TD 6.2

Attention, il y a beaucoup d'erreurs, mais des bonnes idées aussi.

日期: 3 / 31

Ne pas confondre le symbole "supérieur ou égal" et le symbole "admet comme sous-ensemble"

① Théorème de Lusin

Ici il s'agit de la mesure de Lebesgue. Note-la \lambda

Dém: Commencer par le cas $f = \mathbb{1}_A$, A borélien de $[0,1]$

$\forall \varepsilon > 0$, Soit F fermé. $A \boxed{\geq} F$ et $\mu(F) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$

ici il faut dire que tu utilises la régularité de \lambda

Soit $F_n = \{x \mid x \in F,\ d(x, F^c) \leq \frac{1}{n}\}$, On a $F_1 \geq F_2 \geq \cdots$

points de F proches du bord de F?

et $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \boxed{\mu(F \cap F^c) = 0}$, donc $\exists n_0$, $\mu(F_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Non, le bord d'un fermé peut avoir une mesure positive

Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in F \setminus F_{n_0} \\ n\, d(x, F^c), & x \in F_{n_0} \\ 0, & x \in F^c \end{cases}$

Cette construction ne marche pas, par exemple si F est un ensemble de Cantor de mesure >0. Ce Cantor est d'intérieur vide, donc chaque point de F est à distance nulle de F^c, donc F_n=F pour tout n.

C'est claire que $f \in C([0,1], \mathbb{R})$

et $\mu(f(x) \neq \mathbb{1}_A) \leq 1 - \mu(F \setminus F_{n_0}) - \mu(A^c) \leq \varepsilon$

et on a $f \leq \mathbb{1}_A$.

ici tu as approché 1_A par une fction continue, sauf sur un petit ensemble. C'était déjà fait dans le cours (preuve du Thme 5.19, 2.).

Pour f fonction borélienne, positive, on sait $\exists \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonction étagé. t.q.

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g_n = f$. pour tout $x \in [0,1]$

Le reste de la preuve est ok

On sait que pour tout fonction étagé g.

g peut s'écrire comme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$

Donc. f peut s'écrire comme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$ avec. $a_n > 0$,

et pour $\mathbb{1}_{A_n}$, on a $h_n \in C([0,1], \mathbb{R})$, t.q.

$\mu(h_n \neq \mathbb{1}_{A_n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$, on considère $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n h_n \to h$ μ.p.p.

par thm d'egoroff. on a $\boxed{\sum a_n h_n \rightrightarrows h}$

la conv. unif. est vraie sauf sur un petit ensemble

donc $\boxed{h \in C([0,1], \mathbb{R})}$, et $\mu(h \neq f) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(h_n \neq \mathbb{1}_{A_n}) \leq \varepsilon$.

Non, car la conv. uniforme n'est pas vraie sur tout [0,1]

Pour une fonction f générale. considère f^+ et f^-.

On peut avoir h^+ et h^-, soit $h = h^+ - h^-$

h est bien continué et on a

$\mu(h \neq f) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

② Soit $E_n = \{x \mid f(x) \geq n\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \phi$, donc $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N$,

日期: /

$\mu(E_N) < 3$, donc $f \mathbb{1}_{E_N^c} \in \mathcal{L}^1$

On sait que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $\mathcal{L}^1$. On a $(g_n) \subseteq C[a,b]$. t.q. $\| f \mathbb{1}_{E_N^c} - g_n \| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, donc on a $(g_{n_k}) \to f \mathbb{1}_{E_N^c}$ μ-p.p., par thm d'egoroff, $\exists A_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, t.q. $g_{n_k} \to f \mathbb{1}_{E_N^c}$ sur A_ε^c

on peut extraire une sous-suite telle que

uniformément

Soit $K_\varepsilon = A_\varepsilon \cup E_N$, on a $f|_{K_\varepsilon}$ continue et $\mu(K_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$.

PROBLEME ici. On veut que f soit continue sur un compact, dont le complémentaire est de petite mesure.

③ (1) Soit $a+b+c=1$, on a $u^\alpha v^{(1-\alpha)} \leq \alpha u + (1-\alpha) v$.

$\forall u \geq 0$, $v \geq 0$, $\alpha \in]0,1[$,

donc. $x^a y^b z^c = x^a (y^{\frac{b}{b+c}} z^{\frac{c}{b+c}})^{b+c} \leq a x + (b+c) y^{\frac{b}{b+c}} z^{\frac{c}{b+c}}$

$\leq a x + b+c (\frac{b}{b+c} y + \frac{c}{b+c} z) \leq a x + b y + c z$

Suppose $x = \frac{|f(x)|^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha}$. $y = \frac{|g(x)|^\beta}{\|g\|_\beta^\beta}$. $z = \frac{|h(x)|^\gamma}{\|h\|_\gamma^\gamma}$

si $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$,

On a $\left(\frac{|f|^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|g|^\beta}{\|g\|_\beta^\beta}\right)^\beta \left(\frac{|h|^\gamma}{\|h\|_\gamma^\gamma}\right)^\gamma$

$\leq \frac{1}{\alpha} \frac{|f|^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{|g|^\beta}{\|g\|_\beta^\beta} + \frac{1}{\gamma} \frac{|h|^\gamma}{\|h\|_\gamma^\gamma}$

Aprés l'intégrale, on a.

$$\frac{\int |fgh|}{\|f\|_\alpha \|g\|_\beta \|h\|_\gamma} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1. \quad (*)$$

Donc. $\int |fgh| \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta \|h\|_\gamma$. OK

Pour $f * g$. $|f(x-y) g(y)|$

$= (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$

Par $(*)$. on a.

non non non

$$\int |f(x-y) g(y)| \leq \| (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\boxed{\frac{1}{r}}} \|_r \cdot \| (|f(x-y)|^{\boxed{p})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}} \|_{\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}} \cdot \| (|g(y)|^{\boxed{q})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}} \|_{\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}}$$

ici tu intègres sur y?

ici x est un paramètre fixé, et les normes sont obtenues en intégrant sur y maintenant tu intègres aussi su x

日期: /

Donc $\|f*g\|_r^r \leq \int [(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy)\cdot(\int |f(x-y)|^p dy)^{\frac{r}{p}-1} \cdot (\int |g(y)|^q dy)^{\frac{r}{q}-1}] dx$ ok

$= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \iint |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy\, dx$

(Fubini) $= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \cdot \int |g(y)|^q \cdot \int |f(x-y)|^p dx\, dy$

$= \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$ ok

Donc $\|f*g\|_r^r \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r < +\infty$, $f*g \in L^r$,

Donc, $f*g < +\infty$ μ.p.p ok

(2) Soit $\varphi : L^p \to L^p$ $(k \longmapsto af*k+g)$.

$\forall k, l \in L^p$, on a

$\|(af*k+g)-(af*l+g)\|_p$

$= |a| \, \|f*k - f*l\|_p = |a| \, \|f*(k-l)\|_p$.

par (1), soit $r=p$, on a $\|f*(k-l)\|_p \leq \|f\|_1 \|k-l\|_p$.

Donc $\|\varphi(k)-\varphi(l)\|_p \leq \|k-l\|_p$. il suffisait d'écrire cette inégalite avec k et l=0, puis d'utiliser la linéarité de \phi

par thm de "contractive mapping"

φ a un point invariable, soit h. "point fixe"

on a $\varphi(h)=h$, $af*h+g=h$ OK. Comme l'application \phi est linéaire, on pourrait aussi se servir des "séries de Neumann" sur l'espace de Banach L^p (hors programme)

(4) On sait $(\hat{f}(y))' = \int_{-\infty}^{+\infty} ix f(x) e^{ixy} dx$.

$= -i \int_{-\infty}^{+\infty} (-x f(x)) e^{ixy} dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{ixy} dx$

$= -y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx = -y \hat{f}(y)$.

Donc, $(\hat{f}(y))' = -y \hat{f}(y)$.

Alors, c'est claire que $\hat{f}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2+c}$. Il faut justifier: les seules solutions de cette EDO du 1er ordre sont les multiples de la gaussienne

On a $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, on a $c=0$,

Donc, $\hat{f}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ok

(5) $\boxed{((1-\alpha x)^\alpha)' \ (\text{sur } \alpha)} = (1-\alpha x)^\alpha (\ln(1-\alpha x) - \frac{\alpha x}{1-\alpha x})$

On a $\alpha x < 1$, donc, c'est claire $((1-\alpha x)^\alpha)' < 0$

si tu veux dériver p/r \alpha, écris explicitement d/d\alpha (...)=

Je ne comprends pas pourquoi tu regards (1-ax)^a, alors qu'on veut (1-x/n)^n

Il faut refaire le calcul de la dérivée plus proprement, et montrer que (1-x/n)^n est croissant par rapport à n.

日期: /

donc, $\boxed{(1-nx)^n \leq (1-(n+1)x)^{(n+1)}}$??

Par TCM,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{[0,n]}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 0 \\ \Gamma(\alpha), & \alpha > 0. \end{cases}$$ ok

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbb{1}_{[0,n]}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha < 1. \end{cases}$$ ok

日期: /