Distributions et T.F

S. Nennenmacher

25/11/2020

Cours du 25/11/2020

. Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

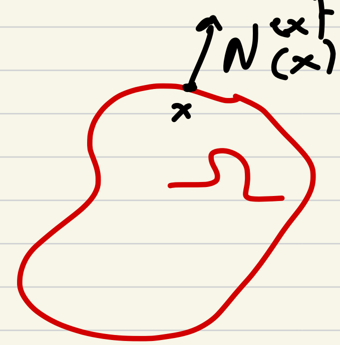
$H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$

→ Si Ω est $\underline{C^\infty\text{-régulier}}$ borné $\Rightarrow$ $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème de la trace

(forme faible de "$u|_{\partial\Omega}$" pour $u \in H^1(\Omega)$)

Ω borné C^∞-régulier. Soit σ la mesure superficielle sur $\partial\Omega$, et N^{ext} le vecteur normal extérieur.



Alors il existe une unique application linéaire

$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \sigma)$ telle que, $\forall \varphi \in \underline{C^\infty(\overline{\Omega})}$

"application trace"

$$\gamma_0 \varphi = \varphi|_{\partial\Omega}$$

. γ_0 satisfait la formule de Green suivante :

$\forall j = 1, \dots, d$, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u \, \partial_j v \, dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) N_j^{ext} \, d\sigma - \int_\Omega \partial_j u \, v \, dx$$

Finalement, $\operatorname{Ker}(\gamma_0)$ est donné par $H^1_0(\Omega)$.

Preuve : On sait que la f. de Green est vérifiée si $\varphi, \psi \in C^\infty(\bar\Omega)$:

$$\forall j, \quad \int_\Omega \varphi\, \partial_j \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi\, \psi\, N_j^{ext}\, d\sigma - \int_\Omega \partial_j \varphi\, \psi\, dx$$

Considérons $\gamma_0 : \varphi \in C^\infty(\bar\Omega) \longmapsto \varphi|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega, \sigma)$

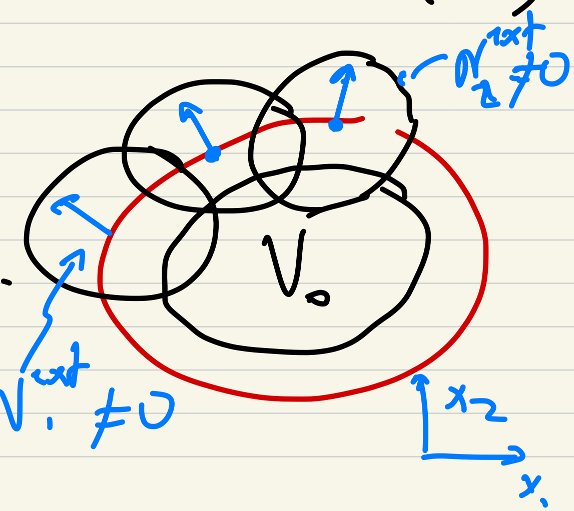
M.q. γ_0 est continue si $C^\infty(\bar\Omega)$ est muni de la topologie induite par $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$: il faut montrer que $\exists C > 0$ tq $\forall \varphi \in C^\infty(\bar\Omega)$,

$$\| \varphi|_{\partial\Omega} \|_{L^2(\partial\Omega, \sigma)} \leq C \, \| \varphi \|_{H^1(\Omega)}$$

Alors, comme $C^\infty(\bar\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, alors γ_0 se prolonge de façon unique en une appl. lin. continue $H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.

- On choisit un recouvrement fini de $\partial\Omega$

$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_k$, tel que, $\forall k$, sur $\partial\Omega \cap V_k$, il existe un indice $j = j(k)$ tq $|N_j^{ext}| \geq c > 0$.



→ prendre $\psi = \bar\varphi$

$$\int_\Omega \varphi\, \partial_j \bar\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, \bar\varphi\, N_j^{ext}\, d\sigma - \int_\Omega \partial_j \varphi\, \bar\varphi$$

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} |\varphi|^2 N_j^{ext}\, d\sigma} = \int_\Omega \left((\partial_j \varphi)\, \overline{\varphi} + \varphi\, \partial_j \overline{\varphi} \right) dx$$

On se restreint à $\underbrace{\varphi \in C_c^\infty(V_k)}$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega \cap V_k} |\varphi|^2 \underbrace{N_j^{ext}}_{|\ | \geq c} d\sigma = 2 \operatorname{Re} \int_{V_k} (\partial_j \varphi\, \overline{\varphi})\, dx$$

$$c \underbrace{\int_{\partial\Omega \cap V_k} |\varphi|^2 d\sigma} \leq \left| \int_{\partial\Omega \cap V_k} |\varphi|^2 N_j^{ext} d\sigma \right|$$

$$c\, \|\varphi_{|\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2 \sqrt{\int_{V_k} |\partial_j \varphi|^2 dx \int_{V_k} |\varphi|^2 dx}$$

$$\leq 2\, \|\partial_j \varphi\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \underbrace{\|\partial_j \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

$$c\, \underline{\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}} \leq \ \leq \underline{\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}}$$

. $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow$ se prolonge en $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Partition lisse $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_N$: χ_0 supp dans V_0, χ_k supp. dans V_k, $\chi_0 + \sum \chi_k = 1$ près de Ω
de Ω

$$\tilde\varphi \longrightarrow \tilde\varphi_0 = \tilde\varphi \times \chi_0, \quad \tilde\varphi_k = \tilde\varphi \times \chi_k . \qquad \chi = \chi_0 + \chi_1 + \dots + \chi_N$$

$\Rightarrow \tilde\varphi\chi = \sum_{k=0}^{N} \tilde\varphi_k \Rightarrow$ on montre l'inégalité pour chaque $\tilde\varphi_k$.

$$\|\tilde\varphi_k|_{\partial\Omega}\|_{L^2} \leq C\,\|\tilde\varphi_k\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\underbrace{\textstyle\sum \varphi_k|_{\partial\Omega}}\|_{L^2} \leq C \sum_k \|\tilde\varphi_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C' \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\underline{\|\varphi|_{\partial\Omega}\|}_{L^2(\partial\Omega)} \leq C' \underline{\|\varphi\|}_{H^1(\Omega)} .$$

$\longrightarrow \gamma_0$ s'étend uniqt en 1 applº C^0, $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$.

$$\int \partial_j\varphi\,\psi + \int \varphi\,\partial_j\psi = \int (\gamma_0\varphi)(\gamma_0\psi)\,N_j^{ext}\,d\sigma$$

(φ_n) pris $C^\infty(\overline{\Omega})$ $\quad \varphi_n \longrightarrow \varphi \quad H^1 \quad \Rightarrow \gamma_0\varphi_n \longrightarrow \gamma_0\varphi \quad L^2$

(ψ_n) " " $\quad \psi_n \longrightarrow \psi \quad H^1 \quad\quad \gamma_0\psi_n \longrightarrow \gamma_0\psi \quad L^2$

$\underset{H^1\times H^1}{(\varphi,\psi)} \longmapsto \int_\Omega \partial_j\varphi\,\psi\,dx$ $\quad$ f. bilinéaire C^0 : $H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{C}$.

$(\varphi,\psi) \longmapsto (\gamma_0\varphi, \gamma_0\psi)$ $C^0 \longrightarrow \int (\gamma_0\varphi)(\gamma_0\psi)N_j^{ext}\,d\sigma$ bilin C^0

. M.q. $\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H^1_0(\Omega)$.

. $\varphi \in C^\infty_c(\Omega) \Rightarrow \gamma_0 \varphi = 0$

$\Rightarrow$ si $u \in H^1_0(\Omega)$, $\exists (\varphi_n)_n$ $\varphi_n \in C^\infty_c(\Omega)$, $\varphi_n \to u$ H^1.

$$0 = \gamma_0 \varphi_n \to \gamma_0 u = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\gamma_0) \supset H^1_0(\Omega)$.

Inverst: supposons que $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma_0$. M.q. $u \in H^1_0(\Omega)$.

. $f \in L^2(\Omega) \longrightarrow$ on prolonge f à $\mathbb{R}^d$ par zéro, en une $\underline{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$u \in H^1(\Omega)$, $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma_0 \longrightarrow \underline{u}$ son prolong^t par zéro.

On a déjà que $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En fait, on a+: $\underline{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

En effet: $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, et $v = \varphi|_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

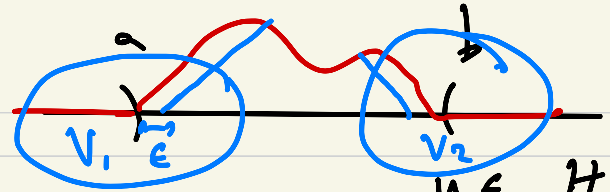
$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega u\, \partial_j v}_{\langle \underline{u}, \partial_j \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}} + \int_\Omega \partial_j u\, v = \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\gamma_0 u)}_{=0} (\gamma_0 v) N_j^{ext}\, d\sigma = 0$$

$$\langle \underline{u}, \partial_j \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \langle \underline{\partial_j u}, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

$$\langle \underline{u}, \partial_j \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} + \langle (\underline{\partial_j u}), \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = 0$$

$$\langle -\partial_j(\underline{u}), \varphi \rangle + \langle (\underline{\partial_j u}), \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_j(\underline{u}) = \underline{(\partial_j u)}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

$d = 1$



$\Rightarrow \underline{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

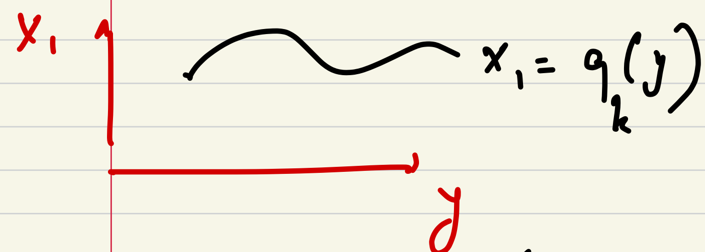
$u \in H^1(I)$

$\Rightarrow u \in C^0(I)$, et

$\gamma_0 u = u|_{\partial I}$.

$\gamma_0 u = 0 \Rightarrow u(a) = u(b) = 0$

Partition de l'unité (χ_k) comme précédemment, où $\operatorname{supp} \chi_k \subset V_k$,



$u \longrightarrow \chi_k u$ supp. dans V_k.

$\underline{(\chi_k u)} = \chi_k \underline{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

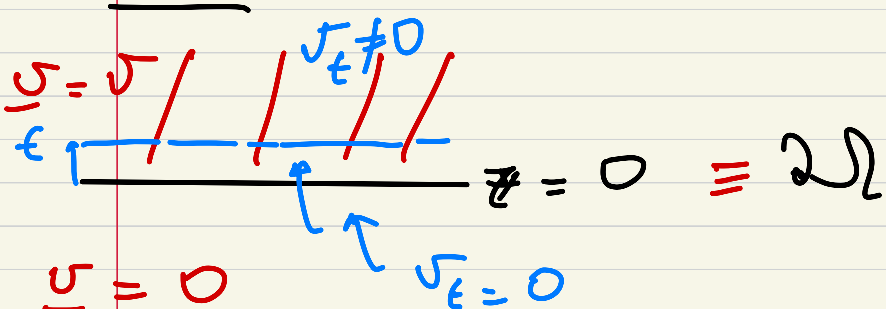
Changt de var: $v(z,y) = (\chi_k u)(z + q_k(y), y)$, $\left| \begin{array}{l} z \in \mathbb{R}_+^* \\ y \in W \end{array} \right.$

$\Rightarrow \underline{\chi_k u}(z + q(y), y) = \underline{v}(z,y)$

$\hookrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\underline{v}$ extension de v à $\mathbb{R} \times W$.

$\underline{\chi_k u} \in H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \underline{v} \in H^1(\mathbb{R} \times W)$. (à vérifier)



On "remonte" $\underline{v} \longrightarrow$

$v_\epsilon(z,y) = \underline{v}(z - \epsilon, y)$

On a $v_\epsilon \in H^1(\mathbb{R} \times W)$, $\underbrace{\text{supp } v_\epsilon}$ $\subset [\epsilon, a+\epsilon] \times W$

↳ dans un compact de $\mathbb{R}^*_+ \times W$.

$$\|v_\epsilon - \underline{v}\|^2_{H^1} = \int_0^\infty dz \int_W dy \, \big|\underline{v}(\underbrace{z-\epsilon, y}) - \underline{v}(z,y)\big|^2 + \sum_j \big|\underbrace{\partial_j \underline{v}}(z-\epsilon) - \underbrace{\partial_j \underline{v}(z)}_{L^2}\big|^2$$

On sait que $\forall \, u \in L^2(\mathbb{R}^q)$, $\tau_\epsilon u(x) = u(z-\epsilon, y)$

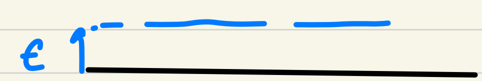
alors $\|\tau_\epsilon u - u\|_{L^2} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$

$\Rightarrow \|v_\epsilon - v\|_{H^1} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$.

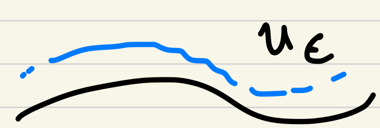
$u_\epsilon(x_1, y) = v_\epsilon(x_1 - q(y), y) = \underline{u}(x_1 - \epsilon, y)$

$\Rightarrow u_\epsilon \longrightarrow \underline{(\chi_+ u)}$ dans $H^1(\mathbb{R}^q)$.

$\Rightarrow \underbrace{u_\epsilon} \longrightarrow \chi_+ u$ dans $H^1(\Omega)$.



↳ nul au voisinage de $\partial\Omega$.



$H^1(\Omega) \ni u_\epsilon$ est à support compact dans Ω

$\Rightarrow \lim u_\epsilon$ est dans $H^1_0(\Omega)$. $\Rightarrow \operatorname{Ker} \gamma_0 \subset H^1_0$.

Thme (Pb de Dirichlet sur Ω C^∞-régulier borné).

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, C^∞-régulier.

$\forall f \in L^2$, il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \underbrace{\gamma_0 u}_{} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \quad (\text{dans } L^2(\partial\Omega, \sigma)) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ " $u_{|\partial\Omega} = 0$ "

Remarque : si Ω borné, C^∞-régulier, je prétend que la solution ci-dessus est dans $H^2(\Omega)$, et l'application

$$\Delta : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$u \longmapsto -\Delta u$$

est un isomorphisme.

Si f est + régulière (ex : $f \in H^m(\Omega)$ pour $m \in \mathbb{N}$), alors la sol$^\circ$ $u \in H^{m+2}(\Omega)$

. Si $f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, car

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega)$$

Transformée de Fourier

$\boxed{\Omega = \mathbb{R}^d.}$

$f(x) =$ $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\longrightarrow$ sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$x \in \mathbb{R}^d$

$\mathcal{F}f(\xi)$ ← variable de Fourier $\xi \in \mathbb{R}^d$. (variable duale).

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.\xi} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

$$\mathcal{F}\underbrace{(\partial_j f)}_{\text{op. différentiel en } x}(\xi) = \underbrace{i\xi_j}_{\substack{\text{op de multiplication par} \\ \text{un polynôme (en } \xi)}} \mathcal{F}f(\xi) \qquad \forall j = 1, \dots, d$$

$\longrightarrow$ résoudre des EDP à coefficients constants.

- $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{F}f \in L^\infty, C^\infty$, mais pas à supp. compact.
- Trouver un cadre fonctionnel sur lequel agit bien la TF. $\rightsquigarrow$ espace de Schwartz

Def Une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ est dit <u>à décroissance rapide</u> si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad x^\alpha f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0 .$$

Caractérise le comportement de f " à l'infini ".

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon, \quad \forall x, \ |x| > R_\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad |x^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$$

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|x^\alpha|} \leq \frac{\varepsilon}{|x|^{|\alpha|}}$$

$\Rightarrow$ une telle fonction $f(x)$ décroît + vite à l'infini que $\underbrace{\frac{1}{|x|^N}}_{\text{décroissance polynomiale}}$, $\forall N$.

$\rightarrow f(x) \searrow 0$ + vite que "polynomialement."

Si f est $C^0(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$ toutes les $\underbrace{x^\alpha f}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^d$.

$\rightarrow$ contrôler le compor^t de f lorsque $x \longrightarrow$ "bord de $\mathbb{R}^d$" $|x| \longrightarrow \infty$.

Précédemment, nos fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nulles en-dehors d'1 compact.

On va s'autoriser à considérer des f° $f \in C^\infty$, pas à sup. compact, mais "contrôlée" lorsque $|x| \to \infty$.

<u>Def</u> (espace de Schwartz) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui sont à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel, appelé l'espace de Schwartz.

<u>Ex</u>: i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

ii) $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \varphi(x) = e^{-zx^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

iii) Leibniz $\Rightarrow$ si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_1 \times \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

iv) Aucune fonction rationnelle (non nulle) n'est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la topologie induite par la famille de <u>normes</u> $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$:

$$N_p(\varphi) = \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

La topologie est engendrée par les « cylindres »

$C_p(\epsilon) = \{ \varphi ;\quad N_p(\varphi) < \epsilon \}$, $\quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{N}$

$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \left(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ N_p(\varphi) < \infty \right).$

$\uparrow$ <u>à vérifier</u>

$\vdash$