

Distributions et TF

S. Nonnenmacher
19/11/2020



Cours Distributions, 19/11/2020

①

Lemme de Poincaré $\Rightarrow$ si Ω est borné, et si le "potentiel" $q(x) \in L^\infty(\Omega)$ est positif ou nul pour p-tout $x \in \Omega$, $0 \leq q(x) \leq M$,

alors $(\cdot | \cdot)_q$ définit encore un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$.

$$2 \|u\|_q^2 = 2 \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} q(x) |u(x)|^2 dx$$

$$\geq \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{L^2}^2 + \frac{d}{C} \|u\|_{H^1}^2 + \underbrace{2 \int_{\Omega} q(x) |u(x)|^2 dx}_{\geq 0}$$

$$\geq \min(1, \frac{d}{C}) \|u\|_{H^1}^2$$

$$\|u\|_q \leq \max(1, M) \|u\|_{H^1}$$

$\Rightarrow$ on peut résoudre $-\Delta u = f$, $f \in H^{-1}(\Omega)$,
avec $u \in H_0^1(\Omega)$, et la solution est unique

Approximation de fonctions dans H^1 par des fonctions

②

$u \in H^1_0(\Omega) \xrightarrow{\text{def de } H^1_0(\Omega)} u \text{ peut \u00eatre approch\u00e9e par } u_n \in C_c^\infty(\Omega)$

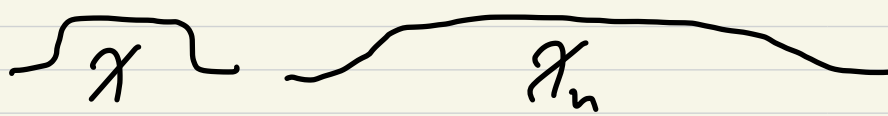
. Cas $\Omega = \mathbb{R}^d$

Prop $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \underline{H^1_0(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)}$

Pr 1) compactifier le support.

$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(x) = 1$ sur $B(0,1)$ (χ fonction plateau sur $B(0,1)$)

ondilat: $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$

$v \in L^2 \Rightarrow \chi_n v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} v$) 

$u \in H^1 \Rightarrow \chi_n u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} u : \| \chi_n u - u \|_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$\partial_j(\chi_n u) \rightarrow \partial_j u$ dans L^2 ? OK

Leibnitz: $\partial_j(\chi_n u) = \underbrace{(\partial_j \chi_n) u}_{\rightarrow 0 \text{ dans } L^2} + \underbrace{\chi_n \partial_j u}_{\rightarrow \partial_j u \text{ dans } L^2}$
 $|\partial_j \chi_n| = \left| \frac{1}{n} (\partial_j \chi)\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0$

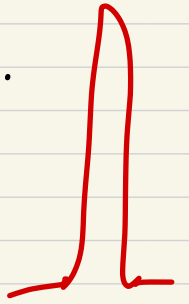
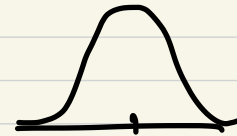
(3)

$\Rightarrow$ on a $u_n = \underbrace{\chi_n u}_{n \rightarrow \infty} \longrightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.

2) Régularisation par convolution.

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f \subset B(0,1)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz = 1.$$



noyau convolutif
"dilation"

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

$$u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon * u(x)$$

Si $\text{supp}(u)$ est compact $\Rightarrow \text{supp } u_\varepsilon \subset \text{supp } u + B(0, \varepsilon)$

On sait que $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} u$ dans L^2

$$\begin{aligned} \partial_j u_\varepsilon &= \partial_j \int f_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int \partial_{x_j} f_\varepsilon(x-y) u(y) dy = - \int \partial_{y_j} f_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \int f_\varepsilon(x-y) \underbrace{\partial_j u(y)}_{\in L^2} dy = f_\varepsilon * \underbrace{\partial_j u}_{L^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \partial_j u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \partial_j u$ dans L^2

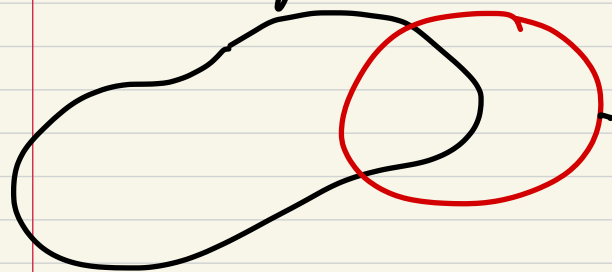
$u_{n,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} u_n$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \Rightarrow u_{n,\varepsilon} \xrightarrow{H^1} u$

Propriété : $u \in H^1(\Omega)$ à supp. compact peut être approché dans $H^1(\Omega)$ par des fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ supportées dans un petit voisinage de $\text{supp}(u)$. (4)



u_ε sont supp. dans $\text{supp}(u) + B(0, \varepsilon)$

On va supposer que Ω est borné et C^∞ -régulier



$$\Omega = \left\{ f(x) > 0 \right\} \quad \text{avec } f \in C^\infty$$

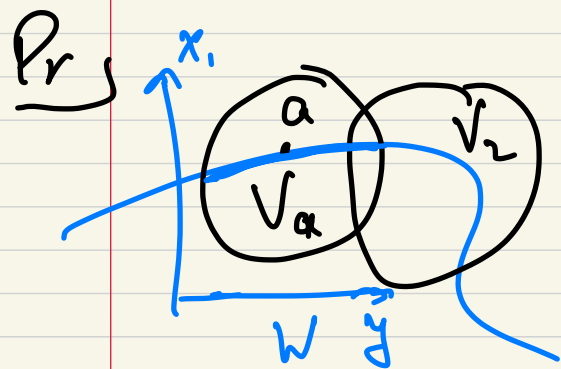
$$\nabla f|_{\partial\Omega} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{localt, } \Omega = \left\{ x_i = q(\gamma), \gamma \in W \subset \mathbb{R}^{d-1} \right\}$$

$$q \in C^\infty(W, \mathbb{R})$$

Prop: Ω ouvert borné régulier de frontière C^∞ . Alors $\underbrace{C^\infty(\overline{\Omega})}_{\text{est dense dans } H^1(\Omega)}$.

Rappel: $C^\infty(\overline{\Omega}) =$ les fonctions f sur $\overline{\Omega}$, qui sont les restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.



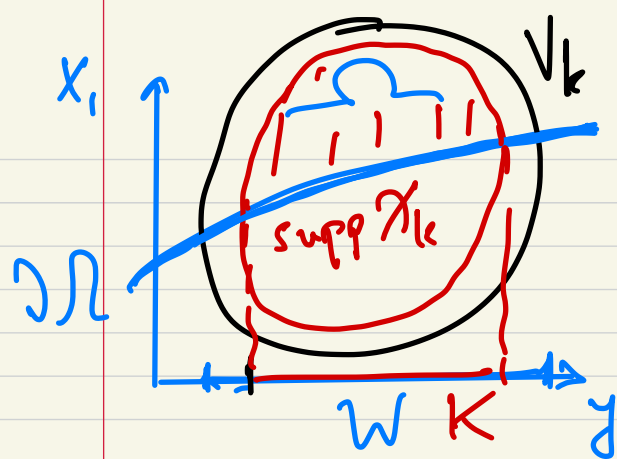
$a \in \partial\Omega \rightarrow \exists V_a$ tq $\partial\Omega \cap V_a$ est représentée par le graphe d'une fonction lisse g_a .

$\exists N, \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^N V_k$
 $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=1}^N V_k \cup \Omega$ recouvrement fini d'ouverts

$\rightarrow$ recouvrement lisse: $\chi_1, \dots, \chi_N, \chi_0$, $\chi_k \in \mathcal{D}(V_k)$

$$\chi_0 + \sum_{k=1}^N \chi_k = 1 \text{ sur } \overline{\Omega}. \quad \chi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$u \in H^1(\Omega) \longrightarrow u = \underbrace{\chi_0 u}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} + \sum_{k=1}^N \underbrace{\chi_k u}_{\text{peut être approché par } C_c^\infty(\Omega)}$$



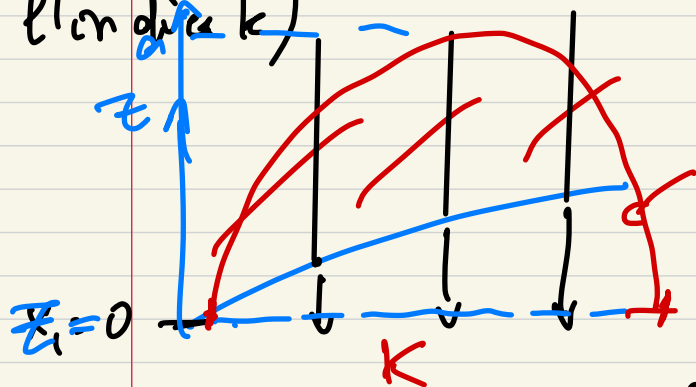
$$\Omega \cap V_k = \{x_1 > q_k(y), y \in W\}$$

$$q_k \in C^\infty(W, \mathbb{R})$$

$$(\chi_k u) \in H^1(\Omega), \text{ à support dans } \text{supp}(\chi_k)$$

On définit $v(z, y) = (\chi_k u)(\underline{z} + q(y), y)$

(on oublie l'indice k)



$$\Rightarrow v(z, y) \text{ est définie sur } \{z > 0, y \in W\}$$

$$\text{supp}(v) \subset]0, a[\times K$$

Dans les coordonnées (z, y) , $\Omega \cap V_k$ est dans un demi-espace, $\partial\Omega \equiv \text{hyperplan } \{z=0\}$.

Lemme $v \in H^1(\mathbb{R}_+^n \times W)$, avec

$$\partial_z v(z, y) = \partial_z (\chi_k u)(z + q(y), y)$$

$$\partial_{y_j} v(z, y) = \partial_{y_j} (\chi_k u)(z + q(y), y) + \partial_{y_j} q(y) \partial_z (\chi_k u)(z + q(y), y)$$

(Règle de chaîne)

Pr du lemme:

(7)

$$\bullet v \in L^1(\mathbb{R}_+^p \times W) : \int_W \int_0^\infty |v(z, y)| dz dy = \int_W \int_{q(y)}^\infty |(Xu)(x, y)| dx dy$$

$$\Rightarrow \|v\|_{L^1} = \|Xu\|_{L^1}$$

$$\leq \|u\|_{L^2}^2$$

$$z \rightarrow x_1 = z + q(y)$$

$$y \rightarrow y$$

(change de var. de jacobien = 1)

$$\bullet \partial v \in L^1?$$

$$Xu \in H^1$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^p \times W)$$

$$- \int_W \int_0^\infty v(z, y) \partial_z \varphi(z, y) dz dy = - \int_W \int_{q(y)}^\infty (Xu)(x, y) \partial_z \varphi(x_1 - q, y) dx dy$$

$$= \langle v, \partial_z u \rangle$$

$$= \int_W \int_{q(y)}^\infty \partial_{x_1} \varphi(x_1 - q, y) dx dy$$

||

$$= \int_W \int_{q(y)}^\infty \partial_{x_1} (Xu)(x, y) \varphi(x_1 - q, y) dx dy$$

$$= \int_W \int_0^\infty \underbrace{\partial_{x_1} (Xu)(z + q, y)}_{\in L^1(\mathbb{R}_+^p \times W)} \varphi(z, y) dz dy$$

(on a heurt justifié la formule "naive")

$$-\underbrace{\langle v, \partial_{y_j} \psi \rangle}_{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^{\Phi} \times W)} = - \int_W \int_{q(y)}^{\infty} (\chi_u)(x, y) \underbrace{\partial_{y_j} \psi(x_1 - q(y), y)}_{\uparrow} dx_1 dy \quad (8)$$

$$\stackrel{11}{=} \langle \partial_{y_j} v, \psi \rangle = - \int_W \int_{q(y)} \chi_u(x, y) \underbrace{\frac{d}{dy_j}}_{\uparrow} [\psi(x_1 - q(y), y)]$$

$$\stackrel{1PP}{=} - \int_W \int_{q(y)}^{\infty} ((\chi_u)(\cdot) \partial_{y_j} q(y) \underbrace{\partial_{x_1} \psi(x_1 - q(y), y)}_{\uparrow}) dx_1 dy$$

$$\stackrel{p/r}{\text{et}} \stackrel{y_j}{x_1} \langle \partial_{y_j} v, \psi \rangle = \int_W \int_{q(y)}^{\infty} \underbrace{(\partial_{y_j} + \partial_{y_j} q(y) \partial_{x_1}) (\chi_u)(x, y)}_{\uparrow} \psi(x_1 - q(y), y) dx_1 dy$$

$$\Rightarrow \partial_{y_j} v \in L^2(\mathbb{R}_+^{\Phi} \times W) \subset L^2$$

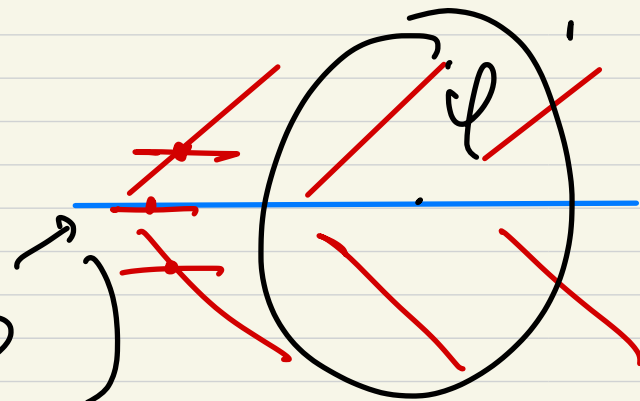
On se ramène à "prolonger" à $(\mathbb{R} \times W)$ une fonction dans $H^1(\mathbb{R}_+^{\Phi} \times W)$.

Lemme "Prolongement miroir"

Soit $v \in H^1(\mathbb{R}_+^D \times W)$, on définit $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R} \times W)$ par

$$\tilde{v}(z, y) = \begin{cases} v(z, y) & \text{si } z > 0 \\ v(-z, y) & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

($\tilde{v}$ est-elle suffisamment régulière sur $\{z=0\}$ pour être dans H^1 ?)



Alors $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R} \times W)$.

Si $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+} \times W)$, $\tilde{v}$ est $C^0(\mathbb{R} \times W)$, mais $\partial_z \tilde{v}$ n'est pas

continue à travers $\{z=0\}$ en g^{al}.

$$\text{Pr.} \cdot \|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R} \times W)}^2 = 2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^D \times W)}^2 < \infty$$

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times W)$$

$$\begin{aligned} \int_W \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(z, y) \partial_y \varphi(z, y) dz dy &= - \int_{-\infty}^0 dz \int_W v(-z, y) \partial_y \varphi(z, y) dy \\ &\quad - \int_0^{\infty} \int_W v(z, y) \partial_y \varphi(z, y) dz dy \end{aligned}$$

$$- \langle v, \partial_{y_j} \psi \rangle = - \int_0^\infty \int_W v(z, y) \left[\partial_{y_j} \psi(z, y) + \partial_{y_j} (\psi(-z, y)) \right] dz dy \quad (10)$$

Pour utiliser $v \in H^1(\mathbb{R}_+^d \times W) \rightarrow$ on doit tester

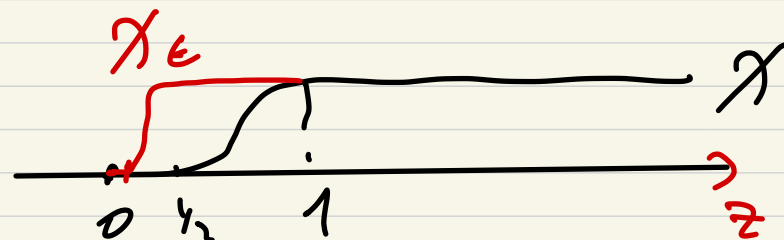
par une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^d \times W)$

$\Rightarrow$ il faut tronquer
estimer l'erreur.

$\nwarrow$ près des bords, et

$$\chi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \chi(t) = 0, \quad t \leq \frac{1}{2}$$

$$\chi(t) = 1, \quad t \geq 1.$$



$$\chi_\epsilon(z) = \chi(t/\epsilon)$$

conv. dominée

$$\chi_\epsilon(z) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \chi(z)$$

$$= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_W v(z, y) \underbrace{\chi_\epsilon(z)}_{\uparrow} \partial_{y_j} (\psi(z, y) + \psi(-z, y)) dz dy$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{\uparrow} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_W \partial_{y_j} v(z, y) \chi_\epsilon(z) (\psi + \psi) dz dy$$

$$= \int_0^\infty \int_W \partial_{y_j} v(z, y) (\psi(z, y) + \psi(-z, y)) dz dy = \int_{\mathbb{R}} \int_W f_j(z, y), \psi(z, y) dz dy, \text{ avec}$$

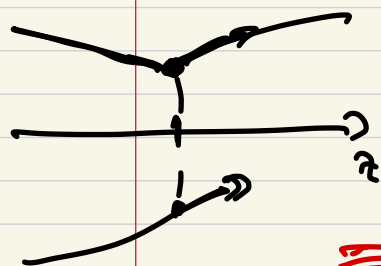
(11)

$$f_j(z, y) = \begin{cases} \partial_{y_j} v(z, y), & z > 0 \\ \partial_{y_j} v(-z, y), & z < 0 \end{cases}$$

" $\partial_{y_j} \varphi(z, y)$

+ délicat: dérivée verticale. pas de pb pour les dérivées horizontales.

$$-\langle \varphi, \partial_z \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_W v(z, y) \chi_{\varepsilon/2}^z (\varphi(z, y) - \varphi(-z, y)) dz dy$$



$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \iint v(z) \partial_z (\chi_\varepsilon(z) (\varphi(z, y) - \varphi(-z, y))) dz dy$$

$$\Rightarrow I_2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \iint v(z) \underbrace{\chi'_\varepsilon(z)}_{O(1)} (\varphi(z, y) - \varphi(-z, y)) dz dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \iint \partial_z v \chi_\varepsilon(z) (\varphi(z, y) - \varphi(-z, y)) dz dy$$

$$\chi'_\varepsilon = O(1/\varepsilon)$$

$$\text{supp } \chi'_\varepsilon \subset [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon)$$

$$I_2 = \int_W \int_{\varepsilon/2}^\varepsilon v \underbrace{O(1/\varepsilon)}_{\substack{C_c^\infty(\mathbb{R} \times W) \\ O(z) \rightarrow O(\varepsilon)}} (\varphi(z, y) - \varphi(-z, y)) dz dy$$

$$= \int_W \int_{\varepsilon/2}^\varepsilon v \times O(1) dz dy$$

Cauchy-Schwarz : $\underbrace{C \iint_{W \times [t/2, t]} v \, d\tau \, dy}_{\leq \|v\|_{L^2}} \leq \underbrace{\sqrt{\iint_{W \times [t/2, t]} |v|^2}}_{\leq \|v\|_{L^2}} \underbrace{\sqrt{\iint_{[t/2, t]} 1}}_{= O(\sqrt{\epsilon})}$ (12)

$$\Rightarrow I_2 = I_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

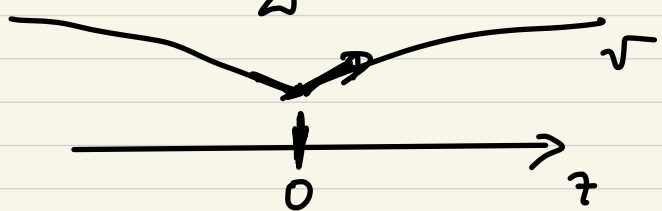
$$= \int_0^2 \int_W \partial_\tau v(\tau, y) (\psi(\tau, y) - \psi(-\tau, y))$$

$$= \iint_{\mathbb{R} \times W} g(\tau, y) \psi(\tau, y) \, d\tau \, dy$$

$$g(\tau, y) = \begin{cases} \partial_\tau v & , \tau > 0 \\ -\partial_\tau v & , \tau < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \hat{v} = g(\tau, y) \in L^2(\mathbb{R} \times W).$$

Pas de terme singulier en $\tau=0$.



$$\Rightarrow \partial_{y_j} \hat{v} = f_j, \quad \partial_\tau \hat{v} = g, \quad \text{qui sont dans } L^2(\mathbb{R} \times W)$$

$$\Rightarrow \hat{v} \in H^1(\mathbb{R} \times W) \quad \square.$$

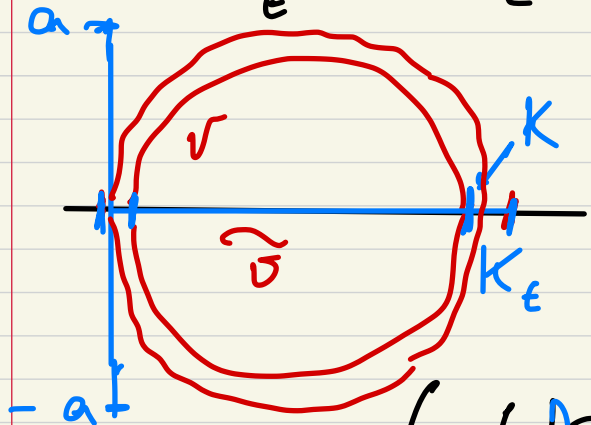
Grâce au lemme de prolongement miroir, on peut finir la preuve de la proposition.

$$\dots \quad v(x, y) = (\chi u)(x + q(y), y) \in H^1(\mathbb{R}_+^\Phi \times W)$$

prolongt

$$\tilde{v}(x, y) \in H^1(\mathbb{R} \times W), \quad \text{supp } \tilde{v} \subset \underbrace{[-a, a]}_{\text{compact de } \mathbb{R} \times W} \times K$$

Prop: $\Rightarrow \tilde{v}$ peut être approximée par des fonctions $\tilde{v}_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times W)$, $\text{supp } \tilde{v}_\epsilon \subset [-a-\epsilon, a+\epsilon] \times K_\epsilon$



$$\tilde{v}_\epsilon \rightarrow \tilde{v} \text{ dans } H^1(\mathbb{R} \times W)$$

$$\text{Alors } v_\epsilon = \tilde{v}_\epsilon|_{\mathbb{R}_+^\Phi \times W} \rightarrow v \text{ dans } H^1(\mathbb{R}_+^\Phi \times W).$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^\Phi} \int_W |\tilde{v}_\epsilon - \tilde{v}|^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$v_\epsilon \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^\Phi \times W})$$

Changt de var. inverse $\tilde{u}_\epsilon(x, y) = \tilde{v}_\epsilon(x, -q(y), y)$ est la restriction de $\tilde{v}_\epsilon$
 $u_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$, converge vers χu dans $H^1(\Omega)$. $\square$