Université Paris-Saclay – Master 2 AMS – 2020-2021

Analyse semiclassique

(Stéphane Nonnenmacher)

DM: Quantification anti-Wick

Dans ce DM on va s'intéresser à un procédé de quantification différent des quantifications Op_t étudiées en cours. Cette quantification, appelée *quantification anti-Wick*, est basée sur les *états cohérents*. Cette quantification présente certains avantages par rapport à la quantification de Weyl, en particulier la propriété de positivité. Certaines propriétés, comme la *quasi-localité*, sont plus simples à exhiber que pour la quantification de Weyl.

1. Résolution de l'identité des états cohérents. fonction de Bargmann.

Comme vu dans le TD 1, l'état cohérent (semiclassique) centré au point de l'espace des phases $(0,0) \in \mathbb{R}^{2d}$, est défini par la fonction d'onde

$$\psi^\hbar_{(0,0)}(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{d/4}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}.$$

(1) Vérifier que pour tout $\hbar > 0$, cet état est normalisé dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que la famille d'états[1] $\left(\psi^\hbar_{(0,0)}\right)_{\hbar\in(0,1]}$ est microlocalisée sur le point $\{(0,0) \in \mathbb{R}^{2d}\}$ dans la limit semiclassique (de façon équivalente, montrer que $\mathrm{WF}_\hbar(\psi^\hbar_{(0,0)}) = \{(0,0)\}$).

(2) Pour tout point $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, l'état cohérent $\psi^\hbar_{(x_0,\xi_0)}$ est obtenu en agissant sur $\psi^\hbar_{(0,0)}$ par l'opérateur de translation dans l'espace des phases $T_{(x_0,\xi_0)}$:

$$\forall \rho_0 = (x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}, \qquad \psi^\hbar_{\rho_0} = \psi^\hbar_{(x_0,\xi_0)} \stackrel{\text{def}}{=} T_{(x_0,\xi_0)}\psi^\hbar_{(0,0)}.$$

Montrer que pour tout ρ_0, l'état $\left(\psi^\hbar_{\rho_0}\right)_{\hbar\in(0,1]}$ est microlocalisé sur $\{\rho_0\}$. Soit $\rho_1 \neq \rho_0$. Sur quel ensemble est microlocalisé l'état $\psi^\hbar_{\rho_0} - \psi^\hbar_{\rho_1}$? L'état $\psi^\hbar_{\rho_0} + \hbar\,\psi^\hbar_{\rho_1}$?

(3) Calculer le produit scalaire $\langle \psi^\hbar_0, \psi^\hbar_{\rho_0}\rangle$, puis $\langle \psi^\hbar_{\rho_1}, \psi^\hbar_{\rho_0}\rangle$ (on pourra utiliser l'action des opérateurs de Heisenberg). En déduire que ces états sont asymptotiquement orthogonaux lorsque la distance entre ρ_0 et ρ_1 est grande par rapport à $\hbar^{1/2}$ (ce qu'on note $|\rho_0 - \rho_1| \gg \hbar^{1/2}$).

(4) On note $\Pi^\hbar_{\rho_0} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^\hbar_{\rho_0} \otimes \psi^{\hbar*}_{\rho_0}$ le projecteur orthogonal sur l'état $\psi^\hbar_{\rho_0}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On se propose de montrer la *résolution de l'identité* satisfaite par ces projecteurs. Pour cela, on va étudier l'opérateur défini par l'intégrale (pour l'instant formelle):

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{d\rho_0}{(2\pi\hbar)^d}\, \Pi_{\rho_0}.$$

En vous servant de la décroissance exponentielle des états cohérents, vérifier que pour $u \in \mathscr{S}$ et tout $\hbar \in (0,1]$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{d\rho}{(2\pi\hbar)^d} \left|\langle \psi^\hbar_\rho, u\rangle\right|$ converge. En déduire que $I_1 u$ est bien défini et donne une fonction $I_1 u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Estimer la norme $\|I_1 u\|_{L^2}$. Vérifier que l'opérateur obtenu $I_1 : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est symétrique par rapport au produit scalaire L^2.

[1] Plus loin on dira "l'état", négligeant de rappeler qu'il s'agit d'une famille d'états dépendant de $\hbar$.

(5) Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, calculer explicitement la fonction d'onde $[I_1 u](x)$. En déduire la *relation de fermeture*

$$I_1 u = u, \qquad \forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.1}$$

Montrer que l'opérateur I_1 peut s'étendre aux distributions $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, et que l'identité ci-dessus reste valable dans ce cadre. En déduire en particulier qu'elle est valable pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(6) En déduire que la famille des états cohérents $\left\{\psi_\rho^\hbar,\ \rho \in \mathbb{R}^{2d}\right\}$ est *surcomplète*, autrement dit que la fermeture de Vect $\left\{\psi_\rho^\hbar,\ \rho \in \mathbb{R}^{2d}\right\}$ dans L^2 est l'espace L^2 tout entier.

(7) Montrer que pour $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\rho \mapsto \mathcal{B}_u^\hbar(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi_\rho^\hbar, u\rangle$ est dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, et relier les normes $\|u\|_{L^2}$ et $\|\mathcal{B}_u^\hbar\|_{L^2}$. On appelle $\mathcal{B}_u^\hbar$ la *fonction de Bargmann* de u.

2. Quantification anti-Wick

Pour une fonction $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ ("symbole anti-Wick"), on définit la quantification anti-Wick de a de la facon suivante:

$$\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{d\rho}{(2\pi\hbar)^d}\, a(\rho)\, \Pi_\rho^\hbar.$$

La fonction a est appelée *le symbole anti-Wick* de l'opérateur $A_\hbar = \mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)$.

(1) Montrer que cette intégrale converge absolument (pour la norme d'opérateurs), et définit donc un opérateur borné sur L^2. Donner une borne supérieure sur la norme $\left\|\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)\right\|_{L^2\to L^2}$.

(2) Montrer que pour un symbole $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$ à valeurs réelles, l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)$ est formellement auto-adjoint. Montrer que si de plus $a \geq 0$, l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)$ est *positif.*

(3) Rappeler qu'on peut étendre la définition au symbole $a \equiv 1$ (v. problème 1). Montrer qu'on peut étendre la définition de cet opérateur aux symboles $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, et que l'opérateur obtenu est borné $L^2 \to L^2$. Montrer la borne

$$\|\,\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)\|_{L^2\to L^2} \leq \|a\|_{L^\infty}.$$

Indication: on pourra se servir de l'expression variationnelle $\|A\| = \sup_{\|u\|=1,\|v\|=1} |\langle v, Au\rangle|$ pour la norme d'un opérateur borné $L^2 \to L^2$, et de la question 7 du problème 1.

(4) Montrer que si a est réel (resp. a est positif), alors $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a)$ est symétrique (resp. positif).

(5) On cherche à relier cette quantification anti-Wick à la quantification de Weyl. Pour cela on va calculer explicitement la quantification des "modes de Fourier" $e_{V_0}(\rho) = \exp\{i\,(\xi_0\cdot x - x_0\cdot\xi)\}$, en adaptant le calcul de la relation de fermeture ci-dessus.

i) Ecrire explicitement, puis calculer $\left[\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(e_{V_0})u\right](x)$, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En déduire la relation

$$\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(e_{V_0}) = e^{-\frac{\hbar}{4}\left(|x_0|^2+|\xi_0|^2\right)}\,\mathrm{Op}_\hbar^{W}(e_{V_0}). \tag{2.1}$$

ii) En déduire que, pour $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$, $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a) = \mathrm{Op}_\hbar^W(\tilde a)$, où le symbole de Weyl $\tilde a$ est relié au symbole anti-Wick a par l'opérateur suivant:

$$\tilde a = e^{-\frac{\hbar}{4}\left(D_x^2+D_\xi^2\right)}\,a$$

(on définira proprement le sens de cette expression).
iii) Montrer que la transformation $a \mapsto \tilde{a}$ peut aussi s'écrire sous la forme d'une convolution. En déduire la régularité du symbole $\tilde{a}$, si on prend $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. Cette propriété de *régularisation* de la quantification anti-Wick explique pourquoi on peut quantifier anti-Wick des symboles peu réguliers, sans perdre des bonnes propriétés d'opérateurs $L^2 \to L^2$.

(6) Vérifier que l'opérateur $e^{-\frac{\hbar}{4}\left(D_x^2+D_\xi^2\right)}$ envoie $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ vers une fonction $\tilde{a} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Montrer cette application $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est injective. Est-elle bijective? Comparer avec le cas des applications entre les t-symboles $a_s \mapsto a_t$.

(7) En se servant de ce lien avec la quantification de Weyl, on veut calculer l'équivalent du produit de Moyal pour les symboles anti-Wick (parfois appelé le "produit de Voros"). En écrivant la relation $\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a) \circ \mathrm{Op}_\hbar^{AW}(b) = \mathrm{Op}_\hbar^{AW}(c)$, montrer que le symbole c peut s'exprimer, *au moins formellement*, comme:

$$c = a \ \exp\left\{ \frac{\hbar}{2} \left(\overleftarrow{D_x + iD_\xi}\right) \left(\overrightarrow{D_x - iD_\xi}\right) \right\} b \tag{2.2}$$

(la signification des flèches est identique à celle utilisée pour le produit de Moyal). Montrer que cette expression a un sens pour des symboles a, b tels que leurs transformées de Fourier $\hat{a}, \hat{b}$ sont à support compact. Le symbole $\hat{c}$ est-il alors à support compact? Montrer que le produit (2.2) s'étend à toute paire de fonctions $\hat{a}, \hat{b} \in \mathscr{S}$. Le résultat est-il dans $\mathscr{S}$? $\hat{c}(V_+) = \int \hat{a}(V_0)\hat{b}(V_1) e^{h/2(|V_+|^2/4 - |V_-|^2) + i\hbar/2\omega(V_0,V_1)} dV_-$

(8) Montrer, que pour $\hat{a}, \hat{b}$ à support compact, la "correspondence quantique-classique" est encore valable pour cette quantification:

$$\left[\mathrm{Op}_\hbar^{AW}(a), \mathrm{Op}_\hbar^{AW}(b)\right] = -i\hbar\, \mathrm{Op}_\hbar^{AW}\left(\{a, b\}\right) + \mathcal{O}(\hbar^2).$$