Distributions, cours du 4/11

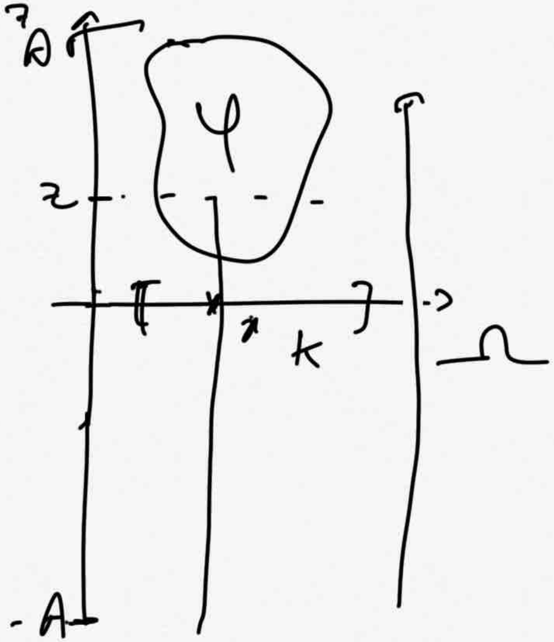
Prop: intégration sous $\langle\, ,\, \rangle$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \, dz = \langle T, \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(\cdot, z)\, dz \rangle$$

Pv $p=1$. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. On choisit $A>0$, $K \subset \Omega$ compact,

tq $\operatorname{supp} \varphi \subset K \times [-A, A]$



$$\psi(x,z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x,t)\, dt = \int_{-A}^{z} \varphi(x,t)\, dt$$

$\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$

$\operatorname{supp} \psi \subset K \times \mathbb{R}$, pas à supp compact en z

$$G(z) = \langle T, \psi(\cdot, z)\rangle = \langle T, \int^{z} \varphi(\cdot, t)\, dt \rangle$$

$G(z)$ est C^∞ et $G'(z) = \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle$ par le théorème de dérivation sous le $\langle\, .\, \rangle$

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z} G'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} \langle T, \varphi(\cdot,t)\rangle\,dt$$

$$= \langle T, \int_{-\infty}^{z} \varphi(\cdot,t)\,dt \rangle$$

en prenant $z = A \longrightarrow$ on a la prop. pour $p = 1$.

$(G(z) = 0$ si $z < -A$, $= z = +\infty)$.

$p > 1 \longrightarrow$ récurrence sur p. $\quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$

$z = (z', t) \qquad z' \in \mathbb{R}^{p-1},\ t \in \mathbb{R}$

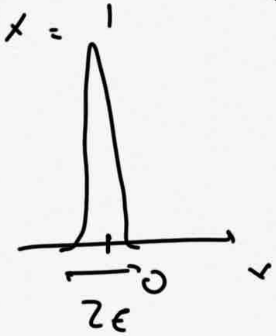
$$\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, z', t)\,dt \rangle \underset{\text{résultat } p=1}{=} \int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot, z', t)\, dt\rangle$$

Ensuite, résultat pour $z' \in \mathbb{R}^{p-1}$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{p-1}} \langle T, \underbrace{\int \varphi(\cdot, z', t)\,dt}_{\Psi(x, z')} \rangle\, dz'}_{} = \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot, z', t)\, dt\rangle$$

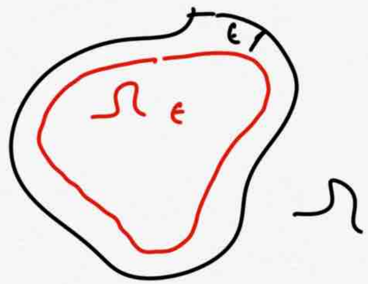
$$= \langle T, \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, z', t)\,dt\right) dz' \rangle = \langle T, \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(\cdot, z)\,dz \rangle \quad ☒$$

Prop. $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}(\rho) \subset B(0,1)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$



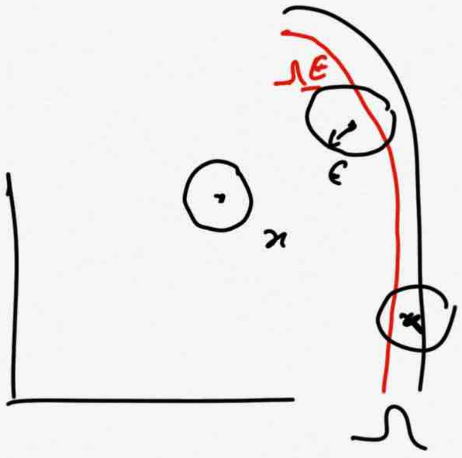
$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d}\,\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Rightarrow \int \rho_\epsilon(x)\,dx = 1$$

$$\Omega^\epsilon = \{x \in \Omega,\ d(x, \complement\Omega) > \epsilon\}$$



$$\rho_\epsilon(x-\cdot) : y \longmapsto \underbrace{\rho_\epsilon(x-y)}_{\text{centrée en } y = x}$$

$$F^\epsilon(x) = \underbrace{\langle T, \rho_\epsilon(x-\cdot)\rangle}$$



$\underline{x \in \Omega^\epsilon} \Rightarrow \rho_\epsilon(x-\cdot)$ supportée dans Ω

Prop :
- F^ϵ est lisse sur Ω^ϵ,
- $\partial^\alpha F^\epsilon(x) = \langle T, \partial^\alpha \rho_\epsilon(x-\cdot)\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$
- $\displaystyle\underbrace{\int_\Omega F^\epsilon(x)\varphi(x)\,dx}_{} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle T, \varphi\rangle$. $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\Rightarrow$ pour ϵ assez petits $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \Omega^\epsilon$

défini si ϵ assez petit.

$$\langle F^\epsilon, \varphi\rangle \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle T, \varphi\rangle$$

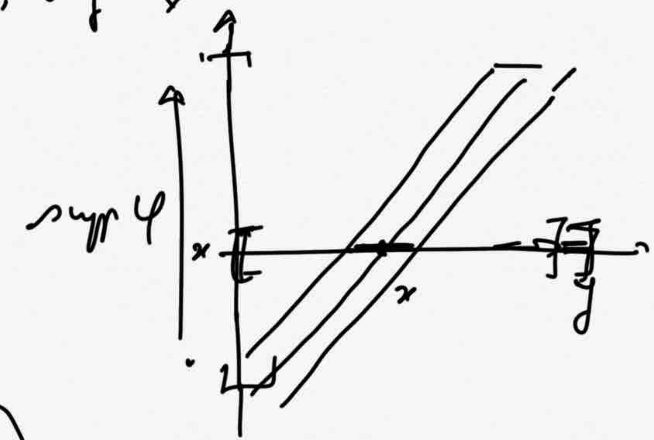
$$\Rightarrow (F^\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve de la prop : On fixe un $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, et on considère $\varphi(x) F^\epsilon(x) = \varphi(x) \langle T, \rho_\epsilon(x - \cdot) \rangle$

$$= \langle T, \underbrace{\varphi(x) \rho_\epsilon(x - \cdot)}_{\text{lisse p/r } x,\ \forall y \cdot x} \rangle$$

ϵ assez petit $\Rightarrow \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^\epsilon$

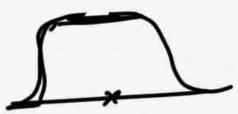
$\operatorname{supp}(\varphi(x)\rho_\epsilon(x-y)) \subset \epsilon$-voisinage de $\operatorname{supp}\varphi \times \operatorname{supp}\varphi$



$\longrightarrow$ thme de dérivations sous $\langle \cdot \rangle$

$$\partial^\alpha(\varphi F^\epsilon)(x) = \langle T, \partial_x^\alpha [\varphi(x) \rho_\epsilon(x - \cdot)] \rangle$$

pour $x_0 \in \Omega$, on peut prendre φ



$$\Rightarrow \partial^\alpha(\varphi F^\epsilon)(x_0) = \langle T, \cancel{\varphi(x_0)} \partial^\alpha \rho_\epsilon(x - \cdot) \rangle$$

$$\cancel{\varphi(x_0)} \partial^\alpha F^\epsilon(x_0) = \langle T, \partial^\alpha \rho_\epsilon(x - \cdot) \rangle$$

- $\langle F^\epsilon, \varphi \rangle = \int \varphi(x) F^\epsilon(x)\, dx = \int \varphi(x) \langle T, \rho_\epsilon(x - \cdot) \rangle\, dx$

$$= \langle T, \underbrace{\int \varphi(x) \rho_\epsilon(x - \cdot)\, dx}_{\hookrightarrow \varphi_\epsilon(y)} \rangle$$

intégration et crochet

$\varphi_\epsilon =$ convolu: $\varphi * \overline{\rho_\epsilon}$

$\overline{\rho_\epsilon}(z) = \rho_\epsilon(-z)$

$$\varphi_\epsilon(y) = \int \varphi(x)\, \rho_\epsilon(x-y)\, dx$$
$$= \int \varphi(y+\epsilon z)\, \rho(z)\, dz$$

si ϵ assez petit φ_ϵ supporté dans $\text{supp}(\varphi)_\epsilon$ (ϵ-voisinage de $\text{supp}\,\varphi$, $\subset \Omega$ si ϵ petit).

$\varphi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, $\partial^\alpha \varphi_\epsilon(y) = \int \partial^\alpha \varphi(y+\epsilon z)\, \rho(z)\, dz$

$\epsilon \to 0$, $\partial^\alpha \varphi_\epsilon \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément.

si $\underline{\epsilon < \epsilon_0} \Rightarrow \text{supp}\,\varphi_\epsilon \subset \underbrace{(\text{supp}\,\varphi)_{\epsilon_0}}_{1}$

$\Rightarrow \varphi_\epsilon \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

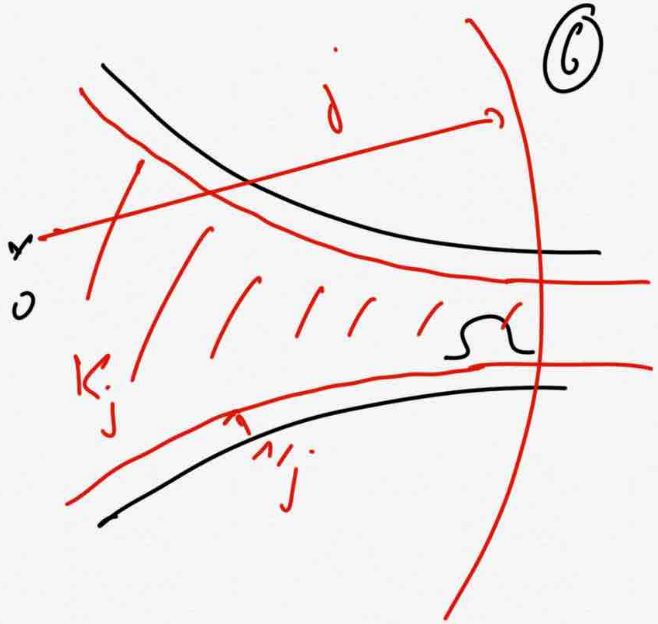
$$\langle T, \varphi_\epsilon \rangle \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle T, \varphi \rangle \quad \Rightarrow \quad F^\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} T \text{ dans } \mathcal{D}' \quad \square$$

$$\varphi(x) F_\epsilon(x) \in C_c^\infty(\Omega)$$

<u>Corollaire</u> Toute distribution sur Ω est la limite d'une suite de fonctions test.

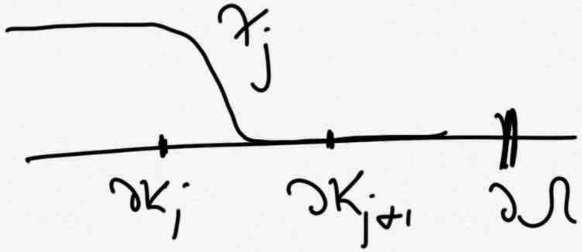
<u>Preuve</u> : Suite de compacts K_j tq $\bigcup_j K_j = \Omega$

$$K_j = \{ x \in \Omega,\ d(x, \complement\Omega) \geq \tfrac{1}{j},\ |x| \leq j \} \quad \text{compact}$$



$\Rightarrow \bigcup_j K_j = \Omega$, $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$

$\chi_j \in C_c^\infty(\mathring{K}_{j+1})$, fonction plateau près de K_j



suite $\epsilon_j \longrightarrow 0$ tq

$(K_{j+1})_{\epsilon_j} \subset \Omega \Rightarrow \epsilon_j < \frac{1}{j+1}$

$\longrightarrow$ définit $F_j(x) = \underbrace{\chi_j(x)}_{\substack{=1 \text{ sur } K_j \\ \text{supp} \subset K_{j+1} \subset\subset \Omega}} \underbrace{\langle T, \rho_{\epsilon_j}(x-\cdot)\rangle}$ ← bien définie si $x \in K_{j+1}$

$\longrightarrow F_j \in C_c^\infty(\Omega)$, supportée dans K_{j+1}

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\exists j_0$ tq $\underline{\text{supp}\,\varphi \subset K_{j_0}} \subset K_j$ si $j \geq j_0$

$j \geq j_0 \longrightarrow \underline{\int \varphi(x) F_j(x)\, dx} = \underbrace{\int \varphi(x) \underbrace{\cancel{\chi_j(x)}}_{=1}} \langle T, \rho_{\epsilon_j}(x-\cdot)\rangle\, dx \xrightarrow[\epsilon_j \to 0]{} \underline{\langle T, \varphi\rangle}$

$\Rightarrow F_j \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'$

Corollaire Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $\forall j = \{1, \dots, d\}$, $\partial_j T \in C^0(\Omega)$.

Alors $T \in C^1(\Omega)$.

$\partial_j T = T_{f_j}$, pour $f_j \in C^0$

Différence avec cas $d = 1$:

$d = 1$ $\quad T' = L_{loc} \longrightarrow T \in C^0$

$d > 1$ $\quad \partial_j T \in L^1_{loc} \not\longrightarrow T \in C^0$

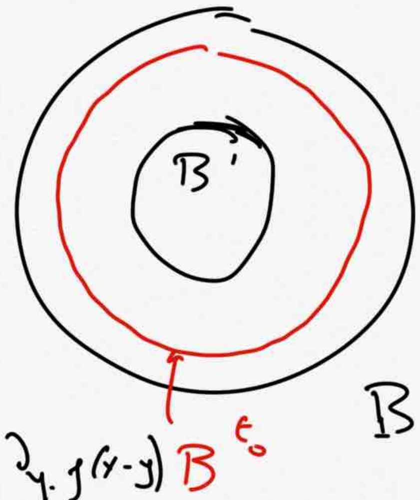
$\longrightarrow T \in L^p_{loc}$, $p = \frac{d}{d-1}$

(estimée de Sobolev)

B boule $\subset \Omega \longrightarrow$ vérifier la propriété dans B.

$\Longleftrightarrow$ supposons que $\Omega =$ boule B.

$\longrightarrow$ par recollement de boules, on aura montré la propriété dans tout Ω.



· $\partial_j T = T_{f_j}$, $f_j \in C^0(B)$.

$F^\varepsilon(x) = \langle T, \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$ définie dans B^{ε_0} si $\varepsilon < \varepsilon_0$.

$\partial_j F^\varepsilon(x) = \langle T, \partial_{x_j} \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$

$\partial_{x_j} \rho(x-y) = -\partial_{y_j} \rho(x-y)$

$= -\langle T, \partial_{y_j} \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$

$= \langle \partial_j T, \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle = \int f_j(y) \rho_\varepsilon(x-y)\, dy = f_j * \rho_\varepsilon(x)$

$$F^\epsilon \longrightarrow T \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Rightarrow \partial_j F^\epsilon \longrightarrow \partial_j T = f_j$$

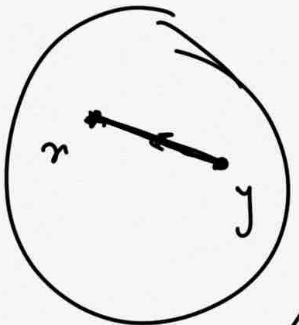
$f_j \in C^0$

$$\partial_j F^\epsilon(x) = \underline{f_j * \rho_\epsilon} \Rightarrow f_j * \rho_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f_j \text{ uniformément dans } \overline{B'} \subset\subset B$$

$\cdot\ \chi \in \mathcal{D}'(B')$, tq $\int_{B'} \chi = 1$

$$F^\epsilon(x) - \int_B \chi(y) F^\epsilon(y)\, dy = \int_B \chi(y) \left(F^\epsilon(x) - F^\epsilon(y)\right) dy$$

$$\int_B \chi(y) \left[\sum_{j=1}^{d} \int_0^1 (x_j - y_j)\, \partial_j F^\epsilon(y + t(x-y))\, dt\right] dy$$



$$\partial_j F^\epsilon(y + t(x-y)) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f_j(y + t(x-y)) \text{ uniformément}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 dt \left(\int_B \chi(y)(x_j - y_j)\, \partial_j F^\epsilon(y + t(x-y))\, dy \right)$$

$$\int_B \chi(y) F^\epsilon(y)\, dy \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle T, \chi \rangle$$

$$\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \int dt \int \chi(y)(x_j - y_j)\, f_j(y + t(x-y))\, dy}_{\tilde F(x)}$$

$$F^\epsilon(x) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \langle T, \chi \rangle + \tilde F(x)$$

$\Longrightarrow$ on a montré que $F_\epsilon \longrightarrow \underbrace{\langle T, \chi \rangle * \tilde{F}}_{F}$ uniformément sur B'

$\partial_j F^\epsilon \xrightarrow[\text{unif}^t]{} f_j$ dans B'

$\Longrightarrow F$ est C^1 dans B'.

Et on a aussi $T_{|B'} = T_F$ car $T_{|B'} = \lim_{\epsilon \to 0} T_{F^\epsilon |B'}$.

Lemme (utilise le thme de borne uniforme)

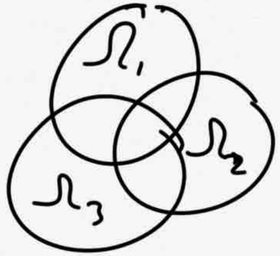
Bicontinuité du crochet.

$T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'$

$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}$.

Alors $\langle T_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Prop$^{\circ}$ (T_n) suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$.



On supp. que $\forall j$, $(T_n)_{|\Omega_j} \xrightarrow[n \to \infty]{} T^{(j)}$

Alors T_n a une limite T lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(limites locales $\longrightarrow$ limite globale)

<u>Preuve</u> : K compact de Ω. $\qquad \bigcup \Omega_j = \Omega$

$\left(\bigcup_{j \in J_K} \Omega_j \supset K \right) \longrightarrow$ recouvrement fini (χ_j)

$\operatorname{supp} \chi_j \subset \Omega_j$, $\sum_{j \in J_K} \chi_j = 1$ sur K

(J_K) fini

$\Rightarrow$ $\underline{\forall \varphi \text{ supp. dans } K}$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{j \in J_K} \langle T_n, \chi_j \varphi \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{j \in J_K} \langle T^{(j)}, \chi_j \varphi \rangle$$

$$= \sum_{j \in J_K} \langle T_n|_{\Omega_j}, \chi_j \varphi \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{j \in J_K} \langle T^{(j)}, \chi_j \varphi \rangle$$

$$|\langle T^{(j)}, \chi_j \varphi \rangle| \leq C_j \, \| \chi_j \varphi \|_{C^{m_j}}$$

$$\Rightarrow |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \sum_j C_j \, \| \chi_j \varphi \|_{C^{m_j}}$$

$$\leq C_\chi \, \| \varphi \|_{C^m}$$

$\Rightarrow$ la limite est une distribution sur Ω.

$$m = \max_{j \in J_K} m_j$$

$\blacksquare$

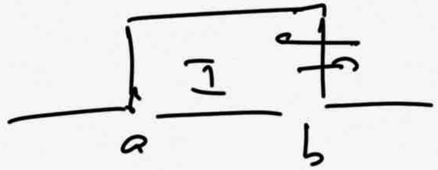
Mesures superficielles et formule des sauts.

But : U ouvert dans $\Omega \longrightarrow \mathbb{1}_U \in L^\infty(\Omega)$

$\underbrace{\partial_j \mathbb{1}_U} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ quel type de distribution ?

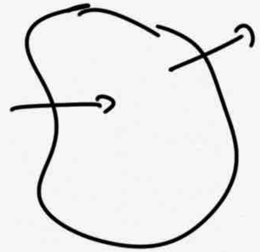
$d = 1$: $U = I$ intervalle $\qquad I =]a,b[$

$$\frac{d}{dx}(\mathbb{1}_I) = \underbrace{\delta_a}_{\geq 0} - \delta_b$$



U ouvert général $\longrightarrow \partial U$ peut être très compliqué !

$\longrightarrow$ se restreindre à des U "réguliers", dont la frontière est "propre".



Def : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi \geq 0$ alors $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$.

$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

Prop : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ positive $\Rightarrow T$ est d'ordre zéro.

$K \subset\subset \Omega$, $\chi \in C^\infty(\Omega)$ plateau sur K. $\varphi \in C_c^\infty(K, \mathbb{R})$

$\forall x, \quad -\|\varphi\|_\infty \chi(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \chi(x) \qquad -\langle T,\chi\rangle \|\varphi\|_\infty \leq \langle T, \varphi \rangle \leq \langle T,\chi\rangle \|\varphi\|_\infty$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi + \|\varphi\|_\infty \chi \geq 0 \\ \|\varphi\|_\infty \chi - \varphi \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle T, \varphi + \|\varphi\|_\infty \chi \rangle \geq 0 \\ \langle T, \|\varphi\|_\infty \chi - \varphi \rangle \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T,\chi\rangle \|\varphi\|_\infty$

$\longrightarrow$ Ordre 0.

$T \geq 0 \Rightarrow T$ d'ordre 0

$\Rightarrow T$ peut s'étendre à 1 forme linéaire continue positive sur $\underline{C_c^0(\Omega)}$.

$\longrightarrow T$ est équivalente à 1 mesure de Borel ≥ 0 finie sur tout compact.

<u>Théorème</u> Toute distribution $T \geq 0$ sur Ω correspond à 1 unique mesure de Borel μ, finie sur tout compact.

$$\forall \varphi \in C_c^0(\Omega), \ \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, d\mu \ .$$

$\Longrightarrow$ <u>Mesures superficielles</u>.