Distributions et T.F

18/11/2020

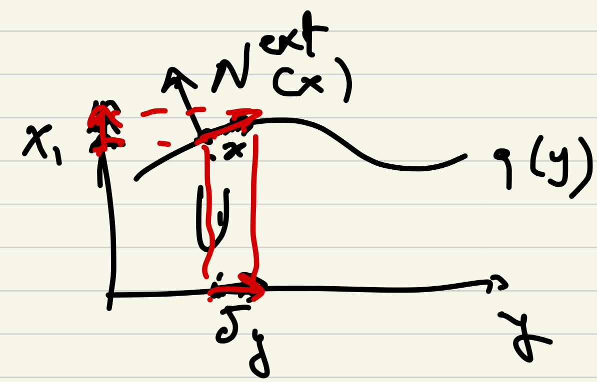
S. Nonnenmacher

Cours "Distributions" du 18/11/2020

Qu: calculer $N^{ext}(x)$?

Si $U = \{f(x) > 0\}$, avec $\nabla f|_{\partial U} \neq 0$

$$\underset{x\in\partial U}{\Rightarrow} N^{ext}(x) = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}(x)$$



. Si $U = \{x_1 < q(y),\ y \in V\}$

$$N^{ext}(x = (x_1, y)) = \frac{(1, -\nabla q(y))}{|(1, -\nabla q(y))|}$$

$\nabla q \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$x \longmapsto x + (\nabla q(y) \cdot \delta_y = \delta x_1,\ \delta_y)$$

$\to (\nabla q, 1) \in \mathbb{R}^d$

$$\underbrace{(\nabla q(y) \cdot \delta_y,\ \delta_y)} \cdot \underbrace{(1, -\nabla q(y))} = 0$$

$$q(y + \delta_y) = q(y) + \underline{\nabla q(y) \cdot \delta_y} + O((\delta_y)^2) \quad (\text{si } q \in C^2)$$

$N^{ext} \perp \Sigma$ en $y \Leftrightarrow \forall \delta_y$, $N^{ext} \perp (\nabla q(y) \cdot \delta_y, \delta_y)$ → vect. tangent à Σ

$\rightarrow L_y(\nabla q(y) \cdot \delta_y, \delta_y) = 0,\ \forall \delta_y$.

L_y s'annule sur l'espace tangent à Σ en y $\quad L_y = (1, \alpha)$ → f. lin. sur $\mathbb{R}^{d-1}$

On veut que $(1, \alpha)\,(\nabla q \cdot \delta y, \delta y) = 0, \quad \forall\, \delta y \in \mathbb{R}^{d-1}$

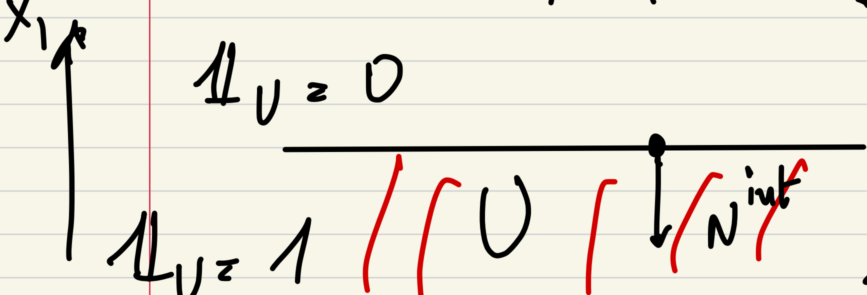
$$\iff \nabla q \cdot \delta y + \alpha(\delta y) = 0, \quad \forall\, \delta y \in \mathbb{R}^{d-1}$$

$$\iff \alpha(\delta y) = -\nabla q \cdot \delta y$$

$$\Rightarrow L_y = (1, -\nabla q(y))$$

$$\Rightarrow N^{ext}(y) = \frac{(1, -\nabla q(y))}{\sqrt{1 + |\nabla q(y)|^2}}.$$

$U = \{x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^d$ ouvert régulier de classe C^∞, non borné $\Rightarrow \overline{U}$ pas compact



$$\mathbb{1}_U(x) = H(-x_1)$$

$$\begin{cases} \partial_1 \mathbb{1}_U(x) = \frac{d}{dx_1}\left(H(-x_1)\right)\text{"} = -H'(x_1)\text{"} \\ \qquad\qquad = -\delta_0(x_1) \\ j \neq 1 \quad \partial_j \mathbb{1}_U(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla \mathbb{1}_U = \begin{pmatrix} -\delta_0(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma$$

Espaces de Sobolev sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

• Def$^{\underline{n}}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $s \in \mathbb{N}$. Une distribu$^{\underline{n}}$ $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq s$, $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$.

On appelle $(\cdot|\cdot)_{H^s}$ la forme sesquilinéaire sur $H^s \times H^s$:

$$(u|v)_{H^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L^2}$$

→ norme H^s : $\|u\|^2_{H^s} = (u|u)_{H^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}$

→ topologie :

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{H^s} u \quad \text{si} \quad \partial^\alpha u_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} \partial^\alpha u, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq s.$$

. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

Prop$^{\underline{n}}$ $(\cdot|\cdot)_{H^s}$ est un produit scalaire hermitien, qui fait de H^s un espace de Hilbert. ($\Leftrightarrow$ complétude p/r $\| \ \|_{H^s}$).

Pr Complétude : (u_j) suite de Cauchy de H^s.

$\Rightarrow \| u_j - u_k \|_{H^s} \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \| \partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u_k \|_{L^2} \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0$

L^2 est complet $\Rightarrow$ $u_j \longrightarrow v_0$ dans L^2 $\Rightarrow$ aussi dans $\mathcal{D}'$

$\partial^\alpha u_j \longrightarrow v_\alpha$ dans L^2 $\Rightarrow$ aussi dans $\mathcal{D}'$

On a en particulier $u_j \longrightarrow v_0$ dans $\mathcal{D}'$

∂^α est continue $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ $\Rightarrow$ $\partial^\alpha u_j \longrightarrow \partial^\alpha v_0$ dans $\mathcal{D}'$

$\Rightarrow$ $\partial^\alpha v_0 = v_\alpha \in L^2$.

$\Rightarrow$ $v_0 \in L^2$, et ses dérivées (au sens de $\mathcal{D}'$) $\partial^\alpha v_0 \in L^2$

$\Rightarrow$ $v_0 \in H^s$. $\square$

- Formulation variationnelle de problèmes elliptiques. $H^1(\Omega)$

Def : $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

$H_0^1(\Omega)$ = l'adhérence de $\overbrace{C_c^\infty(\Omega)}$ dans $\underline{H^1(\Omega)}$ (p/r à la topologie de $H^1(\Omega)$).

$u \in H_0^1(\Omega) \iff \exists\, u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tq
$\mathcal{D}(\Omega)$

$$u_j \xrightarrow[j\to\infty]{H^1} u \iff \|u_j - u\|_{H^1} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 .$$

- $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$

Qu : $H_0^1(\Omega) \overset{?}{=} H^1(\Omega)$ Dépend de Ω !

Si $\partial\Omega \neq \emptyset \Rightarrow H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^d \Rightarrow H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$

- Δ le laplacien $\quad \Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$

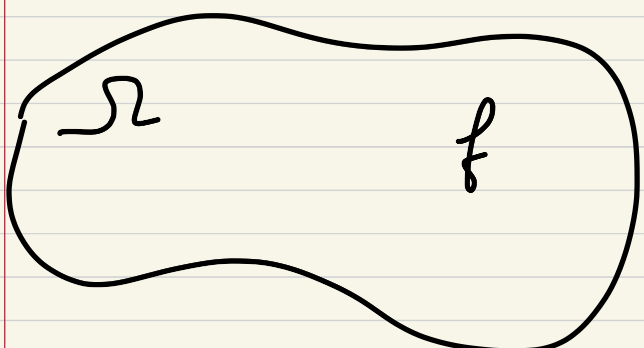
$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \to \Delta T = \sum_{j=1}^d \partial_j^2 T \quad \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Thme Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. $\forall f \in L^2$, on cherche à résoudre l'EDP suivante :

$$\boxed{-\Delta u + u = f}, \quad \text{avec} \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Problème de Dirichlet.

EDP $\neq$ EDO, en général on n'a pas de solution sous forme "fermée" (formule explicite pour u)



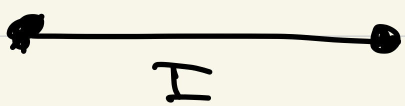
- $\forall f \in L^2(\Omega)$, $\exists$ une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ à ce problème.

  $H^1_0(\Omega)$ ↳ on impose la condition de Dirichlet

⚠ il existe d'autres solutions $v \notin H^1_0$ (ne satisfont pas les conditions de bord de Dirichlet).

↳ "$u_{|\partial\Omega} = 0$!"

Sans condition de bord, il y a une infinité de solution.



$$-u'' + u = f$$

$\underline{Pv}$: $-\Delta u + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\underbrace{\langle -\Delta u + u, \varphi \rangle}$ $= \langle f, \varphi \rangle = \underbrace{\int_\Omega f \varphi \, dx}_{\leq \sqrt{\int |f|^2} \sqrt{\int |\varphi|^2}, \ f \in L^2}$

On cherche $u \in H^1_0 \Rightarrow u \in L^2$, $\partial_j u \in L^2$

$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \sum_j \langle \partial_j u, \partial_j \varphi \rangle$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_j \int_\Omega \partial_j u \, \partial_j \varphi + \int_\Omega u \varphi} = \int f \varphi = (\varphi | \bar{u})_{H^1}$

$\rightarrow$ on cherche $u \in H^1_0(\Omega)$ tq, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\boxed{(\varphi|\bar{u})_{H^1} = \int f \varphi}$

$\underline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset H^1_0(\Omega)$, et est $\underline{\text{dense}}$ dans $H^1_0(\Omega)$, pour la topologie de H^1.

$\underline{\text{Rque}}$: $\underline{(\varphi|\bar{u})}_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} \underline{\|\varphi\|}_{H^1}$

$\longrightarrow \underline{\int f \varphi} = (\varphi | \bar{f})_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1}$

Ces 2 f. linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$ sont continue par rapport à $\| \ \|_{H^1}$.

8

$\Rightarrow$ les f. linéaires $(\cdot|\bar{u})_{H^1}$ et $(\cdot|\bar{f})_{L^2}$ s'étendent continûment à $\varphi \in H^1$, car elles sont continues p/r à la norme H^1.

- on a l'égalité $\underline{(\varphi|\bar{u})_{H^1}} = \underline{(\varphi|\bar{f})_{L^2}}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\Longrightarrow$ par densité, l'égalité s'étend à toute fonction $\varphi \in H^1_0(\Omega)$.

$\Rightarrow \forall v \in H^1_0(\Omega)$, j'ai

$$\underbrace{(v|\bar{u})_{H^1}}_{} = \underbrace{(v|\bar{f})_{L^2}}_{}$$

définit 1 f. lin. continue sur $v \in H^1_0$.

$v \mapsto (v|\bar{f})_{L^2}$ est 1 forme lin continue sur H^1_0!

je cherche $u \in H^1_0(\Omega)$ tq $(v|\bar{u})_{H^1} = L_{\bar{f}}(v)$

. Thme de représ$^{\circ}$ de Riesz : $\forall L$ f. lin. continue sur $\mathcal{H}$ Hilbert, $\exists!\ u_L \in \mathcal{H}$ tq $L(v) = (v|\overline{u_L})_{\mathcal{H}}$

$\mathcal{H} = H^1_0(\Omega)$

$\to$ ici, $L(v) = \int f v = (v|\bar{f})_{L^2}$

$\Rightarrow \underline{\exists!\, u} = u_L = u_f \in H^1_0$ tq

$\forall v \in H^1_0, \quad (v|\bar{u}_f)_{H^1_0} = L(v).$

$\square$

- Remarque : on a identifié

$v \mapsto \int f v$ comme 1 f. lin. C^0 sur H^1_0.

$\to$ le thme s'étend aux seconds membres + singuliers :

$\int f v\, dx \rightsquigarrow L(v)$ f. lin. C^0 sur H^1_0.

$f \rightsquigarrow$ distribution $T \in \underbrace{\text{dual de } H^1_0(\Omega)}$

f. lin. C^0 sur $H^1_0(\Omega)$.

on le note $\boxed{H^{-1}(\Omega)}$

$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

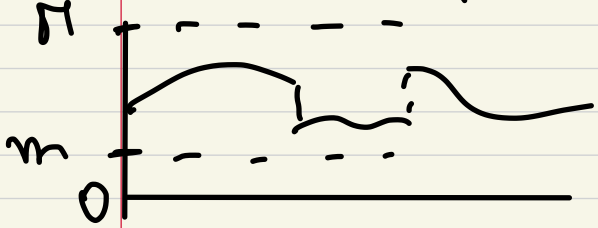
$\begin{array}{c}\cup\\ f\end{array}$

- $-\Delta u + \underset{\sim}{u} = f$

Soit $q \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, tq $q(x) \geq m > 0$ p.p.

→ on définit la forme sesquilinéaire $\qquad m \le q \le M$

$$(u|v)_q = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j u | \partial_j v)_{L^2} + \int_\Omega q\, u\, \bar{v}\, dx$$



• Cette f. sesquilin. définit un produit scalaire sur H^1, définissant une norme équivalente à $\| \ \|_{H^1}$.

$$\min(1,m)\, \|u\|_{H^1}^2 \le \|u\|_q^2 \le \max(1,M)\, \|u\|_{H^1}^2$$

⇒ $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert p/r à $\| \ \|_q$.

→ le thm de Riesz fonctionne pour $(\ | \ )_q$.

⇒ $\forall f \in L^2$, $\exists !\, u \in H^1_0$. $\forall v \in H^1_0(\Omega)$,
$\forall\ f \in H^{-1}$ $\quad (v|u)_q = \ell_f(v)$

(u dépend de f et de q

↳ $u \in H^1_0$ est sol° de $\boxed{-\Delta u + \overset{\text{potentiel variable}}{q}\, u = f}$

Si Ω est borné, on peut prendre $q \geq 0$, voire $q \equiv 0$.

$$\|u\|_{H^1}^2 = \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$$

Lemme de Poincaré Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

$\forall j \in \{1, .., d\}$, $\exists\, C > 0$ tq, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_j \varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

Faux si Ω non borné :

Contre-ex : Sur $\Omega = \mathbb{R}^d$: fabriquer 1 suite $\varphi_n \in H^1(\mathbb{R}^d)$

tq $\|\varphi_j\|_{L^2} = 1$, et $\|\partial_{x_1} \varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

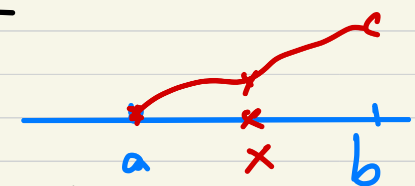
idée : fabriquer des φ_j de + en + plates.

$\varphi_1 \in L^2$, $\quad \varphi_n(x) = n^{-\frac{d}{2}} \varphi_1\left(\frac{x}{n}\right) \longleftarrow$ supp $\varphi_n \to \infty$.

$$\int |\varphi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\varphi_1\left(\frac{x}{n}\right)\right|^2 dx = \int |\varphi_1(y)|^2 dy = 1$$

Preuve de Poincaré : Comme $\overset{\mathcal{D}(\Omega)}{C_c^\infty(\Omega)}$ dense dans $H_0^1(\Omega)$

$\longrightarrow$ il suffit de montrer $\|\varphi\|_{L^2} \leq C \|\partial_j \varphi\|_{L^2}$.



$j = 1$ $\quad \underline{\varphi \in C_c^\infty(\Omega)}$

$x = (x_1, y)$

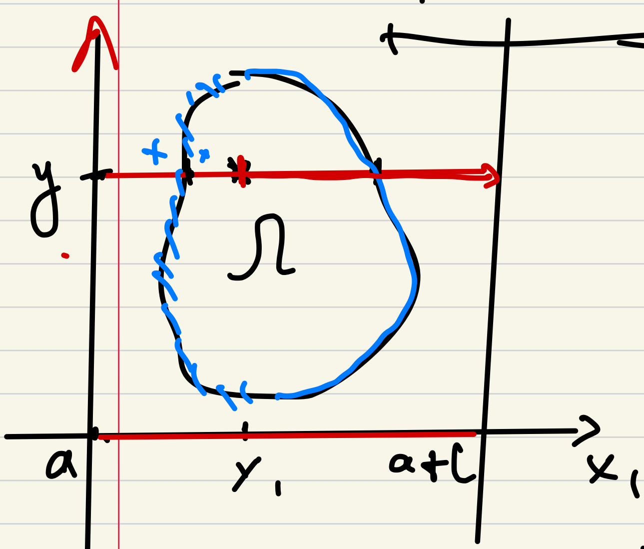
$y \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$|\varphi(x_1, y)|^2 = -\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t,y)|^2 \, dt$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \underset{\text{étendu à}}{\longrightarrow} \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$

$$= -2 \int_{x_1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\partial_t \varphi(t,y) \, \overline{\varphi(t,y)} \right) dt$$

$$CS \Rightarrow \underbrace{|\varphi(x_1,y)|^2} \leq 2 \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_t \varphi(t,y)|^2 \, dt}_{\|\partial_t \varphi(\cdot,y)\|_{L^2(x_1)}} \Big)^{1/2} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t,y)|^2 \, dt}_{\|\varphi(\cdot,y)\|_{L^2(x_1)}} \Big)^{1/2}$$

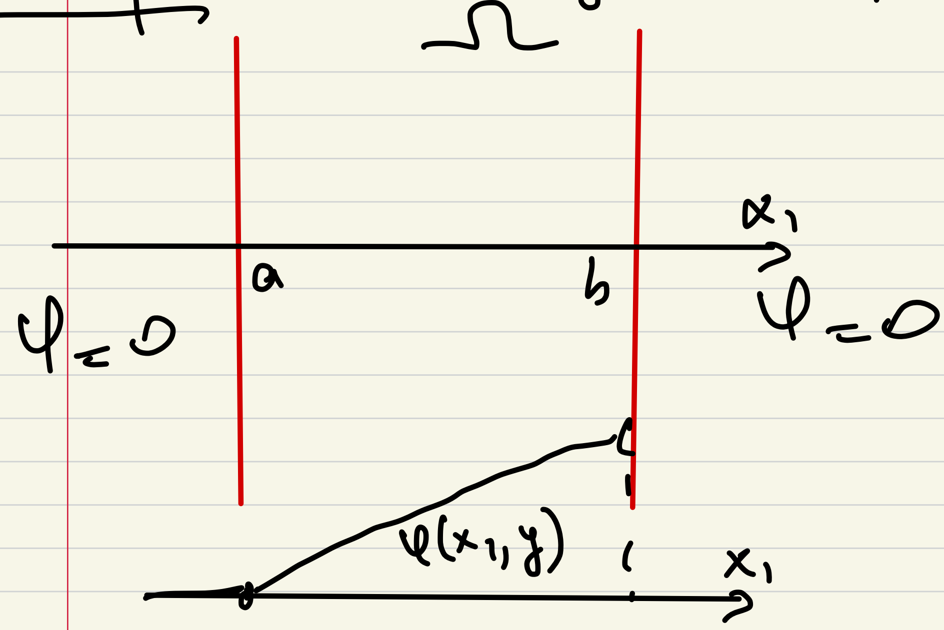


$$\int dx_1 \underbrace{\int dy \, |\varphi(x_1,y)|^2} \leq L \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy \, \|\partial_t \varphi(\cdot,y)\| \, \|\varphi(\cdot,y)\|$$

$$\leq L \, 2 \sqrt{\underbrace{\int dy \, \|\partial_{\cancel{x_1}} \varphi(\cdot,y)\|^2_{L^2(t)}} \underbrace{\int dy \, \|\varphi(\cdot,y)\|^2_{L^2(t)}}}$$

$$\|\varphi\|^2_{L^2} \leq 2L \quad \|\partial_{\cancel{x_1}} \varphi\|_{L^2(t,y)} \quad \|\varphi\|_{L^2(t,y)}$$

Remarque : si Ω = cylindre $\{a < x_1 < b\}$



$\varphi \in C^1(\Omega)$

conditions φ dérivable sur $\overline{\Omega}$,

et $\varphi\big|_{x_1 = a} = 0$,

(sans condition sur $\varphi_{|x_1 = b}$)

On reprend la preuve précédente,

$$|\varphi(x, y)|^2 = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_t |\varphi(t, y)|^2 \, dt$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\partial_1 \varphi\|_{L^2(\Omega)}$$