

Cours Distributions, 5/11/2020

①

Mesures superficielles

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 .

Hypothèse: $\forall x \in \Omega, f(x) = 0 \Rightarrow \nabla f(x) \neq 0$.

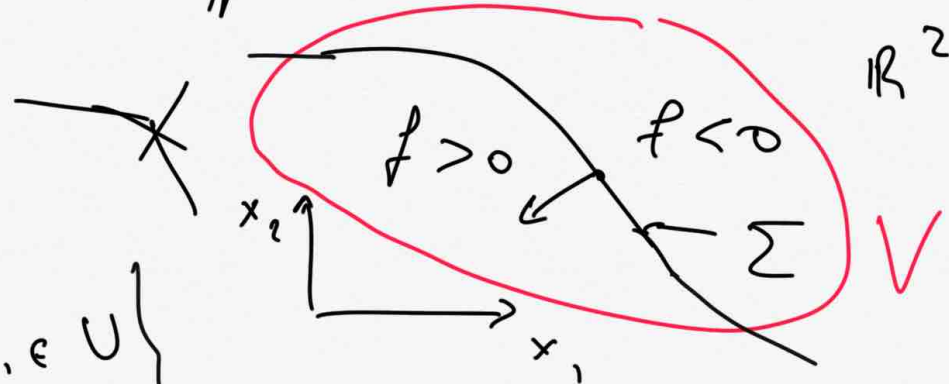
$\Sigma = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ = ensemble nodal de la fonction f .

noeud d'une onde stationnaire = point où l'onde est nulle.

Théorème des fonctions implicites : Hypothèse $\Rightarrow \Sigma$ est localement une hypersurface C^1

locally
$$V \cap \Sigma = \left\{ (x_1, g(x_1)), x_1 \in U \right\}$$

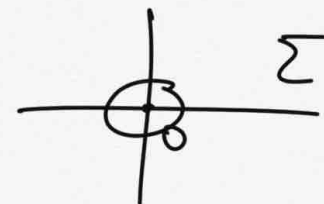
 $g \in C^1$.



Counter-example:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\Rightarrow \Sigma =$$



Thème Il existe une distrib. positive $\delta(f)$, supporté sur Σ , ②
 tq $\forall h \in C^0(\mathbb{R})$, $\int h(q) d\tau = 1$, la famille de fonctions

$$\mu_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right) \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } \delta(f)$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

De +, si g est une fonction dans $C^1(\Omega)$ définissant Σ (avec la même hypothèse que pour f), alors $|\nabla g| \delta(g) = |\nabla f| \delta(f)$

$$\left(\begin{array}{l} \Sigma = \bar{g}^{-1}(0) \\ \nabla g \neq 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right)$$

$$\delta(g) = \frac{|\nabla f|}{|\nabla g|} \delta(f)$$

car ∇f et ∇g sont non nuls sur Σ .

Rem: si $\Sigma = f^{-1}(0)$ et $\nabla f|_\Sigma \neq 0$

$F \in C^1(\Omega)$ non nulle

$\rightarrow g = F \circ f$ définit encore Σ :

$$\Sigma = \bar{g}^{-1}(0)$$

$$\text{et } \nabla g|_\Sigma = \underbrace{\nabla F \circ f}_{=0} \Big|_\Sigma + \underbrace{F \cdot \nabla f}_{\neq 0} \Big|_\Sigma$$



P.V.: on n'a besoin de regarder les choses que localement (dans des boîtes), puis recoller les morceaux. ③

B_a vérifier que $\mu|_{B_a} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mu|_{B_a}^{\geq 0}$ une certaine distrib^o

— par le coll^t on construit $\delta(f)$ tq
 $\delta(f)|_{B_a} = \mu|_{B_a} \Rightarrow \delta(f) \geq 0$.

Soit $a \in \Omega$ tq $f(a) > 0$.

$$\mu_\epsilon^{(f)} = \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right)$$



$f > 0 \Rightarrow \exists B_a$ tq $f|_{B_a} \geq c > 0$.



$h \in C_c(\mathbb{R})$ (ex: $\text{supp}(h) \subset [-1, 1]$)

$\Rightarrow$ si $\epsilon < c \Rightarrow$ sur B_a , $\frac{f(x)}{\epsilon} > 1$

$\Rightarrow \mu_\epsilon|_{B_a} = 0$

si $\epsilon < c \Rightarrow B_a \cap \text{supp } \mu_\epsilon = \emptyset$

$\Rightarrow \mu_\epsilon|_{B_a} = 0 \Rightarrow$ si $\mu_\epsilon \rightarrow \delta(f)$,

la limite $\delta(f)$ est

$$\bigcap_{\epsilon > 0} K_\epsilon = \sum_{\epsilon} K_\epsilon$$

$\Rightarrow \text{supp } \delta(f) \subset \sum$ tel que $\text{supp } \delta(f) \cap B_a = \emptyset$.

(4)

$$a \in \Sigma : f(a) = 0$$

$$\nabla f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, d\} \text{ s.t. } \partial_j f(a) \neq 0. \quad \text{Ex: } j=1$$

$$x = (x_1, y), \quad y = (x_2, \dots, x_d)$$

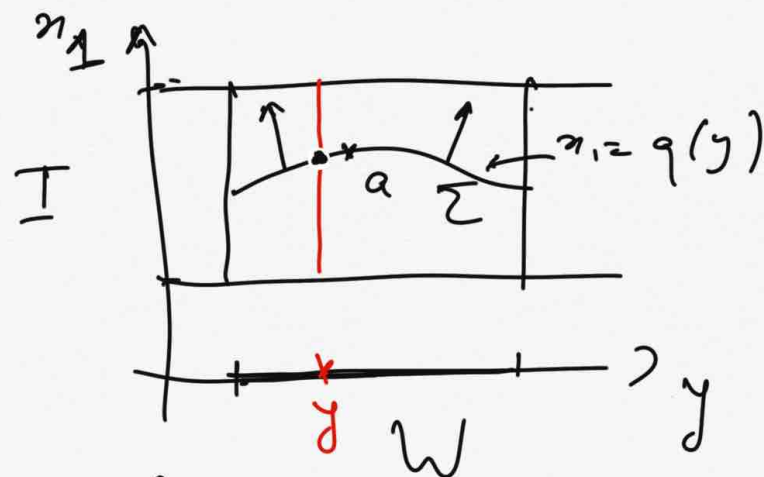
Thm. implicit: $\exists$ intervalle $I \subset \mathbb{R}$, W ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$, s.t.

$$a = (a_1, b) \in I \times W$$

$$\text{s.t. } q: W \rightarrow I \text{ s.t.}$$

$$\forall (x_1, y) \in I \times W \text{ (cylinder)}$$

$$f(x_1, y) = 0 \Leftrightarrow x_1 = q(y)$$



$$\partial_{x_1} f \neq 0 \Leftrightarrow \nabla f \cdot e_1 \neq 0$$

Formule de Taylor p.r. à x_1 , basée en $x_1 = q(y)$

$$f(x_1, y) = f(q(y), y) + (x_1 - q(y)) \int_0^1 \partial_1 f(q(y) + t(x_1 - q(y)), y) dt$$

$$= (x_1 - q(y)) m(x_1, y)$$

Factorisation de f .

$$m(q(y), y) = \partial_1 f(q(y), y) \neq 0$$

$$\rightarrow \text{calcul de } \int \mu_f(x) \psi(x) dx, \quad \psi \in \mathcal{D}(I \times W) \\ C_0^\infty(I \times W)$$

(5)

$$\int_{I \times W} \psi p_\epsilon dx = \int_W \int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{(x - q(y)) m(y, y)}{\epsilon}\right) dx dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{(x - q(y)) m(y, y)}{\epsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(q(y) + \epsilon z, y) \times h(z m(q(y) + \epsilon z, y)) dz$$

change coord. $x = q(y) + \epsilon z$

(conv. dominic)

$\epsilon \rightarrow 0$

$$\int \psi(q(y), y) h(z m(q(y), y)) dz$$

Rem:

$$\langle |Df| S(f), \psi \rangle$$

$$= \langle S(f), |Df| \psi \rangle$$

justify can we put
standard $S(f)$ and
function C^0 .

$$= \psi(q(y), y) \int_{\mathbb{R}} h(z m(q(y), y)) dz$$

$$= \frac{\psi(q(y), y)}{|m(q(y), y)|} \quad \partial_t f(q(y), y) \neq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1$$

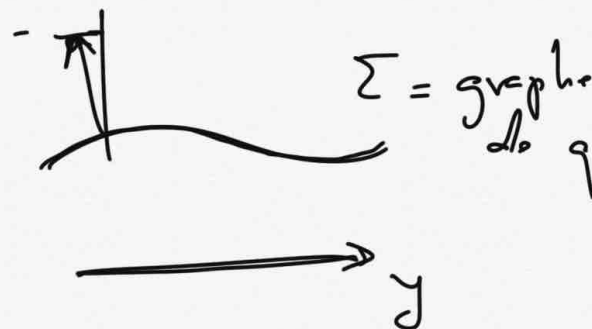
$$= \frac{\psi(q(y), y)}{|\partial_t f(q(y), y)|}$$

Limit $\epsilon \rightarrow 0$ and
uniforme par $\epsilon \in W$

$$\rightarrow \int_{I \times W} \psi p_\epsilon dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0}$$

$$\int \frac{\psi(q(y), y)}{|\partial_t f(q(y), y)|} dy$$

$\neq 0$



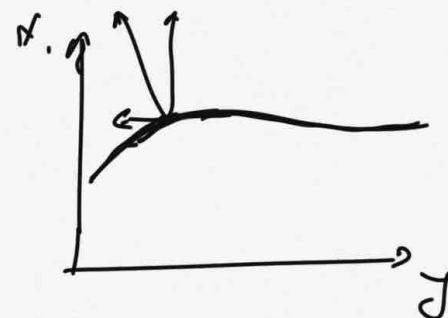
⑥

$$f(q(y), y) = 0, \forall y \in W$$

$$\hookrightarrow (\nabla_y f)(q(y), y) + \nabla_1 f(q(y), y) \cdot \nabla q(y) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(q(y), y) = \nabla_1 f(q(y), y) \begin{pmatrix} 1 \\ -\nabla q(y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\nabla f(q(y), y)| = |\nabla_1 f(q(y), y)| \sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2}$$



$$\int \varphi \mu_c \longrightarrow \int_W \varphi(q(y), y) \frac{\sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2}}{|\nabla f(q(y), y)|} dy := \langle \delta(f), \varphi \rangle_{I \times W}$$

$\delta(f)$ distri d'ordre 0 $\Rightarrow$ on peut le multiplier par $1 \in C^0$.

$$\langle |\nabla f| \delta(f), \varphi \rangle = \int \varphi(q(y), y) \sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2} dy$$

f non unique pour déterminer Σ , mais q est (localement) unique

En fait: Σ

$\Sigma = \{g\}$ dans $I \times W$

$\Sigma \hookrightarrow q$ unique dans $I \times W$.

$$\hookrightarrow |\nabla g(q(y), y)| = \nabla_1 g \begin{pmatrix} 1 \\ -\nabla q(y) \end{pmatrix}, \quad |\nabla g(q(y), y)| = \dots$$

$$\langle |\nabla g| \delta(g), \varphi \rangle = \int \varphi(q(y), y) \sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2} dy = \langle |\nabla f| \delta(f), \varphi \rangle = \langle |\nabla g| \delta(g), \varphi \rangle_{I \times W} \quad \square$$

$\Rightarrow |\nabla f| \delta(f)$ est intuitivement défini par l'hyperurface Σ . ⑦

Def: La mesure surfacique de Σ est la distribution positive $\sigma = |\nabla f| \delta(f)$, pour f une fonction C^1 définissant Σ ($\Sigma = f^{-1}(0)$, $\nabla f|_{\Sigma} \neq 0$).

i) $\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right) \psi(x) dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \psi(x) \frac{d\sigma(x)}{|\nabla f(x)|}$

ii) si $\Sigma \cap (I \times W) = \{(q(y), y), y \in \Sigma\}$, $q \in C^1$, $\langle \delta(f), \psi \rangle$

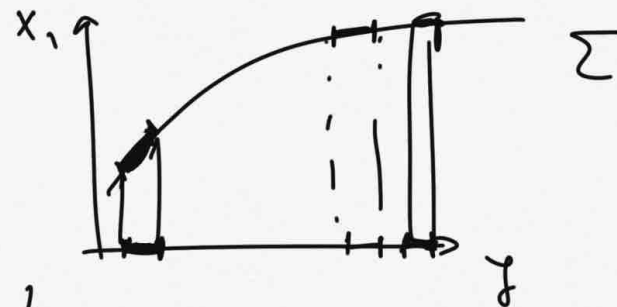
$\Rightarrow \forall \psi \in C^0(I \times W)$

$$\int_{I \times W} \psi(x) d\sigma(x) = \int \psi(q(y), y) \underbrace{\sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2}}_{\text{}} dy$$

$\nabla q(y)$ = "pente" de Σ
au point $(q(y), y)$

δy élément d'arc (d-1)-dim

$\rightarrow \delta y \sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2}$ = aire correspondante sur l'hyperurface.



Ex: mesure surfacique d'une sphère.

⑧

$r > 0$ $f_r: \mathbb{R}^d \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\underbrace{\mathbb{R}^d \setminus 0}_{\Omega}$
 $x \mapsto |x| - r$

$\{f_r = 0\}$ = la sphère S_r de rayon r , centrée en $x = 0$.

$|\nabla f_r|(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$.

dans l'hémisphère Nord,

$$S_r = \{ (q(y), y), y \in \mathbb{R}^{d-1}, |y| \leq r \}$$

pour $q = \sqrt{r^2 - |y|^2}$, $|y| < r$

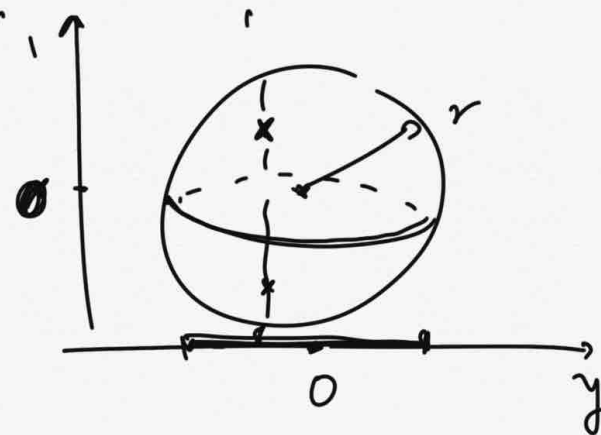
$$\nabla q(y) = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}, \quad (1 + |\nabla q|^2(y))^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}$$

→ mesure superf. $\sigma_r = \delta(f_r) |\nabla f_r|$

si $\varphi \in \mathcal{D}(\{r_i > 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}\})$

$$\rightarrow \int \varphi \sigma_r = \int_{\substack{r_i > 0 \\ y \in \mathbb{R}^{d-1} \\ |y| < r}} \varphi(\sqrt{r^2 - |y|^2}, y) \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}$$

$\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\{r_i < 0, y \in \mathbb{R}^d\}) \rightarrow \int \varphi \sigma_r = \int_{|y| < r} \varphi(-\sqrt{r^2 - |y|^2}) \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - |y|^2}}$ singularité intégrable

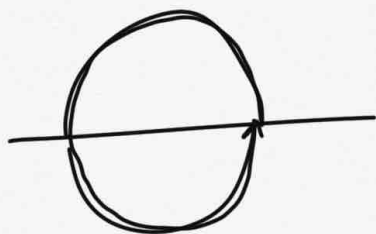
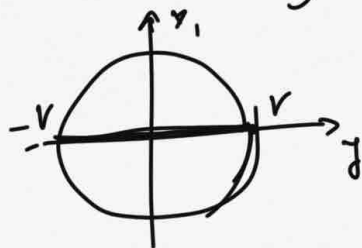


$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\sigma_r(x) = \underline{r^{d-1}} \int \varphi(r y) d\sigma_1(y)$$

$\varphi = 1$ pr la S_r $\rightarrow$ aire totale de la sphère

P_r revenir à la def^{te} par lim $\frac{1}{\epsilon} \ell\left(\frac{|x|-r}{\epsilon}\right)$, puis chang^t de var.

$$\underline{d=2} \quad \int \varphi(x) d\sigma_r(x) = r \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$



$$\left[\begin{array}{l} |y| < r \\ y = r \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi] \\ q(y) = r \cos \theta \quad (q > 0) \end{array} \right] \left| \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - |y|^2}} = \frac{r d\theta}{r \cos \theta} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = r \sin \theta \quad \theta \in [0, \pi] \\ q(y) = -r \cos \theta \quad (q < 0) \end{array} \right] \quad \frac{\int_0^\pi \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta}{r \int_0^\pi \varphi(-r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta}$$

$$\hookrightarrow r \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

Formule de la co-aire : intégrer une fonction le long de ses courbes de niveau. (10)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, C^1, \forall x \in \Omega, \nabla f(x) \neq 0.$ (f n'a pas de point critique)

$\Rightarrow f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Si Ω connexe, $f(\Omega)$ = intervalle ouvert.

Si $t_0 = f(a), a \in \Omega \Rightarrow \nabla f(a) \neq 0$, par ex $\partial_1 f(a) \neq 0$

$\rightarrow$ dans 1 petit voisinage de a , $\partial_1 f(x) \neq 0$

$a = (a_1, b) \Rightarrow x \mapsto f(x, b)$ strict $\uparrow$ près de a_1 .

hypersurface de niveau
de f

$\Rightarrow f(a)$ ne peut pas être un max., ni un min. local.

$\forall t \in f(\Omega)$, soit $\Sigma_t = f^{-1}(t)$ hypersurface $\Rightarrow \exists$ petit intervalle $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset f(\Omega)$
 σ_t = mesure surfacique sur Σ_t .

Prop: $\forall \varphi \in C_c^0(\Omega),$

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}, f(\Omega)} \left(\int_{\Sigma_t} \varphi(x) \frac{d\sigma_t}{|\nabla f(x)|} \right) dt$$

formule de la co-aire

(11)

Preuve: $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \int h = 1$ $\text{supp } h \subset [-1, 1]$

$\forall x \in \Omega$ $\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{f(x)-t}{\epsilon}\right) dt = \underline{1}$
 localisé dans $\{t; |f(x)-t| < \epsilon\}$

$\int_{\Omega} \psi(x) dx = \int_{\Omega} dx \psi(x) \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{f(x)-t}{\epsilon}\right) dt \right)$
 Fubini $\longrightarrow = \int_{\mathbb{R}} dt \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{f(x)-t}{\epsilon}\right) \psi(x) dx \right)$
 $I \in (t)$

Soit $t \in f(\Omega) \rightarrow$
 $x \mapsto f(x) - t$ définit Σ_t $\Sigma_t = \{x \mid f(x) - t = 0\}$
 $\epsilon \rightarrow 0 \quad \nabla_x (f(x) - t) = \nabla f(x)$

$= \int dt \left(\int_{\Sigma_t} \psi(x) \frac{d\sigma_t(x)}{|\nabla f(x)|} \right)$

si $t \notin f(\Omega) \Rightarrow f(x) - t \neq 0 \quad \forall x$
 $x \in \text{supp } \psi \rightarrow |f(x) - t| \geq c > 0$ si ϵ petit $h\left(\frac{f(x)-t}{\epsilon}\right) = 0$ partant $\int \psi$

(12)

$$I_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{f(x)-t}{\epsilon}\right) \varphi(x) dx$$

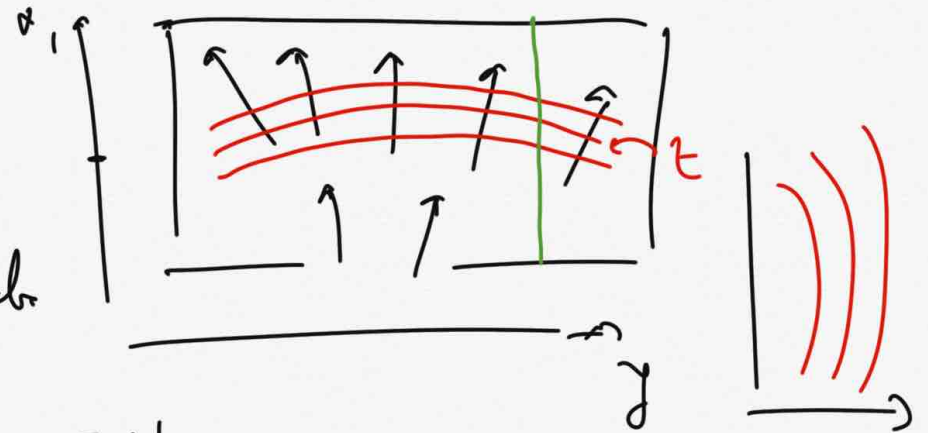
$x \in \text{supp}(\varphi) \Rightarrow \{f(x)\}_{x \in \text{supp}(\varphi)}$ est un compact de $\mathbb{R}$

h à supp. compact $\Rightarrow I_\epsilon(t)$ à supp. compact, uniforme p/r à ϵ .

$\rightarrow$ vérifier que I_ϵ est unif⁺ borné?

$\rightarrow$ on peut se ramener à des petits cylindres $I \times W, t_\epsilon$
 $\partial, f \neq 0$ sur W .

$\forall t, \sum_t$ sera défini par le graph
 de $q_t: W \rightarrow I, t$ proche
 $q_t(y) = q(y, t)$



$\rightarrow C^1$ globalement sur $I \times W$

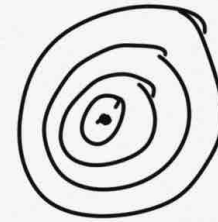
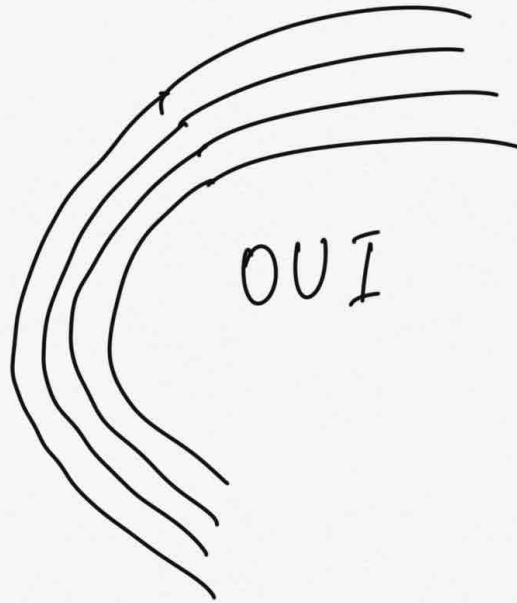
$$I_\epsilon(t) = \int_W \int_I \frac{1}{\epsilon} h\left(\frac{m(x, y, t)(x - q(y, t))}{\epsilon}\right) \varphi(x, y) dy dx$$

factorisation locale

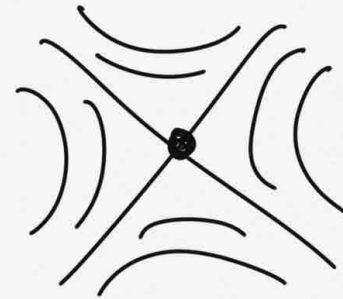
$$= \int_W \int_{\mathbb{R}} h\left(m(q(y, t) + \epsilon z, y, t) z\right) \varphi(q + \epsilon z, y) dz dy \quad \underline{\underline{|m| \geq \epsilon}}$$

Forme des feuilletages

$\nabla f \neq 0$ partout $\Rightarrow$



NON



NON

13