g)\|_p = a\|f*(k_1-k_2)\|_p$$

$$\leq a\|f\|_1 \|k_1-k_2\|_p \quad . \quad 0<a\|f\|_1<1$$

il existe donc un unique point fixe. ok

Ex 4

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx$$

$$\hat{f}'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ix\, f(x)\, e^{ixy}\, dx$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} (-x f(x))\, e^{ixy}\, dx$$

$$= -i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{ixy}\, dx$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, d f(x)$$

$$= -i \left[e^{ixy} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d e^{ixy} \right]$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, iy\, e^{ixy}\, dx$$

$$= -y \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx = -y\, \hat{f}(y)$$ ok

$\hat{f}'(y) + y\,\hat{f}(y) = 0$ $\quad \hat{f}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2 + c}$

cette EDO du 1er ordre admet comme unique solution les multiples de la gaussienne

$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$ done $c = 0$

$\hat{f}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ok

Ex5 1

on supposer $f_n = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} & 0 \le x \le n \\ 0 & x > n \end{cases}$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} = e^{-x} x^{\alpha-1}$

Et on a $0 \le f_n \le e^{-x} x^{\alpha-1}$ (car $u+1 \le e^u$) ok

donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} = \begin{cases} T(\alpha) & . \alpha > 0 \\ +\infty & . \alpha \le 0 \end{cases}$ ok

Par le TCD? On peut appliquer le TCD si la fonction limite est intégrable sinon, il faut raisonner un peu plus.

calculer T(\alpha) en termes de la fonction \Gamma d'Euler

2 De même, On a

$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x} = \begin{cases} +\infty & . \alpha \geqslant 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1} & . \alpha < 1 \end{cases}$

Même remarque: le TCD s'applique si la fonction limite est intégrable