
Cours
Anal. semiclassique
10/11/2020



Analyse semiclassique, cours du 10/11

①

Calcul fonctionnel pour op. $A: L^2 \rightarrow L^2$ non borné : approche par formule de Cauchy.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ extension presque analytique de f

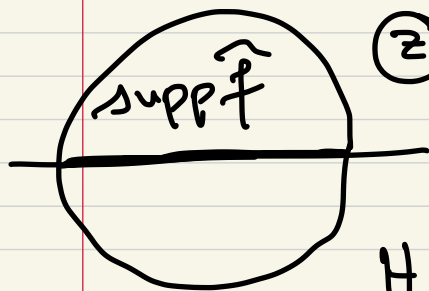
$$\overline{\partial} \tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z|^\infty)$$

$$\Rightarrow f(A) = -\frac{1}{i\pi} \iint \overline{\partial} \tilde{f}(z) \underbrace{(z-A)^{-1}}_{\text{auto-adjoint}} d^2 z$$

$A = \operatorname{Op}_h^W(a) \in S(m)$, a val. réelles

$\rightarrow$ estimées précises sur $(z-A)^{-1}$, γ compris lorsque

$\operatorname{Im} z \rightarrow \mathbb{R}$.



②

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}$$

Hyp sur $a(p)$:

- $a \in S(m)$, avec $m \geq 1$. a est à val. réelles.
- $(a+i)$ elliptique dans $S(m)$ ($a(p) \sim m(p) \sim i$ as $m(p) \rightarrow \infty$)

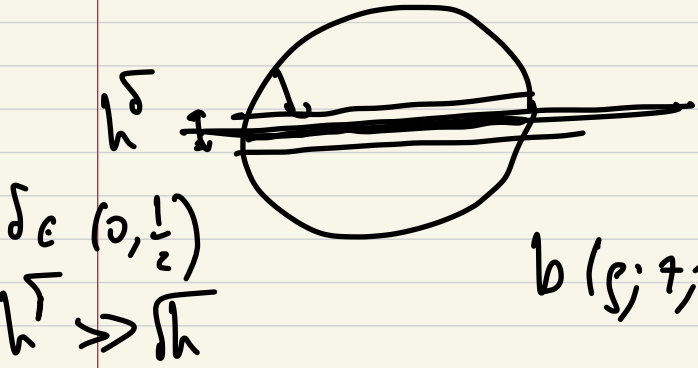
$\Rightarrow (a+i)$ inversible, $(a+i)^{-1} \in S(m^{-1})$

$\Rightarrow \forall z \notin \mathbb{R}$, fixé indépt de h : $(z-A)$ est inversible si h est assez petit, avec pour symbol $b(p; z; h)$.

$\hookrightarrow$ que dire de b lorsque $z \rightarrow \mathbb{R}$?
 $z = z(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbb{R}$?

$$b(p; z; h) \sim \sum_{j \geq 0} b_j(p; z) h^j$$

$$b_0(p; z) = (z - a_0(p))^{-1}$$



Lemme Le symbole $b(p; z; h)$ de $B(z) = (z - O_h(a))^{-1}$ satisfait les bornes suivantes, unif^e pour $h \in (0, 1]$ et $z \in \{ | \operatorname{Re} z | \leq R, \operatorname{Im} z > 0 \}$, $p \in \mathbb{R}^{2d}$

$$| \partial^\alpha b(p; z; h) | \leq C_{\alpha, \alpha} \max \left(1, \frac{h^{1/2}}{| \operatorname{Im} z |} \right)^{2d+1} \frac{1}{| \operatorname{Im} z |^{1+|\alpha|}}$$

$\uparrow$ "transition lorsque $| \operatorname{Im} z | = \sqrt{h}$

si $| \operatorname{Im} z | \ll \sqrt{h}$,

$$\rightarrow | \partial^\alpha b | \leq C \cdot \binom{\alpha}{\alpha} \frac{1}{| \operatorname{Im} z |^{|\alpha|}} \gg h^{-\frac{|\alpha|+1}{2}} \Rightarrow \notin \widetilde{S}_{1/2}$$

(3)

Pr: 1. car $m=1$ $\Rightarrow a \in S(1)$.

Utilisation du thme de C-V inverse pour $B(z)$, et du
thme de Beale.

$$\rightarrow \| \text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_1)} \cdots \text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_2)} \text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_1)} B(z) \| = O\left(\frac{h^N}{|\text{Im } z|^{1+N}}\right) \leftarrow$$

$$\text{ex: } \underline{\text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_1)} B(z)} = \text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_1)} (z-A)^{-1} = \underbrace{(z-A)^{-1}}_{\in \frac{1}{|\text{Im } z|}} \underbrace{\text{ad}_{\mathcal{O}_p(l_1)} A}_{\substack{[\mathcal{O}_p(l_1), A] \\ \in h \psi(1)}} \underbrace{(z-A)^{-1}}_{\in \frac{1}{|\text{Im } z|}}$$

$$[\mathcal{O}_p(l_1), \mathcal{O}_p(b)] = -ih \mathcal{O}_p(\{l_1, b\})$$

$$\hookrightarrow \| \mathcal{O}_p(\partial^\beta b) \|_{S(L^2)} = O\left(\frac{1}{|\text{Im } z|^{1+|\beta|}}\right)$$

thme de CV inverse

$$\begin{aligned} \| \partial^\alpha b \|_{L^\infty} &\leq C_\alpha \sum_{|\beta| \leq 2d+1} \| \mathcal{O}_h(\partial^{\alpha+\beta} b) \|_{S(L^1)} h^{|\beta|/2} \\ &\leq C_\alpha \left[\sum_{|\beta| \leq 2d+1} \left(h^{1/2} / |\text{Im } z| \right)^{|\beta|} \right] |\text{Im } z|^{-1-|\alpha|} \end{aligned}$$

2 régimes, dépend de $\frac{h}{|\text{Im } z|}$ } - si $\frac{h}{|\text{Im } z|} < 1 \rightarrow \beta=0$ domine
- si $\dots \geq 1 \rightarrow$ domine $|\beta|=2d+1$

5) Cas général $m \geq 1$. $a \in S(m)$, avec possibilité sur $m(p) \rightarrow \infty$ dans certaines directions
 $(i+a)$ elliptique dans $S(m)$

$\text{Im } z \neq 0 \Rightarrow (z-A)$ inversible, bornée sur L^2 ,
indépend de h . $b(z) \in S(m^{-1})$.

$$[O_p(l), B(z)] = - \underbrace{B(z)}_{\leq \frac{1}{|\text{Im } z|}} \overbrace{[O_p(l), A] B(z)}^{\leq \frac{1}{|\text{Im } z|}}$$

A non bornée, $[O_p(l), A]$ n'est pas non plus bornée en g^{af}

$$\rightarrow [O_p(l), A] B(z) = \underbrace{[O_p(l), A] (i-A)^{-1}}_{P(z)} \underbrace{(i-A)^{-1} (z-A)^{-1}}_{P(z) \text{ est bornée si } \text{Im } z \neq 0}$$

$$|\text{Re } z| \leq R$$

$$(i-A)(z-A)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{i-\lambda}{z-\lambda} \right| d\pi(\lambda)$$

$$\Rightarrow \| \quad \| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \frac{i-\lambda}{z-\lambda} \right|$$



$$\underbrace{[O_p(l), A]}_{h \psi(m)} \underbrace{(i-A)^{-1}}_{\psi(m^{-1})} \in h \psi(1) \Rightarrow \| \quad \| = O(h)$$

$$\rightarrow \| [O_p(l), B(z)] \| = O\left(\frac{h}{|\text{Im } z|^2}\right)$$

(6)

$$|\mathcal{I} b| \leq C \max \left(1, \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}\right) \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{1+\alpha}} \leftarrow$$

→ si $|\operatorname{Im} z| < h$, $b(z)$ n'est pas bonne classe de symboles

$$-\frac{1}{\pi} \int \mathcal{O}_p(b(z)) \bar{\partial} \tilde{f}(z) d^2 z$$

$$-\frac{1}{\pi} \int \mathcal{O}_p(\underbrace{\bar{\partial} \tilde{f}(z) b(z)}_{\text{le symbole}}) d^2 z$$

→ le symbole

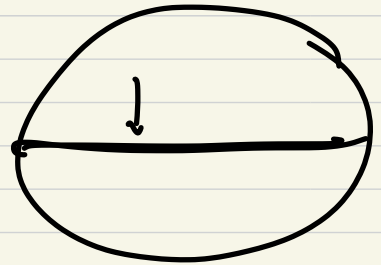
$$\bar{\partial} \tilde{f}(z) = O(|\operatorname{Im} z|^{-\alpha})$$

$\bar{\partial} \tilde{f}(z) b(z; h)$ est dans $S(1)$, uniformément pour $z \in \operatorname{supp} \tilde{f}$.

→ le symbole $c(s; h)$

$$c(s; h) = -\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) b(s; z, h) d^2 z$$

est aussi dans $S(1)$.



Corollaire : $m \geq 1$, $a \in_{\text{réel}} S(m)$, $(a+i)$ elliptique, $f \in \bar{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $f(\mathcal{O}_h^u(a))$ est un op. pseudodifférentiel, de symbole $c \in S(m^{-\infty})$.

$$m \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m^2} \geq \frac{1}{m^3} \dots$$

$$c \in S\left(\frac{1}{m^N}\right), \forall N \geq 0$$

Pour on a montré que $c \in S(1)$.

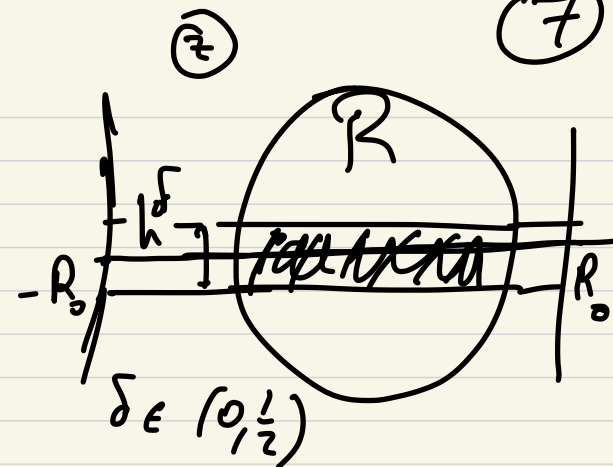
$\forall h > 0$, remplacer f par $f_k(t) = (i-t)^k f(t) \xrightarrow{\psi(m^{-k})} f(A) = \underbrace{(i-A)^{-k}}_{\psi(m^{-k})} \overrightarrow{f_k(A)} \psi(1)$

• Calcul du symbole $c(s; h)$ de $f(A)$.

$$R = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} z| \leq R_0, |\operatorname{Im} z| \geq h^\delta\}$$

$$h^\delta \gg \sqrt{h}$$

$$\rightarrow \underline{c_R(s; h)} = -\frac{1}{\pi} \int_R \bar{\partial} \tilde{f}(z) b(s; z; h) d'z$$



Dans $z \in \operatorname{Supp} \tilde{f} \cap \{| \operatorname{Im} z | \leq h^\delta\}$, on a

$$\bar{\partial} \tilde{f}(z) |\partial^\alpha b(s; z)| \leq C_{\alpha, N} \max \left(1, \frac{\sqrt{h}}{|\operatorname{Im} z|} \right)^{2d+1} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{1+|\alpha|}} |\operatorname{Im} z|^N$$

Je peux toujours choisir $N \gg 2d+1 + 1 + |\alpha|$

$\Rightarrow$ dans cette bande, $\bar{\partial} \tilde{f} \partial^\alpha b \in \underline{h^\infty S(1)}$.

$$\|Op(\quad)\| = \underline{\underline{O(h^\infty)}}$$

dans R :

$$\begin{aligned} \partial_s^\alpha (z-a)^{-1} &\leq C_{\alpha, a} \frac{1}{m(s)} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^{1+|\alpha|}}, \text{ unif pour } s \in \mathbb{R}^{2d}, \\ &\Rightarrow \underbrace{(z-a)^{-1} \in h^{-\delta} S_\delta(m^{-1})}_{\text{d'axe exotique}} \end{aligned}$$

(8)

Lemma Pour h assez petit, et univ^t p/r $z \in \mathbb{R}$, les symboles

$\underbrace{(z-a)^{-1}}_{S(m)} \text{ et } \underbrace{b(z;h)}_{h^{-\delta} S_{\delta}(m^{-1})}$ sont dans $h^{-\delta} S_{\delta}(m^{-1})$.

$$\underbrace{(z-a)^{-1}}_{S(m)} \neq \underbrace{\frac{1}{(z-a)}}_{h^{-\delta} S_{\delta}(m^{-1})} = 1 + r_2(h, z)$$

$$\Rightarrow r_2 \in h^{2-3\delta} S_{\delta}(1)$$

$$\delta < \frac{1}{2}$$

→ si h assez petit,

$$\|Op(r_2)\| < \frac{1}{2}.$$

→ $Op(1+r_2) \in \Psi_{\delta}(1)$, inversible, et

$$\underbrace{[Op(1+r_2)]^{-1}}_{S(m)} \in \Psi_{\delta}(1)$$

$$\Rightarrow b = \underbrace{\frac{1}{(z-a)} \# \left(1 - r_2 + r_2 \# r_1 - \dots \right)}_{h^{-\delta} S_{\delta}(m^{-1})} \in \widetilde{S_{\delta}(1)}$$

$b(z) \in h^{-\delta} S_{\delta}(m^{-1})$,
univ^t pour $z \in \mathbb{R}$.

Calcul de c_R :

$$(z-A) Op(\overset{b_0}{\frac{1}{z-a}}) (1 + Op(r_1))^{-1} = I$$

$$\Rightarrow b(z) = b_0(z) \# (1 - r_2 + r_2 \# r_1 - r_2 \# r_1 \# r_2 + \dots)$$

(9)

$$r_1(h, z) \sim \sum_{j \geq 2} \frac{(h/k)^j}{j!} (z-a) \left(\omega(\overline{D}, \overline{D}) \right)^j \frac{1}{(z-a)}$$

$$r_2(h, z) \sim \sum_{j \geq 2} h^j (z-a)^{1-j} \underbrace{q_{j-1}(z)}_{\substack{\text{polynôme de } d \leq j-1 \\ q/r \in \mathbb{C}}}$$

$$\frac{1}{z-a} \# r_2 \sim \sum_{l \geq 0} h^l \frac{1}{(z-a)} \omega(\overline{D}, \overline{D})^l r_2$$

$$\sim \sum_{\underline{k \geq 2}} h^k (z-a)^{-2k} Q_{2k-4}^{(1)}(z)$$

↳ polyn. en z , de $d \leq 2k-4$.

$$\frac{1}{z-a} \# r_2 \# r_1 \sim \sum_{k \geq 4} h^k (z-a)^{-2k+1} Q_{2k-7}^{(2)}(z)$$

$$\frac{1}{(z-a)} \# r_2 \# n \sim \sum_{k \geq 2n} h^k \underbrace{\left(\frac{1}{(z-a)} \right)^{2k-n+1}}_{\leq \frac{h^k}{h^{\delta(2k-n+1)}}} Q_{2k-3n-1}^{(n)}(z)$$

$$= \frac{h^{(1-2\delta)k}}{h^{(1-2\delta)2n}} h^{\delta(n-1)} h^{\delta(n-1)}$$

$\Rightarrow$ on peut nommer la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n \neq n$
formelle

$$(*) \rightarrow b(z) \sim (z-a)^{-1} + \sum_{k \geq 2} h^k (z-a)^{-2k} \underbrace{Q_{2k-4}(z)}_{\substack{\text{poly de deg } \leq 2k-4, \\ \text{dépend d'un certain} \\ \text{nbr de dérivées de } a}}$$

$\cdot \partial^\alpha b \rightarrow$ même type d'expression.
 $\partial^\alpha b \in h^{-\delta(1+|\alpha|)} S_\delta(m^{-1})$

On a obtenu:

Lemme Pour h assez petit et $z \in \mathbb{R}$, $b(z; h) \in h^{-\delta} S_\delta(m^{-1})$
admet le développement asymptotique $(*)$, uniformément pour $z \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow C_R \sim -\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \partial \tilde{f}(z) \left[(z-a)^{-1} + \sum h^k (z-a)^{-2k} Q_{2k-4}(z) \right] dz$$

$$\partial \tilde{f} = O(|\operatorname{Im} z|^\infty)$$

$$\int (\quad) = O(h^\infty)$$

$$\equiv \equiv \equiv \int_{\mathbb{C}} \partial \tilde{f}(z) \left[(z-a)^{-1} + \sum h^k (z-a)^{-2k} Q_{2k-4}(z) \right] dz$$

$$\Rightarrow c(s) \sim -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}(z) \left[\underbrace{\frac{1}{z-a}}_{\text{}} + \sum_{k \geq 2} h^k \underbrace{\frac{1}{(z-a)^{2k}}}_{\text{}} Q_{2k-4}(z; s) \right] dz \quad (11)$$

terme principal: $c_0(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}(z) \frac{1}{z-a(s)} dz$

$$= \hat{f}(a(s)) = f(a(s)).$$

$$O_p(c) = f(A)$$

$$c \sim c_0 + \sum_{k \geq 2} h^k c_k \quad \text{dans } S(1)$$

$$c_k(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}(z) \underbrace{\frac{1}{(z-a(s))^{2k}}}_{\text{}} Q_{2k-4}(z; s)$$

$$= -\frac{1}{\pi(2k-1)!} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \tilde{f}(z) Q_{2k-4}(z) \binom{2k-1}{z} \left(\frac{1}{z-a} \right) d^2 z$$

$$c_k(s) = \frac{1}{\pi(2k-1)!} \int \bar{\partial} \left(\tilde{f}(z) Q_{2k-4}(z; s) \right) \overline{\left(\frac{1}{(z-a(s))} \right)} d^2 z$$

$$\overline{\frac{1}{z-a(s)}} = \pi \delta_{z-a(s)} = \frac{1}{(2k-1)!} \binom{2k-1}{z} \left(\tilde{f}(z) Q_{2k-4}(z; s) \right) \Big|_{z=a(s)}$$

$$\rightarrow c_k(p) = \frac{1}{(2k-1)!} \partial_t^{2k-1} \left(\underbrace{f(t) Q(t, p)}_{2k-1} \right) \Big|_{t=\underline{a(p)}} \quad 12$$

Thème Le symbole $c(p)$ de l'op. $f \in \mathcal{O}_p^W(a)$ admet 1 dev't asymptotique dans $S(1)$

$$c \sim \sum_{k \geq 0} h^k c_k(p), \quad c_0 = f \circ a$$

Chaque $c_k \in S(1)$, et est supportée dans $\text{supp}(f(a))$

$$\{p \in \mathbb{R}^{2d}; a(p) \in \text{supp}(f)\}$$

• si $|a(p)| \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \text{supp}(f \circ a)$ est borné.

• Applications : Formule de Weyl semi-classique.

Hypothèses sur a et/ou f : 2 situations

(1) $m(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} +\infty$ (m est "confinant"), et $(a+i)$ elliptique dans $S(m)$.

(2) $m=1$, et $\exists I \subset \mathbb{R}$, un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ et $C > 0$, ~~h~~
 $\forall h \in (0, 1] \forall p \in \mathbb{R}^{2d} \setminus \Omega, \text{dist}(a(p), I) \geq C. \quad f \in C_c^\infty(I).$

$\Rightarrow$ dans les 2 cas, $\text{supp}(f \circ a)$ est compact.

Prop² Dans les 2 cas ci-dessus, c , le symbole de $f(A)$, est dans la classe $S(\langle \rho \rangle^{-\infty})$. De plus, $c(h)$ est essentiellement supportée dans $\text{supp}(f(a))$, avec les estimées:

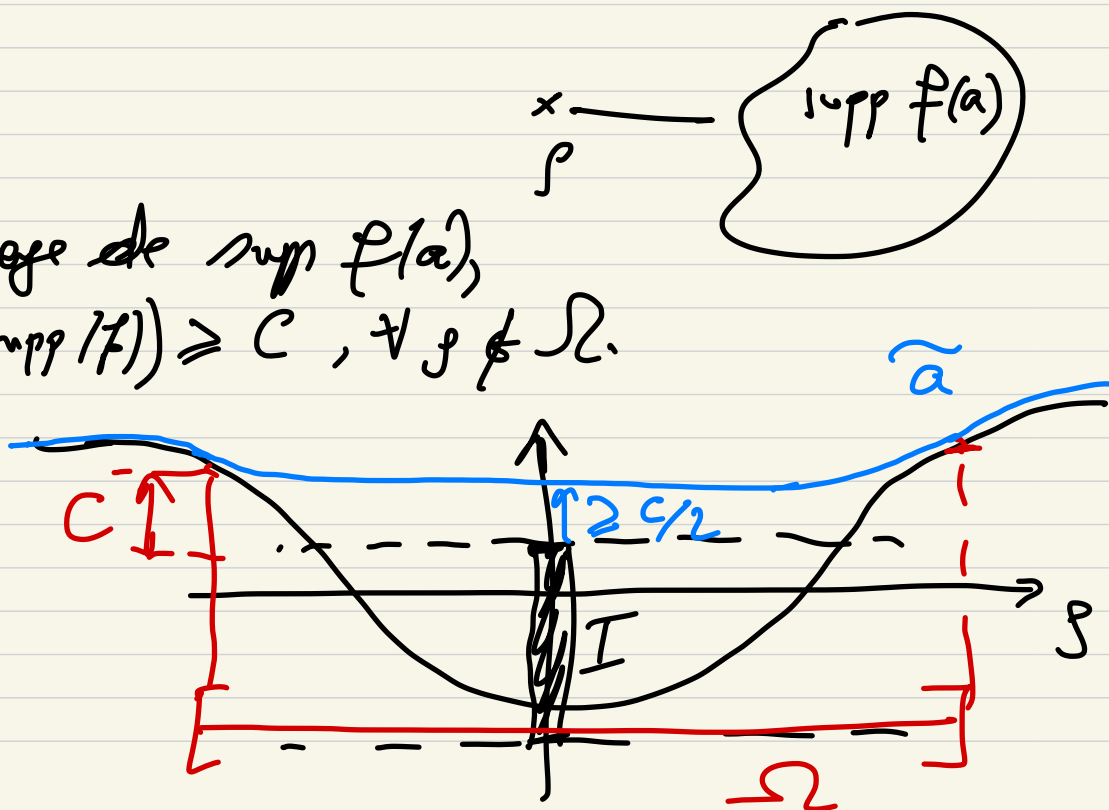
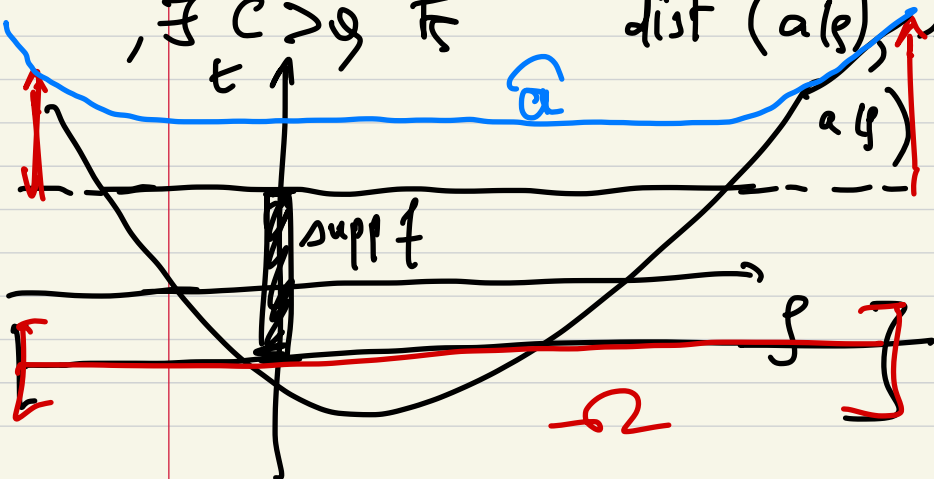
$$\forall c(\rho; h) = O\left(\left(\frac{h}{\text{dist}(\rho, \text{supp}(f(a)))}\right)^{\infty}\right),$$

$$\forall \rho \text{ tq } \text{dist}(\rho, \text{supp } f(a)) \geq C.$$

P_r: $\text{supp } f(a)$ compact

$\Rightarrow \exists \rightarrow$ borné, voisinage de $\text{supp } f(a)$,

$\exists C > 0$ tq $\text{dist}(a(\rho), \text{supp } f) \geq C, \forall \rho \notin \Omega$.



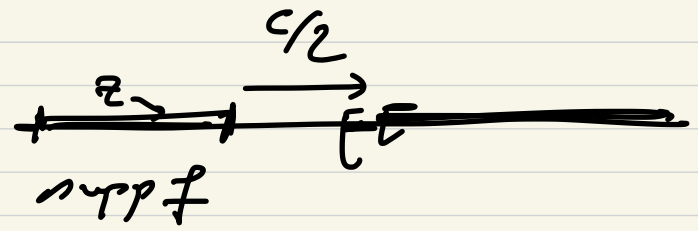
$$(z - A)^{-1} = (z - \hat{A})^{-1} + (z - A)^{-1} (A - \hat{A}) (z - \hat{A})^{-1} \quad \text{identité de la résolvante}$$

On injecte dans la f. de Cauchy pour $f(A)$

$$-\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \hat{f}(z) (z - \hat{A})^{-1} dz \quad \text{Rar}(\hat{a}) \cap \text{supp}(\hat{f}) = \emptyset$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \hat{f}(z) \bar{\partial} \left[(z - \phi_h(\hat{a}))^{-1} \right] dz^2 = 0.$$

$$\Rightarrow f(\hat{A}) = 0.$$



$$c = -\frac{1}{\pi} \int \underbrace{\bar{\partial} \hat{f}(z)}_{S(1)} \underbrace{b(z)^{\#} (a - \hat{a})^{\#} \hat{b}(z)}_{\substack{\text{supp } c \cap \\ \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2d})}} dz$$

$$O\left(\frac{h}{\text{dist}(p, \mathcal{L})}\right)^{\infty}$$

$\rightarrow c$ admet les mêmes estimées : $c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2d})$,

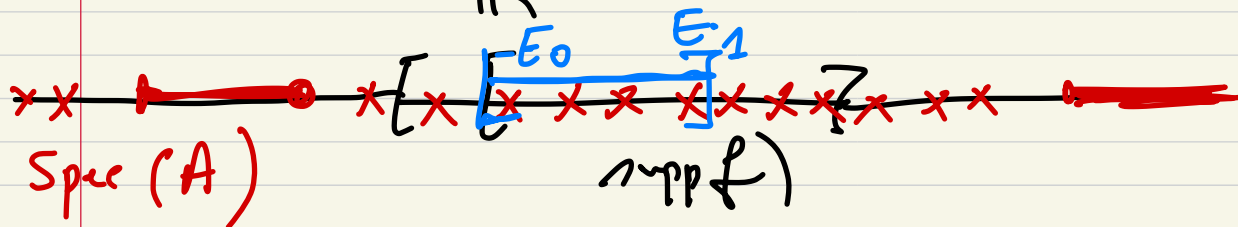
$\forall p \notin \mathcal{L}.$

Corollaire: Si une des 2 hypothèses est vérifiée, ^{sur (a, f)}
 alors pour h assez petit, $f(O_h^u(a))$ est à trace sur $L^2(\mathbb{R}^{2d})$,
 et $\text{tr } f(O_h^u(a)) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} c(p; h) dp \sim \frac{1}{(2\pi h)^d} \sum_{k \geq 0} h^k \int_{\mathbb{R}^{2d}} c_k(p) dp$
 Terme principal : $\frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(a(p)) dp$

Si $f(O_p(a))$ est à trace $\Rightarrow$ pour h assez petit $\text{spect}(O_p(a))$
 est purement discret sur $\text{supp}(f)$, composé de

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mathbb{T}_\lambda$$

$(\psi_j(B), \lambda_j(B))$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 fonct. pr. val. pr.



Loi de Weyl semi-classique: compter le nombre de val.-pr dans
 un intervalle donné, lorsque $h \rightarrow 0$.

(16)

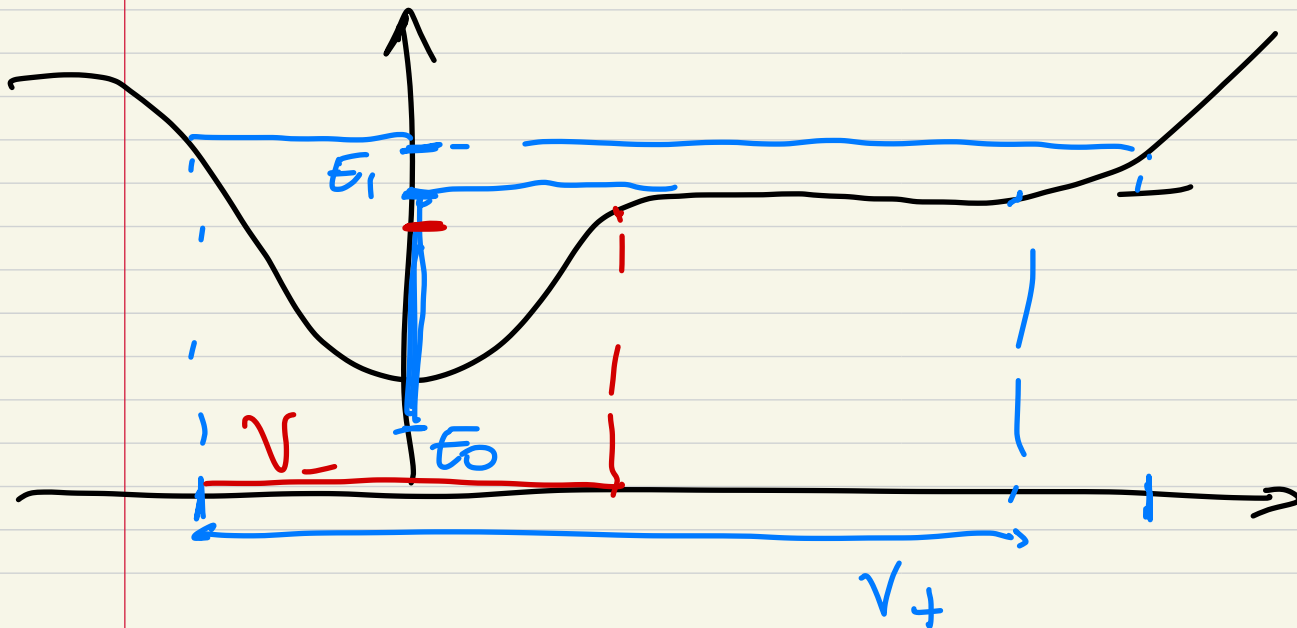
Théorème (Loi de Weyl semiclassical) $\left[a \in S(n) \text{ indép. de } h, \right.$
 $\left. \text{ satisfait 1 des 2 hyp.} \right]$
 Fixons un intervalle $[E_0, E_1] \subset I$, et appelons $\mathcal{N}([E_0, E_1], h)$
 le nbr de valeurs pr. $\lambda_j(h)$ de $\Delta_h^W(a)$ dans $[E_0, E_1]$, comptées avec
 multiplicités.

Alors on a l'encadrement suivant, lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{(2\pi h)^d} \left(V_-([E_0, E_1]) + o(1) \right) \leq \mathcal{N}([E_0, E_1], h) \leq \frac{1}{(2\pi h)^d} \left[V_+([E_0, E_1]) + o(1) \right]$$

où on définit les volumes de l'espace des phases:

$$V_{\pm}([E_0, E_1]) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Vol } a^{-1}([E_0 \pm \epsilon, E_1 \pm \epsilon])$$



Si $\forall_- ([E_0, E_1]) > 0 \quad (\Rightarrow \text{Ran}(a) \cap]E_0, E_1[\neq \emptyset)$ (17)
 $\Rightarrow \mathcal{D}_h(a)$ a beaucoup de val.
 propres dans $[E_0, E_1]$ lorsque $h \searrow 0$.

Corollaire Si E_0 et E_1 sont des énergies régulières pour a
 ($da(p)$ ne s'annule pas sur $\bar{a}'(E_0)$ ni $\bar{a}'(E_1)$), alors

$$\mathcal{V}_+([E_0, E_1]) = \mathcal{V}_-([E_0, E_1]) = \text{Vol}(\bar{a}'([E_0, E_1]))$$

Dans ce cas, on a:

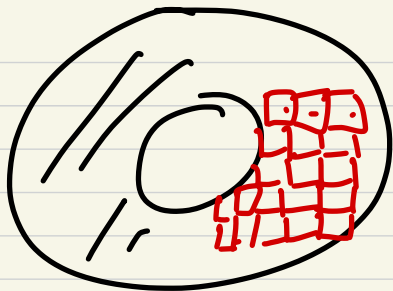
$$\mathcal{N}([E_0, E_1]; h) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \left[\text{Vol}(\bar{a}'([E_0, E_1])) + o(1) \right]$$

en $h \searrow 0$.

(Théorème de Sand: presque toutes les valeurs E sont régulières)
 p/r au symbole a .

Remarque: $\mathcal{N}([], h) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \overbrace{\text{Vol}(\bar{a}'([]))} + \text{petit}$

* chaque état propre occupe une région de l'espace des phases de volume $(2\pi h)^d$.

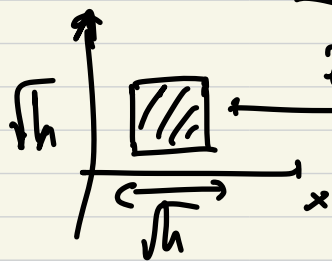


$$\tilde{a}'([E_0, E_1])$$

Lien avec principe d'incertitude:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

état cohérent est "localisé" microlocalisé

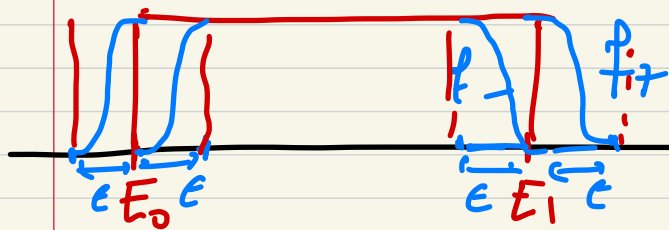


dans une boîte de rayon $\sim \hbar$
 $\rightarrow$ de volume $\sim \hbar^d$

On associe à 1 région compacte de $\mathbb{R}^{2d}$ un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de dim. finie.

$$\text{Vect} \{ \psi_j(h); \lambda_j(h) \in [E_0, E_1] \} = \text{Ran } \Pi_{[E_0, E_1]}(Op(a)).$$

• Preuve du Rnme: $\epsilon > 0$, on encadre la fonction $\mathbb{1}_{[E_0, E_1]}$ par des fonctions $f_{\pm \epsilon}$ lisses



$$\mathbb{1}_{[E_0 - \epsilon, E_1 - \epsilon]} \leq f_- \leq \mathbb{1}_{[E_0, E_1]} \leq f_+ \leq \mathbb{1}_{[E_0 + \epsilon, E_1 + \epsilon]}$$

$$\Rightarrow \text{tr } \mathbb{1}_{[E_0, E_1]}(A) \leq \text{tr } f_-(A) \leq \text{tr } \mathbb{1}_{[E_0, E_1]}(A) \leq \text{tr } f_+(A) \leq \text{tr } \mathbb{1}_{[E_0, E_1]}(A)$$

$$\operatorname{tr} f_-(A) \leq \mathcal{N}([E_0, E_1], h) \leq \operatorname{tr} f_+(A)$$

(positivité de la trace)

$$\int f_-(a(t)) dt + O_{f_-}(h) \leq (2\pi h)^d \mathcal{N}(\cdot) \leq \underbrace{\int f_+ \circ a(t) dt}_{\text{}} + O_{f_+}(h)$$

$$\underbrace{\operatorname{Vol}(\tilde{a}([E_0 + \epsilon, E_1 - \epsilon]))}_{O_{f_-}(h)} + O_{f_-}(h) \leq \underbrace{\operatorname{Vol}(\tilde{a}([E_0 - \epsilon, E_1 + \epsilon]))}_{O_{f_+}(h)} + O_{f_+}(h)$$

On peut trouver une suite $\epsilon = \epsilon(h) \rightarrow 0$ assez lentement, pour que $O_{\epsilon_h}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ par 1 précédent diagonal.

Ex: $\forall \epsilon_j = \frac{1}{j}$, $\exists h_j$ t.q. $\forall h \leq h_j$, $O_{\epsilon_j}(h_j) \leq \frac{1}{j}$.

$j=1 \rightarrow \exists h_1$ t.q. $\forall h \leq h_1$, $O_{\epsilon_1}(h) \leq 1$

$j=2$, $\exists h_2$, que je peux supposer $h_2 \leq \frac{h_1}{2}$, t.q. $O_{\epsilon_2}(h) \leq \frac{1}{2}$, $\forall h \leq h_2$

$\vdots$
 $\forall h \leq h_j$, $O_{\epsilon_j}(h) \leq \frac{1}{j}$ et $O_{\epsilon_k}(h) \leq \frac{1}{k}$, $\forall k \leq j$.

(25)

Rem: pour $f \in C_c^\infty(I)$, on a un dist asymptotique complet
de $\text{tr } f(\mathcal{O}_{P_h}^\vee(a))$.

Par contre, si $f = \mathbb{1}_{[E_0, E_1]}$, on a au mieux un
asymptotique $\text{tr } f(\mathcal{O}_{P_h}(A)) = \frac{1}{(2\pi h)^d} [\text{Vol}(\) + \underbrace{o(1)}]$

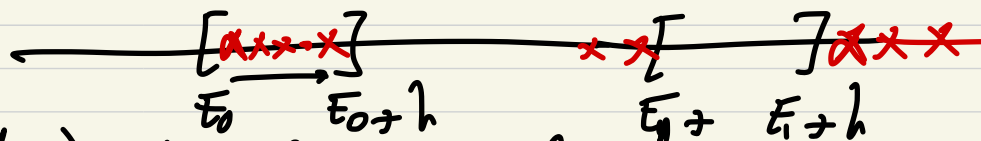
1 objectif de la th. spectrale :
arriver à lier le rest

$$\underbrace{\mathcal{P}([], h)}_{\in \mathbb{N}} = \frac{\text{Vol}(\tilde{a}([]))}{(2\pi h)^d} + \underbrace{o(h^{-d})}_{\gg 1}$$

$$= o(h^{-d}) + \underbrace{o(h^{-d+1})}_{O(h^{-d+1})} + \dots + h^0 + h^1 + \dots + h^N + \underbrace{O(h^{N+1})}_{+ O(h^0)}$$

• $[E_0, E_1]$

$[E_0, E_0 + Ch^5]$



Si E_0 est régulier pour A

Si on a un rest $O(h^{-d+1})$ dans la formule de Weyl $\Rightarrow$ on
montre qu'il y aura des valeurs propres dans un intervalle de longueur $\gg h$.

$$\mathcal{N}([E_0, E_1]; h) = \frac{\text{Vol}(\bar{a}'(E_0, E_1))}{(2\pi h)^d} + O(h^{-d+1}) \quad (21)$$

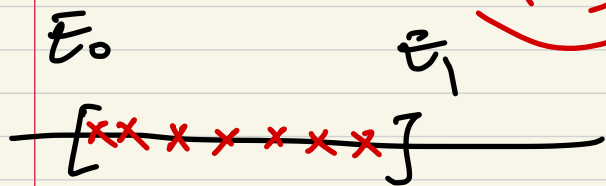
$$E_1 \rightarrow E_0 + h^\delta, \quad \delta < 1.$$

$$\rightarrow \text{Vol}(\bar{a}'(E_0, E_1)) = \text{Vol}(\bar{a}'([E_0, E_0 + h^\delta]))$$

$E_1 \mapsto \text{Vol}(\bar{a}'(E_0, E_1))$ est dérivable en $E_1 = E_0$, de dérivée > 0 .

$$\mathcal{N}(\quad) = \frac{C_0 h^\delta}{(2\pi h)^d} + O(h^{-d+1}).$$

$$\frac{C_0 h^{\delta-d}}{(2\pi)^d} + o(h^{-d})$$



Rem: en $d=1$, on peut obtenir des expressions approchées (dév asympt.) des $\lambda_j(h)$.
(méthode WKB
Bohr-Sommerfeld)

En $d \geq 2$, on n'a pas de telles formules

J'ai pris $a(\eta)$ indép^t de h .

J'aurais pu suppr^{er} que $a \in S(m)$ dépend de h "gentiment".

$$\left| \underbrace{a(h)}_{\sim \sum_{k \geq 0} h^k a_k} \right| \quad a_k \in S(m), \text{ indép^t de } h$$

→ F. de Weyl: $\text{Vol}(a^{-1}(\cdot)) \sim \text{Vol}(\underline{a_0^{-1}}(\cdot))$,

$$\text{tr } f(\mathcal{O}_p(a)) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int \underline{f(a)} \, d\eta + O(h^{-d+1})$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int f(a_0) \, d\eta + O(h^{-d+1})$$

Le symbole principal détermine le comport^t asymptotique.

ex: $a = \underline{\underline{|\beta|^2 + V(x)}} \in S(m) \quad m = |\beta|^2 + \hat{m}(x)$

$$\mathcal{O}_p(a) = -h^2 \Delta + V(x) \text{ op de Schrödinger.}$$

$$a \in S'(m).$$