Cours analyse semiclassique. 3/11/2020

Thm : si $a \in S(m)$ elliptique ; alors pour $h \leq h_0$,

$\exists\, b \in S(m^{-1})$ t.q $a \#_h b = b \#_h a = 1$.

$\longrightarrow Op_h^W(a) \cdot \underline{Op_h^W(b)} = Op_h^W(b)\, Op_h^W(a) = Id$

$\longrightarrow$ Espaces de Sobolev semiclassiques associés à des fonctions d'ordre.

- $a \in S(1) \Longrightarrow Op_h(a)$ bornée $L^2 \to L^2$.

  m fct d'ordre, non bornée $\Longrightarrow Op_h(a)$ agit comment sur L^2 ? Domaine ?

- On se focalisera sur $m \geq 1$ et $m(\rho) \xrightarrow[|\rho| \to +\infty]{} +\infty$

Ex : $P = -h^2 \Delta = Op_h(p)$, $p(x,\xi) = |\xi|^2 \in S(\langle \xi \rangle^2)$
$= S(1 + |\xi|^2)$

②

$$\mathrm{Dom}\,(1-h^2\Delta) = \underbrace{H^2(\mathbb{R}^d)} = \{u\in L^2,\ \Delta u\in L^2\}$$

H^2 = image de $(1-\Delta)^{-1}$

$$H^2 = (1-\Delta)^{-1} L^2(\mathbb{R}^d)$$
$$= (C-\Delta)^{-1} L^2 \qquad (C>0 \text{ quelconque})$$
$$= (1-C^{-1}\Delta) L^2$$

Si $v = (1-\Delta)^{-1} u$, $u\in L^2 \Rightarrow v\in L^2$

$\Rightarrow \Delta v \in L^2$? $\quad (1-\Delta)v = u$

$$-\Delta v = \underline{u-v} \in L^2.$$

$$H^2 = \underbrace{(1-h^2\Delta)^{-1}} L^2$$

$\longrightarrow$ norme adaptée : $\|u\|_{H^2} = \|v\|_{L^2} = \|(1-h^2\Delta)u\|_{L^2}$

$u = (1-h^2\Delta)^{-1} v \in H^2 \Rightarrow$

(si $h=1 \to$ norme usuelle sur H^2

$h<1 \to$ norme $\|\ \|_{H^2_h}$, qui

est équivalente à $\|\ \|_{H^2_{h=1}}$

On a fabriqué H^2, en agissant par l'opérateur

$$\mathrm{Op}_h(\underbrace{1+|\xi|^2}) = 1 - h^2\Delta$$

↳ fonction d'ordre. telle que $(1+|\xi|^2)$ est elliptique pour cette fonction d'ordre.

⟶ généraliser à ttes fonction d'ordre

<u>Déf</u> : m fonction d'ordre. On <u>choisit</u> g_m un symbole <u>elliptique</u> dans $S(m)$. On définit alors 1 norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall u \in \mathcal{S}, \quad \|u\|_{H_h(m)} := \|\underbrace{\mathrm{Op}_h(g_m)u}_{\in \mathcal{S}}\|_{L^2}$$

On définit l'espace $H_h(m)$ comme la fermeture de $\mathcal{S}$ pour cette norme. On appelle $H_h(m)$ un espace de Sobolev semiclassique généralisé.

<u>Lemme</u> : Si on choisit un autre symbole elliptique $g_m' \in S(m)$, alors pour $h < h_0$, la norme correspondante $\|\mathrm{Op}_h(g_m')u\|_{L^2}$ est équivalente à la précédente, $\frac{1}{C}\|\mathrm{Op}(g_m)u\|_{L^2} \leq \|\mathrm{Op}(g_m')u\|_{L^2} \leq C\|\mathrm{Op}(g_m)u\|_{L^2}$ avec C indépdt de h

<u>Preuve:</u> $\|u\|'_{H(m)} = \|Op_h(g'_m)u\|_{L^2}$

g_m elliptique $\Rightarrow$ $Op_h(g_m)$ inversible si $h \leq h_0$

$Op(g_m)^{-1} \in \Psi_h(m^{-1})$

$$\Rightarrow \underbrace{Op_h(g'_m)}_{\Psi_h(m)} \underbrace{Op(g_m)^{-1}}_{\Psi_h(m^{-1})} \in \Psi_h(1)$$

$$\|u\|'_{H(m)} = \| \underbrace{Op(g'_m)\, \underbrace{Op(g_m)^{-1}\,}}Op_h(g_m)\, u\|_{L^2}$$

$$\leq \|Op(g')Op(g)^{-1}\|_{L^2 \to L^2} \|Op(g)u\|_{L^2}$$

$$\leq C\, \|Op(g)u\|_{L^2}$$

<u>Prop°</u> Supposons que 2 fonctions d'ordre satisfont $\underline{m \leq m'}$

Alors on a $S(m) \subset S(m')$, ce qui implique

$\underline{H_h(m') \subset H_h(m)}$.

$\exists\, \underline{C > 0}$ tq, $\forall h \leq h_0$, $\forall u \in H_h(m')$,

$$\|u\|_{H_h(m)} \leq C\|u\|_{H_h(m')}$$

ex. $\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H_h^2}$

ex: $1 \leq \langle \xi \rangle^2$,

$\Rightarrow H(\langle \xi \rangle^2) \subset L^2 = H_h(1)$

$H_h^2 = H^2$

Prop° m fonction d'ordre, $a \in S(m)$, $h \leq h_0$.

Alors $Op(a) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ s'étend en un opérateur borné $H_h(m) \longrightarrow L^2$.

Pr/ $g \in S(m)$ elliptique $\longrightarrow \|u\|_{H_h(m)} = \|Op_h(g)u\|_{L^2}$.

Pour $h \leq h_0$ $Op(g)^{-1} \in \Psi_h(m^{-1})$, donc $\underline{Op(a)\,Op(g)^{-1} \in \Psi_h(1)}$.

$\forall u \in H_h(m)$, on peut définir l'act° de $Op_h(a)$ sur u par

$$Op_h(a)u = \underbrace{Op(a)\,Op(g)^{-1}}_{\text{borné } L^2 \to L^2}\underbrace{Op(g)u}_{\in L^2} \in L^2$$

$$\|Op(a)u\|_{L^2} \leq \|Op(a)\,Op(g)^{-1}\|_{L^2 \to L^2}\underbrace{\|Op(g)u\|_{L^2}}_{\|u\|_{H_h(m)}}$$

- $m \geq 1 \Rightarrow H_h(m) \subset L^2$

Si $a \in S(m)$, à valeurs réelles $\Longrightarrow A = Op_h^W(a) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est symétrique p/r au produit scalaire sur L^2.

$m = 1$: $Op_h(a)$ borné et autoadj.

$m \geq 1$: on peut choisir $\underline{H_h(m)}$ comme domaine de A.

A est-il essentiellement autoadjoint sur ce domaine ?

Critère : $A : D(A) \longrightarrow L^2$ est autoadjoint si A est symétrique et 6

$\mathrm{Ran}(A+i) = \mathrm{Ran}(A-i) = L^2$

Propⁿ $m \geq 1$. Supposons que $a \in S(m)$ à valeurs réelles, tel que $(a+i)$ est elliptique dans $S(m)$.

Alors pour h assez petit, $Op_h^w(a) : H_h(m) \longrightarrow L^2$ est autoadjoint.

Pr : on sait que $a \in S(m)$ est réel $\Rightarrow A$ est symétrique.

ellipticité de $a \pm i \Rightarrow$ pour $h \leq h_0$, $\left.\begin{array}{l} Op_h(a)+i \\ Op_h(a)-i \end{array}\right|$ sont des bijections $H_h(m) \longrightarrow L^2$.

· Thm. On considère 1 fonction d'ordre $m(\rho) \longrightarrow +\infty$ quand $|\rho| \to \infty$.

Si $a \in S(m)$ est elliptique, alors pour $h \leq h_0$, l'opérateur $Op_h(a)$ est non borné sur L^2, de domaine $H_h(m)$, et il a un spectre purement discret sur L^2.

Rem : si $m \geq 1 \Rightarrow H_h(m) \subset L^2$ de façon dense pour la topologie de L^2.

Pr du Thm : ellipticité de $a \Rightarrow Op(a)^{-1} \in \Psi_h(m^{-1})$ pour $h \leq h_0$.

$\Rightarrow Op(a)^{-1}$ compact $\Rightarrow$ spectre discret, s'accumulant en 0. $\mathrm{spec}(Op(a)) = \{\mu_j^{-1}\}$, $\{\mu_j \neq 0,\ \mu_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\}$

Ex : op de Schrödinger avec potentiel confinant.

$V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} +\infty$, avec croissance polynomiale (ainsi que pour les dérivées de V)

[$V \in S(\tilde{m})$
↳ fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^d$.

$\Rightarrow m(\rho) = \langle\xi\rangle^2 + \tilde{m}(x)$ f° d'ordre sur $\mathbb{R}^{2d}$, avec $m(\rho) \xrightarrow[|\rho|\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow$ Pour $C>0$ assez grand, $|\xi|^2 + V(x) + C$ est elliptique dans $S(m)$

$\Rightarrow$ $Op(a) = -h^2\Delta + V(+C)$ a 1 spectre discrets et non borné.
$(+C)$

$R_h(z) = (Op_h(a) - z)^{-1}$ famille d'opérateurs bornés $L^2 \to L^2$
$z \in R_h \subset \mathbb{C}$ l'ensemble résolvant pour $Op_h(a)$.

Corollaire : $m \geq 1$, $a \in S(m)$,
$z \in \mathbb{C}$ tq $(a - z) \in S(m)$ est elliptique. Alors pour $h \leq h_0$, z est dans l'ensemble résolvant de $Op_h(a)$. De plus $(Op_h(a) - z)^{-1}$ admet pour symbole $r(z;h) = (a-z)^{-1} + O(h^2) \in S(m^{-1})$

$|a - z| \geq \frac{1}{C}$

Pr) $(a - z) \# (a-z)^{-1} = 1 + 0h + r_2(z;h)$, $r_2 \in h^2 S(1)$.

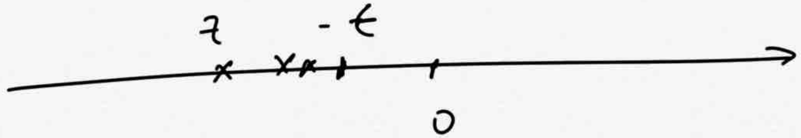
Prop : ($\leq$ de Gårding faible)

Supposons que $a \in S(1)$ satisfait $a \geq 0$. Alors, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, h_\epsilon > 0$ tq, $\forall h \leq h_\epsilon$, l'opérateur $Op_h(a)$ est autoadjoint et satisfait $Op_h(a) \geq -\epsilon I$.

$$\underline{Op_h(a+\epsilon)} \geq 0.$$

Pr $\forall z \leq -\epsilon$, $(a-z)$ elliptique dans $S(1) \Longrightarrow$ on peut inverser $(Op(a)-z)$ pour h assez petit, $h \leq h_z$.

A montrer : la valeur h_z peut être choisie uniformément p/r à $\{z \leq -\epsilon\}$



$\longrightarrow \exists\, h_\epsilon$ tq $Op_h(a-z)$ sera inversible $\forall h \leq h_\epsilon$, $\forall z \leq -\epsilon$.

$$\Rightarrow (a-z) \# \frac{1}{(a-z)} = I + \underbrace{r_2(z;h)}_{\in h^2 S(1)}$$

Les semi-normes de r_2 sont uniformes p/r $z \leq -\epsilon$.

$\partial^\alpha_\xi (a-z) = \partial^\alpha_\xi a$. indép. de z. $\quad \partial^\alpha_\xi \dfrac{1}{(a-z)}$

$$\partial^\alpha \frac{1}{(a-z)} = \frac{1}{(a-z)} \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\beta^1+\dots+\beta^k=\alpha} C_{\vec{\beta}} \prod_{j=1}^{k} \left((a-z)^{-1} \partial^{\beta_j} a\right)$$

(à montrer par récurrence).

$\Rightarrow$ le membre de droite est borné par

$$\frac{|\partial^\alpha a|}{(a-z)^2} + \frac{|\partial^\beta a|}{(a-z)^3} + \dots + \frac{|(\partial a)^k|}{(a-z)^{k+1}}, \quad \underline{\text{uniforme p/r à}}\ z \leq -\epsilon$$

$$\forall z \leq -\epsilon, \quad \frac{1}{(a-z)^j} \leq \underline{\frac{1}{(a+\epsilon)^j}}$$

$$\Rightarrow \|Op_h(r_2)\|_{L^2 \to L^2} \leq Ch^2, \ \underline{\underline{\forall z \leq -\epsilon}}, \ \forall h \in (0,1].$$

$\Rightarrow$ $\underline{\exists h_\epsilon}$, $\underline{\forall h \leq h_\epsilon}$, $\underline{\forall z \leq -\epsilon}$ $(I + Op_h(r_2))$ est inversible d'inverse unif^t borné.

$\longrightarrow$ $(Op(a) - z)$ est inversible d'inverse

$$Op(a-z)^{-1} = Op((a-z)^{-1}) \circ (I + Op(r_2))^{-1}$$

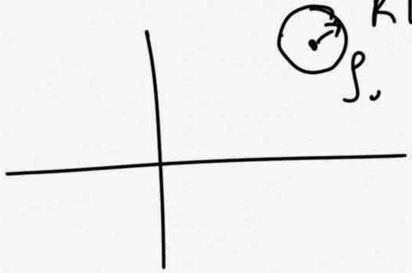
$\longrightarrow$ $(-\infty, -\epsilon] \in$ ensemble résolvant de $Op(a)$, $\forall h \leq h_\epsilon$.

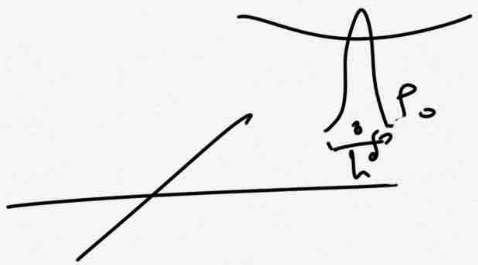
Classes de symboles "exotiques"

Déf° $\delta \in [0, \frac{1}{2})$, fonction d'ordre m.

$$S_\delta(m) = \Big\{ a(h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) ;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \exists C_\alpha,\ \forall h \in (0,1], \ \sup_\rho |\partial^\alpha a(\rho; h)| \leq C_\alpha \underbrace{m(\rho)} \underbrace{h^{-|\alpha|\delta}} \Big\}$$

- extension de $S(m)$, autorise les symboles à être de + en + singuliers lorsque $h \to 0$.
- ex : $a(\rho; h) = \chi\left(\frac{\rho - \rho_0}{h^\delta}\right)$, $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$





Prop° Cas $m = 1$. $\Rightarrow$ Le calcul symbolique (dév^t asympt. du Π de Moyal) et le théorème de C-V s'étend à la classe $S_\delta(1)$. Le développement asymptotique $a \# b$ a pour petit paramètre effectif $\underline{h^{1-2\delta}}$.

($\Rightarrow \delta < \frac{1}{2}$ nécessaire).

Preuve : $a(h) \in S_\delta(1) \longrightarrow \tilde{a}(\rho;h) := a(h^\delta \rho; h)$ est dans la classe $S(1)$.

$$\partial_\rho^\alpha\left[a(h^\delta \rho)\right] = \underbrace{h^{\delta|\alpha|}\underbrace{(\partial_\rho^\alpha a)(h^\delta \rho)}_{\leq C_\alpha h^{-\delta|\alpha|}}}$$

$$\underbrace{a_1 \#_h a_2}_{} \xleftrightarrow[\text{rescaling }(*)]{} \tilde{a}_1 \underbrace{\#_{h^{1-2\delta}}}_{} \tilde{a}_2$$

$$a_1 \#_h a_2 = a_1 a_2 + \frac{i}{2} h \{\underbrace{\partial a_1}_{h^{-\delta}}, \underbrace{\partial a_2}_{h^{-\delta}}\} + \sum_{j\geq 2} c_j h^j \underbrace{a_1 \overleftarrow{D}^j}_{h^{-j\delta}} \underbrace{\overrightarrow{D}^j a_2}_{h^{-j\delta}}$$

$$h^{1-2\delta} \qquad + \sum \qquad h^{(1-2\delta)j}.$$

- $U_{h^{1/2}}$ dilatation unitaire sur L^2

$$U_{h^\delta}\, \underbrace{Op_h^W}_{}(a)\, U_{h^\delta}^{-1} = \underbrace{Op^W_{h^{1-2\delta}}}_{}(\tilde{a}) \qquad \text{borné dans } L^2$$

$\tilde{a} \to \in S^1$

- valeur $\delta = \frac{1}{2}$ est "critique"

$a_1, a_2 \in S_{1/2}(1) \longrightarrow a_1 \# a_2$ est bien défini, mais $\in S(1)$

n'admet plus de dévt asymptotique $\quad a_1 \#_h a_2 \longleftrightarrow \tilde{a}_1 \#_{h^0} \tilde{a}_2$

Défi Classe de symboles critique

$h \in (0,1]$ param. de Planck.

$\tilde{h} \in (0,1)$ 2e petit paramètre, indépendant de h.

$\tilde{h} = \frac{1}{C}$, C grande constante " " .

$$\tilde{S}_{1/2}(1) = \left\{ a(h,\tilde{h}) \in C^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}, \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty} \leq C_\alpha \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{|\alpha|/2} \right\}$$

Prop. Le calcul symbolique et le thm de C-V s'étendent à la classe $\tilde{S}_{1/2}$, avec un paramètre effectif $\tilde{h}$.

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right| \in \tilde{S}_{1/2} \quad a_1 \# a_2 = a_1 a_2 + \sum_j c_j h^j D^j a_1 D^j a_2$$

$$h^j \cancel{\left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{j/2}} \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{j/2}$$

$$\boxed{\tilde{h}^j}$$

- $\underline{a_1 \in \tilde{S}_{1/2}}$, $\underline{a_2 \in S(1)}$

$\longrightarrow \widehat{a_1 \#_h a_2} \in \tilde{S}_{1/2}(1)$ admet 1 dév^t en puissances de $\underline{(h\tilde{h})^{1/2}}$

Pr: changt d'échelle

$\tilde{a}(\rho) = a((h\tilde{h})^{1/2}\rho) \in S(1)$ $\quad \widetilde{a_1 \#_h a_2} = \tilde{a}_1 \#_{\tilde{h}} \tilde{a}_2$ $\quad Op_h(a) = Op_{\tilde{h}}(\tilde{a})$

· Inégalité de Gårding forte.

Théorème $a \in S(1)$ satisfaisant $a \geq 0$. Alors $\exists\, C_0 > 0, h_0 > 0$ tq $\forall\, h \leq h_0$ $\quad Op_h^w(a) \geq -C_0 h$.

$-\varepsilon \quad 0 \quad -Ch$

Pr/ construire la résolvant $(Op(a) - z)^{-1}$ pour $z \leq -C_0 h$, où $C_0 > 0$ est choisie assez grande.

$\longrightarrow \quad z \leq -\frac{h}{\tilde{h}}$, avec $\tilde{h} > 0$ assez petite, indépdt de h.

. étudier les dérivées $\partial^\alpha \frac{1}{(a-z)}$.

$$\underline{\left|\frac{1}{a-z}\right| \leq \frac{1}{|z|}} \quad , \forall\, z < 0, \ \forall\, \rho \in \mathbb{R}^{2d} \qquad \text{car } a(\rho) \geq 0.$$

$$\partial^\alpha\left(\frac{1}{a-z}\right) \rightsquigarrow \left(\frac{|\partial^\beta a|}{(a-z)} \leq C_\beta \frac{1}{|z|}\right) \qquad z = -ch$$

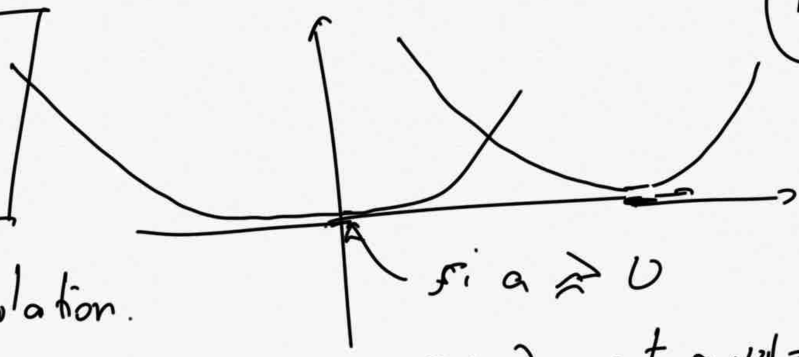
$$\longrightarrow \left|\partial^\alpha\left(\frac{1}{a-z}\right)\right| \leq C_\alpha \frac{1}{(a-z)} \frac{1}{|z|^{|\alpha|}} \qquad \frac{1}{h^{|\alpha|}} \ (\notin S_{1/2})$$

13

En fait $a \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{|\partial a(\xi)| \leq \sqrt{2\|\partial^2 a\|_{L^\infty} a(\xi)}}$$

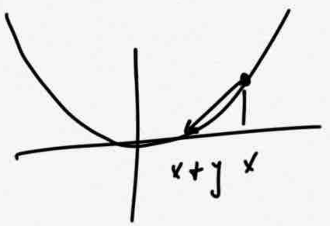
inégalité d'interpolation.



si $a \gtrsim 0$

$\Rightarrow \partial a$ est aussi $= 0$

ex : sur $\mathbb{R}$, $a(x) = c \cdot x^2$



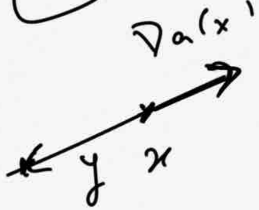
$$\partial a = 2cx$$

$$\partial^2 a = 2c \qquad |\partial a(x)| \leq \sqrt{2 \cdot 2c \cdot cx^2} = 2c|x|$$

$$|2cx|$$

$$\cdot \quad a(x+y) = a(x) + \langle y, \partial a(x)\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle \partial^2 a(x+ty)\, y, y\rangle\, dt$$

prend $y = -\lambda \partial a(x)$ pour $\lambda > 0$



$$\langle y, \nabla a(x)\rangle = -\lambda \|\nabla a(x)\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda \|\nabla a(x)\|^2 \leq a(x) + \frac{\lambda^2}{2} \|\partial^2 a\|_{L^\infty} |\nabla a(x)|^2$$

On choisit $\lambda = \dfrac{1}{\|\partial^2 a\|_{L^\infty}} \longrightarrow$

(14)

$$\Rightarrow |z|^{1/2}\,|Da(x)| \leq C\sqrt{z}\,\sqrt{a(x)} \leq C\,(a+|z|)$$

$$X\,Y \leq X^2 + Y^2$$

$$\boxed{\frac{|\partial a(x)|}{(a-z)} \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{C}{|z|}$$

$\to$ amélioré l'estimé

$$|z| \geq Ch \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|z|}} \leq \frac{1}{\sqrt{Ch}} = \sqrt{\frac{\tilde{h}}{h}}$$

si $\tilde{h} = \frac{1}{C}$

$$\boxed{\frac{|\partial a(\beta)|}{(a-z)} \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}}$$

$$|\beta| \geq 2 \quad \boxed{\left|\frac{\partial^\beta a}{(a-z)}\right| \leq \frac{C}{|z|}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left|\partial^\alpha \frac{1}{(a-z)}\right| \leq C_\alpha \frac{1}{(a-z)}\,\frac{1}{|z|^{|\alpha|/2}}}$$

$\Rightarrow$ si $z \leq -\frac{h}{\tilde{h}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{|z|\,(a-z)^{-1}}_{} \in S_{1/2}(1)$.

$S(1)$

$$\longrightarrow (a-z)\,\#_h\,\frac{1}{(a-z)} = \frac{(a-z)}{|z|}\,\#\,\underbrace{\frac{|z|(a-z)^{-1}}{S(1)}} = 1 + \underbrace{r_2(z,h,\tilde{h})}, \quad r_2 \in \frac{1}{|z|}(h\tilde{h})\,S_{1/2}\ \ c\,h\tilde{S}_{1/2}^{2}$$

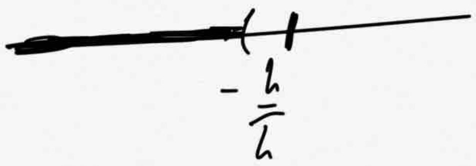
La borne sur $\|Op_h(r_n)\|$ est uniforme p/r à

$z \in (-\infty, -\tilde{h}/h) \Rightarrow \exists\, \tilde{h}_0, h_0, \ \forall \tilde{h} \le h_0, \ \forall h < h_0,$

$Op(a - z)$ est inversible

$\Rightarrow z \notin \mathrm{spec}(Op_h(a))$.

$$\Rightarrow Op(a) \ge -\frac{\tilde{h}}{h}$$



pour $\tilde{h} = \tilde{h}_0 = \frac{1}{C_0}$ $\quad Op_h(a) \ge -C_0 h$, $\forall h \le h_0$.

$\square$

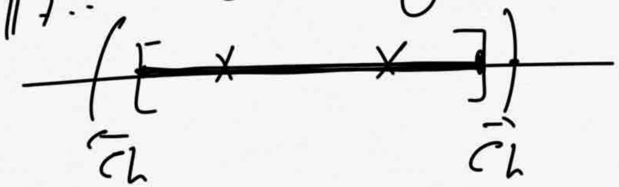
· __Rem:__ On ne peut en général pas avoir $Op_h^w(a) \ge 0$, si $a \ge 0$.

· __Corollaire__ $a \in S(1)$ réelle $\Rightarrow \exists\, C_a > 0, h_0 > 0$ tq

$\forall h \le h_0,$

$$\inf_\rho a(\rho) - C_a h \le Op_h^w(a) \le \sup_\rho a(\rho) + C_a h$$

$\|Op(a)\| \le \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{C}\|a\|_{L^\infty} + h^{1/2}\|\partial a\| + \dots$



$\|Op(a)\|_{L^2 \to L^2} \le \|a\|_{L^\infty} + C_a h$

Preuve: $a_-(\rho) := a(\rho) - \inf(a) \geq 0$

$\Rightarrow \quad Op(a_-) \geq -Ch$

$\Rightarrow \quad Op(a) - (\inf a)I \geq -Ch$

$a_+(\rho) = \sup(a) - a(\rho) \geq 0$

$\square$.

- -

Rem: $\|Op(a)\|_{L^2\to L^2} \leq \|a\|_{L^\infty} + Ch$ marche aussi si a est à val complexes.

Résolvante $\longrightarrow$ calcul fonctionnel sur les O.P.D. ($Op(a)$ autoadjoint)

but: définir et étudier les fonctions d'opérateur.

- $Op(a) \longrightarrow Op(a)^n = Op(a^n) + \ldots$

$\longrightarrow (Op(a) - z)^{-1}$

Ran(a)

$\times z$

$\|(Op(a) - z)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\operatorname{Im} z|}$ car $Op(a)$ autoadj.

→ généraliser à des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées.

$m \geq 1$, $A = Op_h^w(a)$, $a \in S(m)$ réelle $\Rightarrow$ $Op_h(a)$ autoadjoint

→ le théorème spectral permet de définir $f(A)$

$$\left[\begin{array}{l} A = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\Pi_\lambda(A) \\ f(A) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\Pi_\lambda(A) \end{array}\right. \Rightarrow \|f(A)\| = \sup_{t \in Spec(A)} |f(t)| \leq \|f\|_{L^\infty}$$

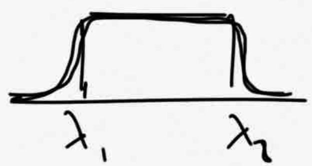
f lisse, à sup. compact.

But : m.q. $f(A) \in \Psi_h(1)$, dont on peut calculer le symbole ordre par ordre en h, en fonction de f et de a.

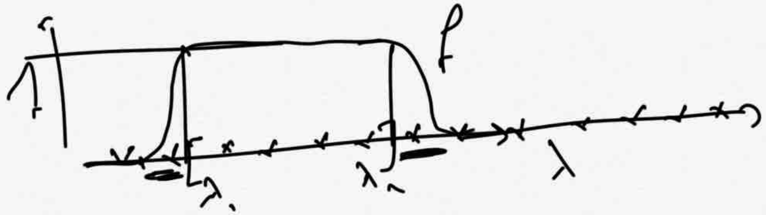
$$f(A) = Op_h(c), \quad c = f(a) + h \ldots$$

Intérêt : contrôler le spectre de A : $tr(f^\epsilon(A)) \longrightarrow$ comptage de val. pr.

$f = \mathbb{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]} \in L^\infty \Rightarrow f^\epsilon \in C_c^\infty$



$\mathbb{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]}(A)$ = projecteur spectral $\Pi_{[\lambda_1, \lambda_2]}(A)$



A sp discret $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$

$Op_h(a)$ $\mu_j(h)$

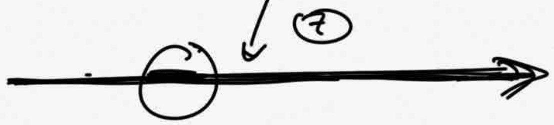
$$\mathrm{Tr}\, f(A) = \sum_j f(\mu_j(h)) = \underbrace{\sum_{\mu_j \in [\lambda_1, \lambda_2]} 1}_{} + \underbrace{\sum_{\mu_j \notin [\lambda_1, \lambda_2]} f(\mu_j)}_{}$$

$$= N_{[\lambda_1, \lambda_2]}(Op_h(a)) + \text{reste}.$$

• $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

→ on va l'étendre en 1 fonction presque holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$\tilde f \in C_c^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$: $\boxed{\tilde f_{|\mathbb{R}} = f}$



$\forall N \geq 0, \exists C_N > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |\bar\partial \tilde f(z)| \leq C_N |\mathrm{Im}\, z|^N$

$\bar\partial \tilde f = O(|\mathrm{Im}\, z|^\infty)$

f holom: $\bar\partial f = 0$, impossible sur un ouvert intersectant $\mathbb{R}$.

Ex de constructions : cutoffs $\psi, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\psi = 1$ près de $\operatorname{supp} f$, $\chi = 1$ près de 0.

$$\tilde f(x+iy) \hat{=} \chi(y)\,\psi(x) \int e^{i\xi(x+iy)} \underbrace{\chi(y\xi)}\, \hat f(\xi) \,\frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}$$

$y \to 0$ $\quad \chi(y\xi) \to 1$ sur $|\xi| \leq \frac{c}{|y|}$

$y = 0 \to \tilde f(x) = f(x)$

Ex : vérifier que $\bar\partial \tilde f = O(|y|^\infty)$

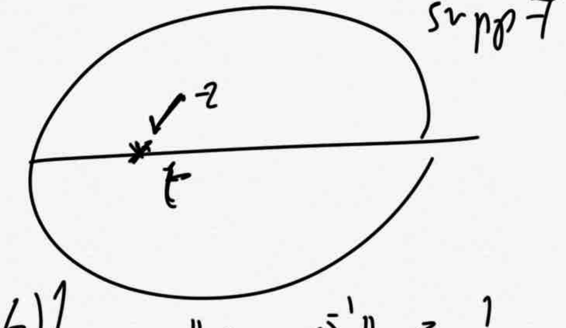
$$\bar\partial = \partial_x + i\partial_y$$

Prop (formule de Cauchy pour f. Formule de Helffer-Sjöstrand)

$f \in C_c^\infty$, $\tilde f$ une extension presque holomorphe de f.

Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \iint \overbrace{\bar\partial \tilde f(z)}^{|y|^\infty} \overbrace{(z-t)^{-1}}^{\leq \left|\frac{1}{y}\right|} \overbrace{dL(z)}^{dx\,dy}$$



$\Rightarrow$ A autoadjoint $\boxed{f(A) = -\frac{1}{\pi} \iint \bar\partial \tilde f(z)\,(z-A)^{-1}\, dL(z)}$ $\quad \|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|y|}$

$$-\frac{1}{\pi}\iint \bar\partial \tilde f(z)(z-t)^{-1}\, dL(z) \underset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\pi}\iint \tilde f(z)\, \bar\partial\left[(z-t)^{-1}\right]\, dL(z)$$

$\bar\partial = \partial_x + i\partial_y$

$$\boxed{\bar\partial \frac{1}{z} = \pi\,\delta_z}$$

$$= f(t).$$

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\Pi_\lambda \qquad \Pi_\lambda = \text{proj. spectral de } A \text{ sur } (-\infty, \lambda]$$

$$z \notin \mathbb{R} \Rightarrow (z-A)^{-1} = \int (z-\lambda)^{-1}\, d\Pi_\lambda$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\pi}\iint \bar\partial \tilde f(z)\,(z-A)^{-1}\, d^2 z = -\frac{1}{\pi}\iint \underbrace{\bar\partial \tilde f(z)}_{O(|y|^\infty)} \Big(\int \underbrace{(z-\lambda)^{-1}}_{\frac{1}{|y|}}\, d\Pi_\lambda\Big)\, d^2 L(z)$$

Fubini

$$= \int d\lambda \left(-\frac{1}{\pi}\int \bar\partial \tilde f\, (z-\lambda)^{-1}\, dL(z)\right) d\Pi_\lambda$$

$A = Op_h(a)$

$$\int d\lambda \; f(\lambda)\, d\Pi_\lambda = f(A).$$