Distributions & T.F

S. Nonnenmacher

2/12/2020

Cours "Distributions", 2/12/2020

L'espace des distributions de Schwartz, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
(distributions tempérées)

<u>Déf :</u> Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est dite <u>tempérée</u> s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C\, N_p(\varphi)$.

<u>Rem :</u> pas de contrainte sur $\mathrm{supp}(\varphi)$: contrôle uniforme p/r au $\mathrm{supp}(\varphi)$.

<u>Notation :</u> les distr° tempérées forment l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

<u>Ex :</u> 1. Si T est à support compact.
$\Rightarrow \exists\, q, C > 0$ tq $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\, \|\varphi\|_{C^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\, N_p(\varphi),$$

Esp des distrib° à supp compact est noté $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

2. $p \in [1,\infty]$, on a $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

si $f \in L^p$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en prenant l'indice $q \in [1,\infty]$ conjugué à p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)\right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p} \underbrace{\|\varphi\|_{L^q}} \leq C_{d,f} N_n(\varphi)$$

$$\|\varphi\|_{L^q}^q = \int |\varphi(x)|^q\, dx = \int |\varphi(x)|^q \langle x\rangle^{d+1} \frac{1}{\langle x\rangle^{d+1}}\, dx$$

$$\leq \underbrace{\sup_x \left(|\varphi(x)|^q \langle x\rangle^{d+1}\right)} \underbrace{\int \frac{1}{\langle x\rangle^{d+1}}\, dx}$$

$$\leq \left(\sup |\varphi(x)| \langle x\rangle^{\frac{d+1}{q}}\right)^q \quad C_d$$

$$\leq C\, N_n(\varphi) \quad C_d$$

où $n \geq \frac{d+1}{q}$.

<u>Conséquence</u> : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \underset{\text{dense}}{\subset} L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

3. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tq

$$\forall R > 0 \qquad \int_{|x|<R} |f(x)|\,dx \;\leq\; \underbrace{C\,(1+R)^p}_{\text{(divergence au + polynomiale)}}$$

Alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left|\int f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f|\,|\varphi|\,dx$$

découpage de $\mathbb{R}^d$ en une union disjointe d'anneaux dyadiques

$$\mathbb{R}^d = \{|x|<1\} \cup \{1 \leq |x| < 2\} \sqcup \{2 \leq |x| < 2^2\} \sqcup \cdots \cup \{2^k \leq |x| < 2^{k+1}\} \sqcup \cdots$$

$$\int |f|\,|\varphi| = \underbrace{\int_{|x|<1} |f\varphi|} + \int_{1\leq|x|<2} |f\varphi| + \cdots + \int_{2^k \leq |x| < 2^{k+1}} |f\varphi|\,dx$$

$$\leq C\,2^p\,N_0(\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sup_{2^k \leq |x| < 2^{k+1}} |\varphi(x)|}\ \underbrace{\int_{2^k \leq |x| < 2^{k+1}} |f(x)|}$$

\# fini de termes non nuls

$$\leq \int_{|x|<2^{k+1}} |f|\,dx \leq (1+2^{k+1})^p$$

$$(1+2^{k+1})^p \sup_{2^k<|x|<2^{k+1}} |\varphi(x)| \le 2^p\, 2^{-k} \sup_{2^k\le|x|\le 2^{k+1}} \left(|x|^{p+1}|\varphi(x)|\right)$$

$$(1+2^{k+1})^p \sim 2^{kp+p} = 2^p\, 2^{kp}$$

$$|x|^{p+1} \geq (2^k)^{p+1} = 2^{kp}\, 2^k$$

$\therefore$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\varphi\right| \le C'\left[N_0(\varphi) + \sum_{k\geq 0} 2^{-k} N_{p+1}(\varphi)\right]$$

$$\le C'' N_{p+1}(\varphi).$$

N_{p+1} : cf. la croissance polynômiale de $\int_{B(0,R)} |f|\,dx$.

Contre-ex : $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas 1 distribution tempérée.

Propé : Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $x^\alpha \partial^\beta T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Pv : Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, T tempérée, $\langle x_j T, \varphi\rangle = \langle T, x_j\varphi\rangle$

$$\le C N_p(x_j\varphi)$$

$$\le C' N_{p+1}(\varphi).$$

Rem: e^x n'est pas tempérée : $\forall p$, $\frac{1}{R^p}\int_0^R e^x \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$.

Par contre, la fonction $f : x \mapsto e^x \exp(i e^x)$ n'est pas bornée par 1 polynôme, cependant elle appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice ↗ $|f(x)| = e^x$ mais elle oscille fortement en $x \to \infty$

. On remarque que $\underline{f(x)} = \frac{d}{dx} F(x)$

$$\underbrace{F(x) = \frac{1}{i} e^{ie^x}}$$

$$F(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow T_F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

$$\Rightarrow T_f = (T_F)' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

$$|\langle T_F, \varphi\rangle| \leq \left|\int F\varphi\right| \leq \sup|F| \left|\int \varphi\right| \leq C\, N_{d+1}(\varphi)$$

$$\Rightarrow |\langle T_f, \varphi\rangle| = |\langle (T_F)', \varphi\rangle| \leq C'\, N_{d+2}(\varphi).$$

Déf° $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à croissance modérée si, $\forall \beta \in \mathbb{N}^d$,

$\exists C_\beta > 0$ tq
$\exists m_\beta \in \mathbb{N}$

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_\beta (1 + |x|)^{m_\beta}$$

On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonc° à croissance modérée.

Inclut tous les polynômes, ou les fonctions rationnelles n'ayant pas de pôles sur $\mathbb{R}^d$.

$x \mapsto e^x \notin \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

Prop° : si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d) \Rightarrow fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Pr : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ $\qquad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$

$\xrightarrow{\text{Leibniz}}$ $$\underbrace{x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)}_{} \leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |x^\alpha \underbrace{\partial^\gamma f}_{} \partial^{\beta-\gamma} \varphi|$$

$$\leq C_\varphi \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (1+|x|)^{m_\gamma + |\alpha|} |\partial^{\beta-\gamma}\varphi|$$

$\max_{|\alpha|, |\beta| \leq p}$

$$\Rightarrow N_p(f\varphi) \leq C_f \, N_{p+M}(\varphi), \quad M = \max_{|\gamma| \leq \beta} (m_\gamma + |\alpha|)$$

Ex : M. que $vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

- Caractérisat° de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Prop° Si T est 1 distrib° tempérée, T s'étend de façon unique en 1 forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

si $\underset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\varphi_n \in}$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \hat{T}, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \hat{T}, \varphi \rangle .$$

Pv : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \exists (\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, tq $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow |\langle T, \varphi_j - \varphi_k \rangle| \leq C\, N_p(\varphi_j - \varphi_k) \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow (\langle T, \varphi_j \rangle)$ suite de Cauchy ds $\mathbb{C}$, donc converge vers un certain $\underbrace{\langle \hat{T}, \varphi \rangle}$ $\in \mathbb{C}$.

- Si $\underset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}{\psi_j \in} \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow N_p(\psi_j - \varphi_j) \to 0 \Rightarrow \langle T, \psi_j \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \underline{\underline{\langle \hat{T}, \varphi \rangle}}$

On avait $|\langle T, \varphi_j \rangle| \leq C \underbrace{N_p(\varphi_j)}$ $\Longrightarrow |\langle \hat{T}, \varphi \rangle| \leq C \underbrace{N_p(\varphi)}$

$\Rightarrow$ vérifier que $\tilde{T}$ est 1 f. linéaire sur $\mathcal{S}$.

et $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a montré $|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi)$.

$\underset{T \text{ def}^{\text{é}}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{T}$ est 1 f. lin. continue sur $\mathcal{S}$.

Rem : on notera $T = \tilde{T}$ même pour l'extension à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Inversement : toute forme linéaire sur $\mathcal{S}$, satisfaisant $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi)$, est une distribution tempérée lorsqu'on la restreint à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$\rightarrow$ on peut identifier $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des formes lin. C^0 sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- Convergence sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Def : Soit (T_n) une suite de distributions tempérées.

On dit que $T_n \xrightarrow[n \to \infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

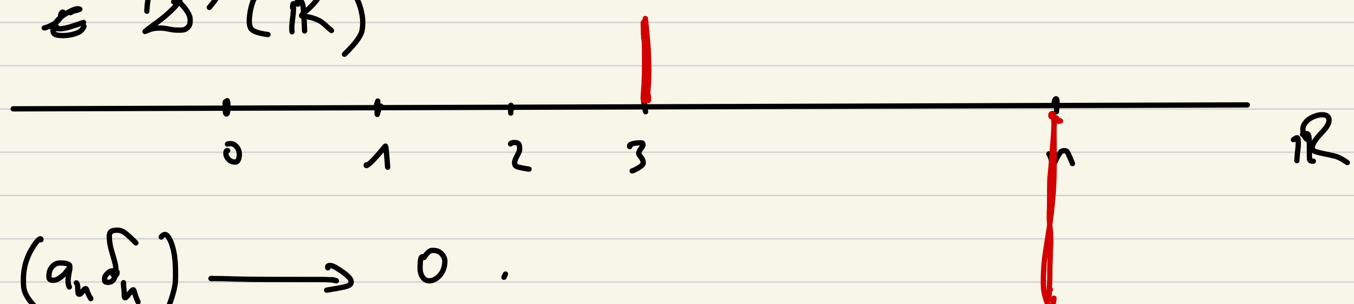
$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle .$$

Propé Si $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\exists\, p\in\mathbb{N}$, $C>0$
t.q $\forall \varphi\in\mathcal{S}$, $\underline{\forall n}$, $|\langle T_n,\varphi\rangle| \leq \underbrace{C\, N_p(\varphi)}_{\text{borne uniforme p/r } n}$.

(conséquence d'1 principe de borne uniforme)

Remarque Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'$, alors $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Par contre, l'inverse n'est pas toujours vrai.

Contre-ex: $\forall (a_n)\subset\mathbb{C}$, la suite de distributions $a_n\delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$



dans $\underline{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$, $(a_n\delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\operatorname{supp}(a_n\delta_n) = \{n\}$

$\Rightarrow \forall \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, si $n > \max(\operatorname{supp}\varphi)$, $\langle\delta_n,\varphi\rangle = 0$

Par contre, si (a_n) n'est pas ↑ modérée, $(a_n\delta_n)$ ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$a_n \delta_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ssi (a_n) est à ↑ modérée :
$\exists\, p, C$ tq $|a_n| \leq C(1+n)^p$, $\forall n$.

<u>Rque</u> : si $f_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^p$, et $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dans L^p,
alors $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Si $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{S}'$, alors $\forall f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$, $f T_n \longrightarrow f T$ dans $\mathcal{S}'$.

$\Longrightarrow$ les opérations $T \longrightarrow f T$, $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$
$T \longrightarrow \partial_j T$
sont continues $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$.

- <u>Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$</u>.

. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, On définit la f. linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donnée par $\varphi \longmapsto \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.
Cette f. linéaire est continue : $|\langle T, \hat{\varphi} \rangle| \leq C N_p(\hat{\varphi}) \leq C' N_{p+d+1}(\varphi)$
On appelle $\hat{T}$ cette f. linéaire, qui est une distribution tempérée.
On l'appelle la transf. de Fourier de T.

<u>Déf :</u> $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On note $\hat{T} = \mathcal{F}(T)$ la distri° tempérée

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

<u>Ex :</u> 1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int d\xi\, \varphi(\xi)\left(\int e^{-ix\xi} f(x)\,dx\right)$$

$\langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int dx\, f(x) \underbrace{\int e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi}$$

$$\int f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \langle f, \hat{\varphi} \rangle$$

$$:= \langle \widehat{(T_f)}, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \widehat{(T_f)} = T_{\hat{f}}$$

$\rightarrow$ la T.F. sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une extension de la TF usuelle sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2) $T = \delta_0$: $\quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle$

$$= \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow \hat{\delta}_0 = 1$ (fonct° constante)

<u>Prop°</u> : La T. de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Son inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\, \check{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-d}\, \mathcal{F}\circ\sigma = (2\pi)^{-1}\sigma\circ\mathcal{F}$, qu'on avait identifié sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, s'étend continûment à tout $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ sont des transf. linéaires <u>continues</u>.
Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}' \Rightarrow \hat{T}_n \to \hat{T}$ dans $\mathcal{S}'$.

- Les propriétés suivantes sont valides sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{F}(D_j T) = \xi_j \hat{T} \qquad \mathcal{F}(\tau_a T) = \underbrace{e^{-ia.\xi}}_{\in\, \mathcal{O}_M} \hat{T}$$

$$\mathcal{F}(x_j T) = -D_{\xi_j} \hat{T} \qquad \mathcal{F}(e^{ia.x} T) = \tau_a \hat{T}$$

<u>Ex</u> : $f(x) = 1,\ \forall x \quad (f = 1)$

$$\hat{f} = \widehat{T_f} = \mathcal{F}(\mathcal{F}\delta_0) = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(\delta_0) = (2\pi)^d \sigma\delta_0$$
$$= (2\pi)^d \delta_0$$

$$\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0.$$

$$\widehat{\delta_{x_0}} = ?$$

$\longrightarrow$ restriction de $\mathcal{F}$ aux distributions $T \subset \underline{L^2}$ ou L^1.

Rappel : $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, l'intégrale $\int f(x) e^{-ix\xi} dx$ n'est pas absolument convergente.

$\Rightarrow \hat{f}(\xi)$ n'est pas forcément définie en tout point ξ.

Prop° Si $T = f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{T} = \mathcal{F}(T) = \hat{f}$.

i) $\mathcal{F}(T)$ est une fonct° continue, $\mathcal{F}(T)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx$,

avec $\mathcal{F}(T)(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0$.

ii) Si de plus $\mathcal{F}(T) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$ p.p.

Pr : la continuité de $\hat{f}$: cf. le thme de Lebesgue de continuité d'1 intégrale à paramètre.

- $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0$: thme de Riemann-Lebesgue.

- On sait que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si $\hat{f} \in L^1$, on a donc $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in L^1$ et est $= f$ p.p.

- <u>Prop</u> (action sur $L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)

L'application $\underset{\mathcal{S}'}{T} \longrightarrow \underset{\mathcal{S}'}{(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}(T)}$ induit une isométrie bijective $L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$.

<u>Preuve</u> : on a montré que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et le thm de Plancherel montre que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et $\|\hat{\varphi}\|_{L^2} = (2\pi)^{d/2}\|\varphi\|_{L^2}$.

$$\Rightarrow \|(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}.$$

$f \in L^2$, $\varphi_n \in \mathcal{S}$, $\varphi_n \to f$ dans L^2

$\Rightarrow \hat{\varphi}_n \longrightarrow \hat{f}$ dans L^2, montrant que $\hat{f} \in L^2$.

et $\|f\|_{L^2} = \|(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}(f)\|_{L^2}$.

$\Rightarrow \mathcal{F} : L^2 \to L^2$ est une transformation <u>unitaire</u>.

<u>Rem</u> : $\exists f \in L^2$, tq $x \longmapsto e^{-ix.\xi}f(x)$ n'est pas intégrable, $\forall \xi$.

ex : $f(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^{3/4}}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{|x|\leq R} e^{-ix\xi} f(x)\,dx := g_R(\xi) \ldots / \ldots$$

Alors g_R converge vers $\hat{f} \in L^2$ au sens L^2 :

$$\| g_R - \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 .$$

en effet : $f \mathbb{1}_{|x| \leq R} \longrightarrow f$ dans L^2.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}(f \mathbb{1}_{|x|<R})}_{g_R} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{F}(f)}_{\hat{f}} \text{ dans } L^2 .$$