Cours Distributions et transf. de Fourier

S. Nonnenmacher

12 Nov. 2020

Distributions – 12/11/2020

Formule de la co-aire : $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx = \int_{f(\Omega)} \int_{\Sigma_t} \varphi(x) \frac{d\sigma_t}{|\nabla f(x)|}\, dt$

dim 1 : $f : \Omega = I \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) \neq 0 \Rightarrow f$ strict^{t} monotone sur I.

$\Sigma_t = \{ f^{-1}(t) \}$, $d\sigma_t = \delta_{f^{-1}(t)}$ masse de Dirac.

$$\int_{f(I)} \int \varphi(x) \frac{d\sigma_t}{|\nabla f(x)|} = \int_{f(I)} \underbrace{\int \varphi(x) \frac{\delta_{f^{-1}(t)}(x)}{|f'(x)|}}$$

$$= \int_{f(I)} \frac{\varphi}{|f'|} (f^{-1}(t))\, dt$$

$y = f^{-1}(t)$

$\Leftrightarrow f(y) = t$

$f'(y)\,dy = dt$

Si f est $\nearrow \rightarrow f' > 0$

$$= \int_{\min f(I)}^{\max f(I)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} \underbrace{f'(y)\,dy}_{\text{Jacobien}}$$

$$= \int_{\min(I)}^{\max(I)} \varphi(y)\,dy$$

Ex : intégration sur des sphères concentriques :

$\varphi \in C^0_c(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S_1} \varphi(r\omega)\, d\sigma_1(\omega)\, r^{d-1}\, dr$$

Pr : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \underbrace{d\sigma_r(x)}_{\text{supp. sur } S_r} = r^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(r\omega) \underbrace{d\sigma_1(\omega)}_{\text{supp. sur } S_1}$.

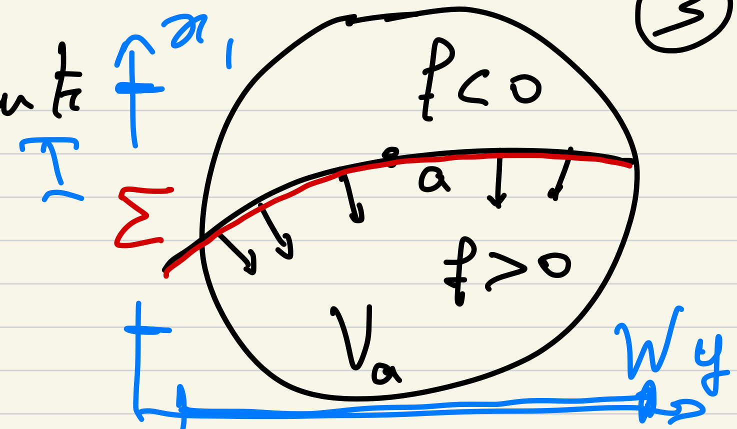
(Fubini en coordonnées sphériques.

- On est parti de $f \rightsquigarrow \Sigma = f^{-1}(0)$ avec l'hyp que $\nabla f|_\Sigma \neq 0$.

- Def $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Une hypersurface C^1 fermée de Ω est un sous-ensemble $\Sigma \subset \Omega$ ayant la propriété suivante :
$\forall a \in \Sigma$, $\exists$ voisinage $V = V_a$ de a dans Ω, tq $\exists$ fonction $f : V_a \to \mathbb{R}$, C^1, avec :

$$\Sigma \cap V_a = \{x \in V_a,\ f(x) = 0\} \text{ et } \forall x \in V \cap \Sigma,\ \nabla f(x) \neq 0.$$

Localement, Σ a la forme précédente

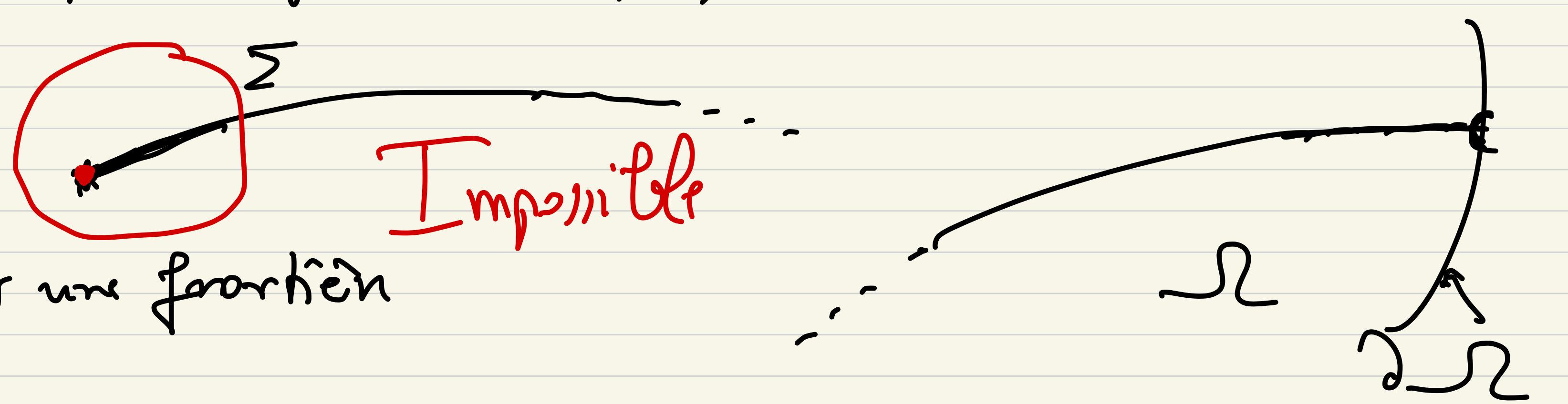


⚠ On ne suppose pas l'existence d'une fonction f <u>globale</u> définissant Σ !

Des contraintes topologiques peuvent exclure l'existence d'une fonction f globale.
Il n'y a pas forcément un "intérieur" et un "extérieur" par rapport à l'hypersurface.

Si local^t $\Sigma \cap V = \{ x_1 = g(y),\ y \in W \}$ avec $g : W \to \mathbb{R}$ C^1, alors on peut définir $f(x_1, y) = x_1 - g(y)$ sur $W \times I$

Rem: sur $\mathbb{R}^2$: Σ ne peut pas avoir une frontière



(4)

Prop° Soit Σ une hypersurf. C^1 fermée dans Ω. Alors $\exists !$ distribution σ supportée sur Σ t.q. : $\forall$ ouvert $V \subset \Omega$, $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ tq $\Sigma \cap V = f^{-1}(0)$, et $\nabla f_{|\Sigma \cap V} \neq 0$, on a, dans V,

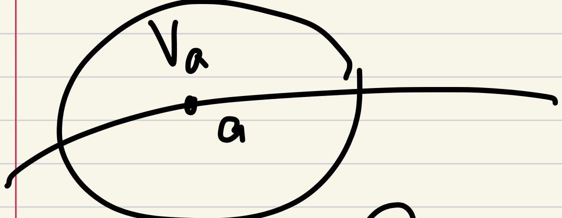
$$\boxed{|\nabla f| \, \delta(f) = \sigma_{|V}}$$

De plus, supp $\sigma = \Sigma$.

Pr. Existence et unicité de σ : par le thm de recollement.

$\forall a \in \Sigma$, on considère V_a ouvert de Ω, contenant a, dans lequel $\Sigma \cap V_a = f_a^{-1}(0)$, pour une fonction f_a C^1, avec $\nabla f_{a|\Sigma} \neq 0$.

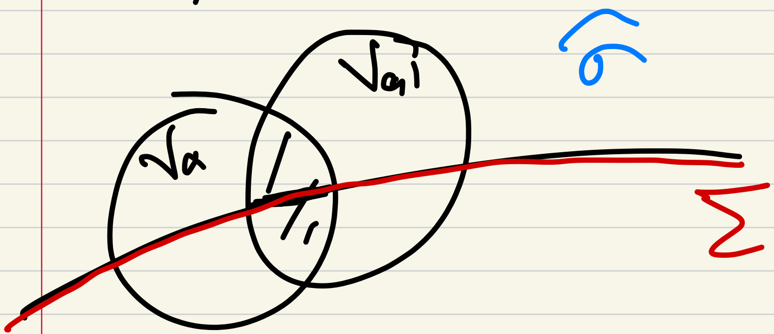
$\rightarrow$ on définit, sur V_a, la distr. $\sigma_a = |\nabla f_a| \, \delta(f_a)$



. Dans $(\Omega \setminus \Sigma)$, on définit la distribution nulle $\tilde{\sigma} = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega \setminus \Sigma)$.

$$\Omega = \bigcup_{a \in \Sigma} \underbrace{V_a}_{\sigma_a} \cup \underbrace{(\Omega \setminus \Sigma)}_{\tilde{\sigma}}$$

Thm des recollements : si $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = \sigma_{a'} \text{ sur } V_a \cap V_{a'}, \\ \sigma_a = \tilde{\sigma} \text{ sur } V_a \cap (\Omega \setminus \Sigma) \end{array} \right.$
$\forall\, a, a'$, alors



$$|\nabla f_a|\, \delta(f_a) = |\nabla f_{a'}|\, \delta(f_{a'})$$

OK

$$\sigma_a|_{V_a \cap V_{a'}} = \sigma_{a'}|_{V_a \cap V_{a'}}$$

$d\sigma_a$ supportée sur $\Sigma \cap V_a$

$$\Rightarrow \quad \sigma_a|_{V_a \setminus \Sigma} = 0 = \tilde{\sigma}|_{V_a \setminus \Sigma}$$

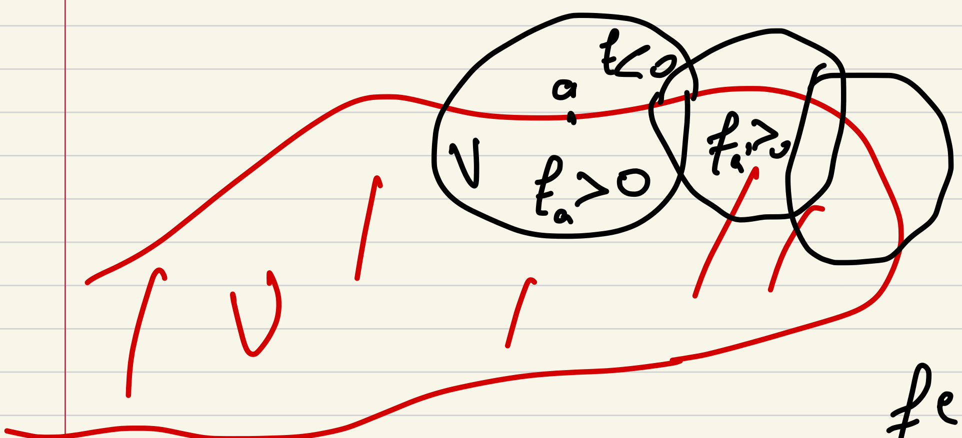
$\Rightarrow$ le thm de recollt s'applique : $\exists!\, \sigma$ dont les restrictions sont données par σ_a ou $\tilde{\sigma}$.

$\Rightarrow$ Déf : La mesure σ associée à Σ est appelée la mesure superficielle (ou mesure de surface) de l'hypersurface fermée Σ.

. **Déf°** (ouvert régulier de Ω).

Soit U un ouvert de Ω. U est appelé un <u>ouvert régulier</u> de Ω de classe C^1 si, $\forall a \in \partial U$, a admet un voisinage V dans Ω tq $\exists f : V \to \mathbb{R}$, C^1, tq

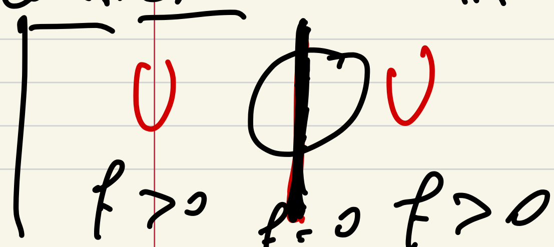
$$U \cap V = \{x \,;\, f(x) > 0\}, \quad \text{et} \quad \forall x \in \partial U \cap V,\ \nabla f(x) \neq 0.$$



$\Longrightarrow$ ∂U est une hypersurface fermée de classe C^1 de Ω.

Rem : toute hypersurf C^1 fermée n'est pas forcément la frontière d'1 ouvert U régulier.
U définit un "intérieur" de l'hypersurf, donné par le signe $f(x) > 0$.

ContrEx : $U = \mathbb{R}^d \setminus \{x_1 = 0\}$

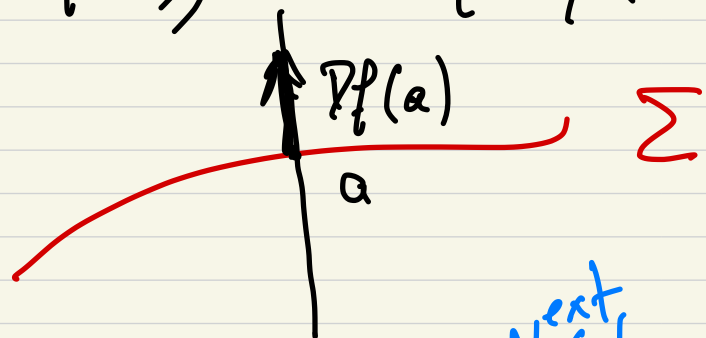


$\partial U = \{x_1 = 0\}$ $\quad$ $f(x) > 0$ sur U

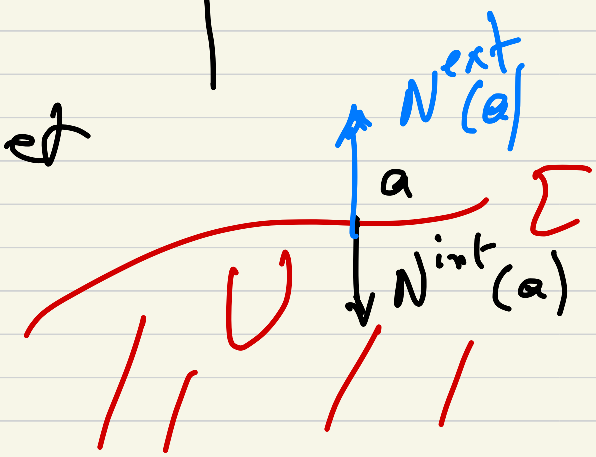
$\nexists\, f : V \to \mathbb{R}$ tq $f^{-1}(0) = V \cap U$ et $\nabla f \neq 0$ sur ∂U.

Déf : Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$.

- si Σ est une hypers. C^1 fermée, et $a \in \Sigma$, la droite normale à Σ en a est la droite $(a + \mathbb{R}\,\nabla f(a))$, où $f = f_a$ est définie dans la déf de Σ.



- Si $\Sigma = \partial U$, pour U un ouvert C^1 régulier $\Rightarrow$ on peut définir un intérieur et 1 extérieur.



On définit le vecteur <u>normal entrant</u> à U au point $a \in \partial U$:

$$N^{int}(a) = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|},$$

où f est une fonction locale définissant U localt.

De même, le vecteur sortant $N^{ext}(a) = -N^{int}(a)$

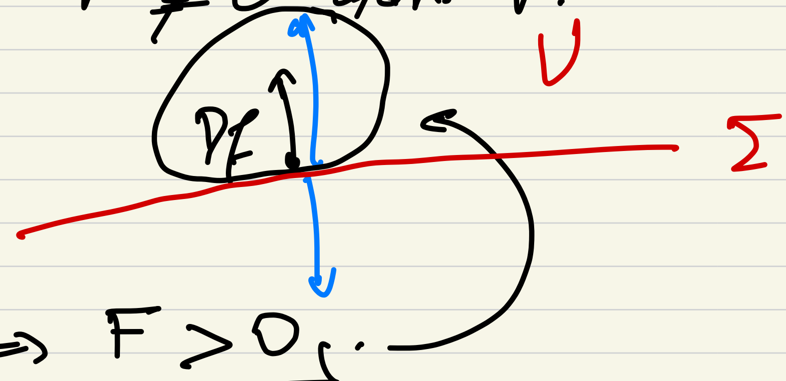
Il faut vérifier que ces définitions ne dépendent pas du choix de $f = f_a$ définissant Σ ou U.

. Si g et f définissent locat $\Sigma \cap V$,

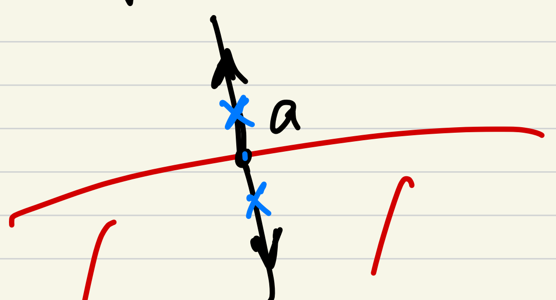
$$\Rightarrow g = f \times F \text{ , où } F \neq 0 \text{ dans } V.$$

$$\Rightarrow \nabla g = \nabla f \times F + g \times \nabla F$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla g(a)} = \underbrace{\nabla f(a)} \times F(a)$$

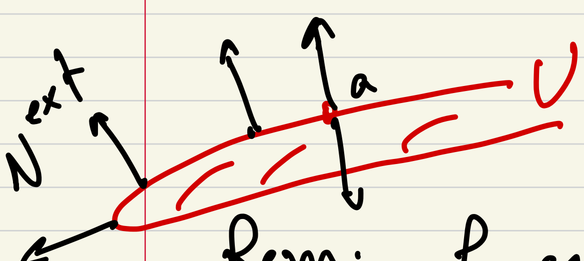


. Si g et f définissent locat $U \Rightarrow \underline{F > 0}$.



$\Sigma = \partial U$

La droite normale à Σ en a possède 2 vecteurs unitaires. Lequel est $N^{int}_{(a)}$?



$\rightarrow$ regarder si $a + \varepsilon \underline{\underline{N^{int}_{(a)}}} \in U$?

. **Rem:** f est $C^1 \rightarrow$ le bord $\partial U = \Sigma$ est $C1$

$\Rightarrow$ implique que $a \mapsto N^{int}_{(a)} \in \mathbb{R}^d$ est C^0

$a \in \partial U = \Sigma$ ↳ champ de vecteur entrant à U.

(Formule de saut)

Théorème Soit U ouvert régulier de classe C^1 dans Ω.
Soit σ la mesure superficielle sur ∂U, et
$N^{int} : \partial U \to \mathbb{R}^d$ le champ de vecteurs entrant à U.
Alors, on a l'identité suivante dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

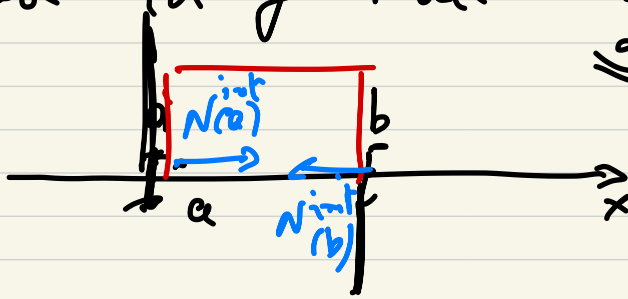
$$\forall j \in \{1,..,d\} \qquad \partial_j \mathbb{1}_U = \overbrace{N_j^{int}}^{\text{fct } C^0 : \partial U \to \mathbb{R}} \times \sigma$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\nabla \mathbb{1}_U = N^{int} \times \underbrace{\sigma}_{\text{distrib d'ordre } 0}\right)$$

$\Longrightarrow$ on a le droit de la multiplier par 1 fonction continue.

Rem: on pourrait prolonger N_j^{int} dans un voisinage de ∂U, de manière à obtenir 1 fct C^0 définie sur Ω.

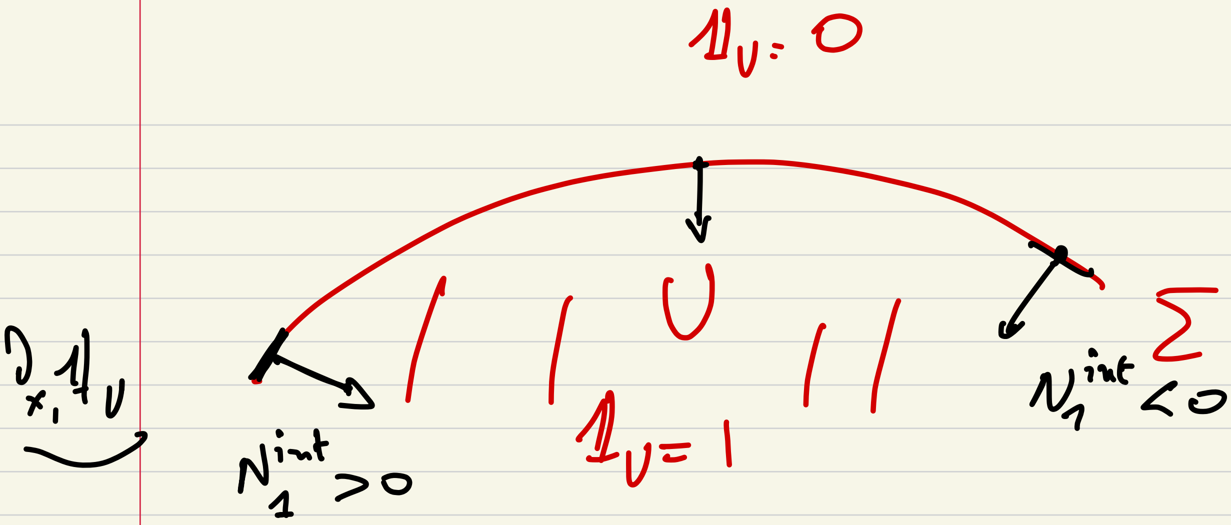
- Généralise la formule $\frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{]a,b[}) = \delta_a - \delta_b$



$N^{int}(a) = 1$

$N^{int}(b) = -1$

$\sigma_{\partial]a,b[} = \delta_a + \delta_b$

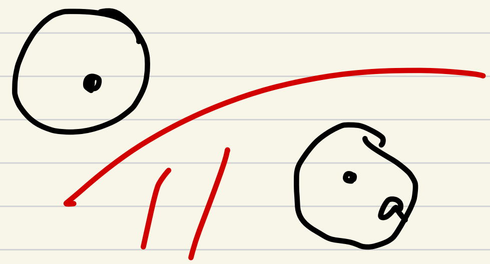


$\partial_1 \mathbb{1}_U = \cdot\, \sigma$

$\rightarrow \partial_j \mathbb{1}_U$ est encore d'ordre zéro, c'est une mesure signée.

Preuve : · Recollement $\rightarrow$ on regarde le voisinage de points

· $a \notin \partial U$



$\mathbb{1}_U|_V = 1$

$\Rightarrow$ à l'extérieur de ∂U, $\partial_j \mathbb{1}_U = 0$.

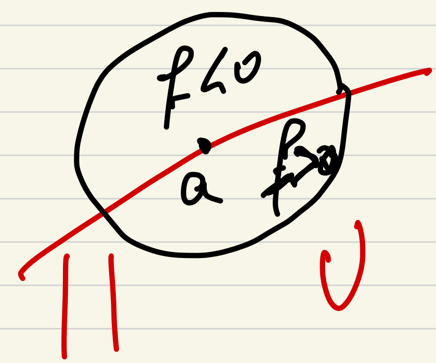
$\rightarrow \partial_j \mathbb{1}_U|_V = 0$

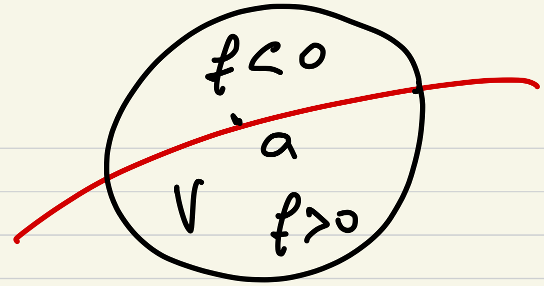
$\Rightarrow \partial_j \mathbb{1}_U$ est supportée sur ∂U.

$\rightarrow$ on s'intéresse aux voisinages de $a \in \partial U$.

· lissage de $\mathbb{1}_U$, par une fonction "marche"

$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1, $\chi|_{\mathbb{R}_-} = 0$. $\chi|_{t \geq 1} = 1$





$\forall x \in V$, $\quad \mathbb{1}_V(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \chi\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right)$

limite ponctuelle : OK. Thm conv. dominée ⇒ la limite est valable dans $\mathcal{D}'(V)$.

Dans $\mathcal{D}'(V)$, la dérivée commute avec la limite

$$\Rightarrow \underline{\partial_j \mathbb{1}_V} = \partial_j\left(\lim_{\epsilon\to 0} \chi\left(\frac{f(\cdot)}{\epsilon}\right)\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \partial_j\, \chi\left(\frac{f(x)}{\epsilon}\right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\, \partial_j f \times \chi'\left(\frac{f}{\epsilon}\right)}$$

$$\frac{1}{\epsilon}\chi'\left(\frac{f}{\epsilon}\right)$$

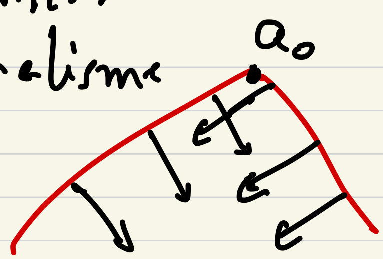
$\chi' \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\int_{\mathbb{R}} \chi'(t)\,dt = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon}\chi'\left(\frac{f}{\epsilon}\right) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \delta(f) \text{ par déf°}$$

déf° de σ

$$\partial_j f \ \frac{1}{\epsilon}\chi'\left(\frac{f}{\epsilon}\right) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \partial_j f \times \underbrace{\delta(f)} = \underbrace{\partial_j f \times \frac{\sigma}{|\nabla f|}} = \underline{N_j^{int}} \times \sigma$$

extension du formalisme

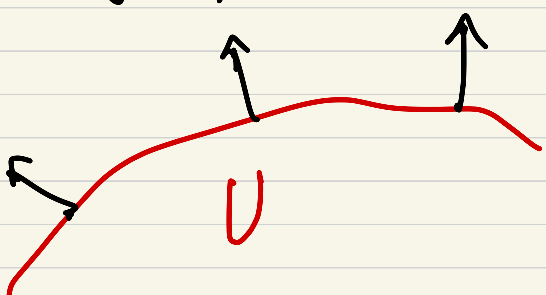


$\partial_j \mathbb{1}_U = N_j^{int} \sigma$ partout sauf en a_0.

Corollaire : formule de Gauss-Green.

U ouvert C^1-régulier dans Ω. $\varphi \in C_c^1(\Omega)$.

Alors, $\forall j = 1, \dots, d$, $\displaystyle\int_U \partial_j \varphi \, dx = \int_{\partial U} \varphi(x) N_j^{ext}(x) \, d\sigma(x)$



Preuve : $\underline{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)} \Rightarrow \underline{\displaystyle\int_U \partial_j \varphi(x) \, dx} = \displaystyle\int_\Omega \mathbb{1}_U(x) \partial_j \varphi(x) \, dx = \langle \mathbb{1}_U, \partial_j \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)}$

$= -\langle \partial_j \mathbb{1}_U, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle N_j^{int} \sigma, \varphi \rangle$

$\varphi \in C_c^1 \Rightarrow \partial_j \varphi \in C_c^0$ $\qquad = \langle N^{ext} \sigma, \varphi \rangle$

suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi$ dans $C_c^1(\Omega)$ $\qquad = \underline{\displaystyle\int_{\partial U} \varphi(x) N^{ext}_{(x)} \, d\sigma(x)}$

Corollaire de la f. de Gauss-Green : si je remplace φ par 1 fonction produit $\varphi \times \psi$, avec $\varphi, \psi \in C^1_c(\Omega)$.

$$\underbrace{\int_U \partial_j (\varphi \psi)\, dx}_{} = \int_{\partial U} \varphi \psi\, N_j^{ext}\, d\sigma$$

$$\underbrace{\int_U \partial_j \varphi\, \psi\, dx}_{} + \int_U \varphi\, \partial_j \psi\, dx$$

formule de Green.

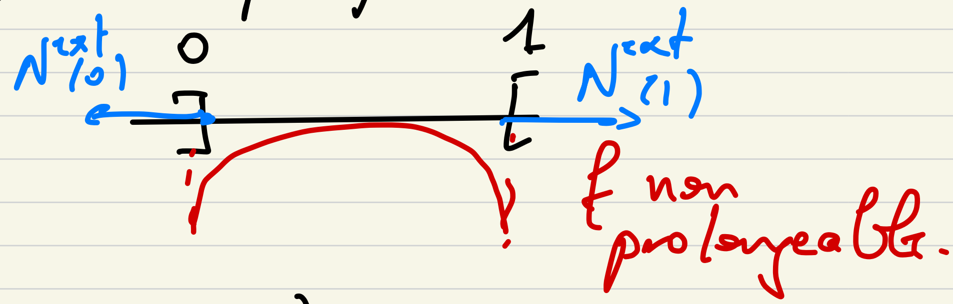
$$\int_U \partial_j \varphi\, \psi\, dx \underset{IPP}{=} - \int_U \varphi\, \partial_j \psi\, dx + \int_{\partial U} \varphi \psi\, N_j^{ext}\, d\sigma$$

- On définit $C^1(\overline{U})$ l'espace des restrictions à U de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^d$.

$\iff \varphi : U \to \mathbb{C}$ est prolongeable en 1 fonction $C^1(\mathbb{R}^d)$.

$\Rightarrow \varphi_{|U}$ est C^1, et qu'elle est "régulière" en s'approchant de ∂U.

Rem: toute fonction $\varphi \in C^1(U)$ n'est pas forcément prolongeable.



$\Rightarrow$ le corollaire de Gauss-Green s'étend aux fonctions $\varphi \in C^1(\overline{U})$.

pr: $\varphi \in C^1(\overline{U}) \Rightarrow \exists\, \tilde{\varphi} \in C^1(\Omega)$ tq $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$

χ fonction plateau sur $\overline{U}$, à support compact dans $\mathbb{R}^d$

$\Rightarrow \chi\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\Rightarrow$ thme de Gauss-Green appliqué à $\chi\tilde{\varphi}$.

$$\int_U \partial_i(\chi\tilde{\varphi})\,dx = \int_U \partial_i\varphi\,dx$$

$$\int_{\partial U} (\chi\tilde{\varphi}) N^{ext}\,d\sigma = \int_{\partial U} \varphi\, N^{ext}\,d\sigma.$$

[$\lim_{y\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$ car φ est C^0.

Dim 1: $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx = \varphi(1) - \varphi(0)$

$= N^{ext}(1)\cdot\varphi(1) + N^{ext}_{(0)}\varphi(0)$