

Cours Distributions

Stephane Nonnenmacher
26/11/2020



Cours du 26/11/2020

①

Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a la caractérisation :

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, N_p(\varphi) < +\infty.$$

Prop: Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, x^\alpha \partial^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par :

— différentiation (∂^β)

— multiplié par un polynôme (x^α)

Pr: $\Rightarrow \underline{N_p(x^\alpha \partial^\beta \varphi)} \leq C_{p,\alpha,\beta} \underline{N_{p+q}(\varphi)}$

où $|\alpha|, |\beta| \leq q$.

• Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ($\rightarrow$ simple que dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$)

(φ_n) suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On dit que φ_n converge vers $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, x^\alpha \partial^\beta \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^\alpha \partial^\beta \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

$$\Leftrightarrow : \forall p \in \mathbb{N}, N_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Corollaire: si $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

(2)

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad x^\alpha \varphi_n \longrightarrow x^\alpha \varphi \quad \text{dans } \mathcal{S}$$

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \partial^\beta \varphi_n \longrightarrow \partial^\beta \varphi \quad \text{dans } \mathcal{S}$$

$\Rightarrow$ les opérations de $\cdot$ multiplié par x^α (ou un polynôme)
 $\cdot$ différentiation ∂^β
sont continues sur $\mathcal{S}$.

$\cdot$ Liens avec les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prop: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \|\varphi\|_{L^\infty} = N_0(\varphi).$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d): \quad \|\varphi\|_{L^1} \leq C_d N_{d+1}(\varphi)$

Pr: $(1 + |x|^2)^{d+1} = (1 + x_1^2 + \dots + x_d^2)^{d+1} = \sum_{|\alpha| \leq d+1} c_{\alpha,d} (x^\alpha)^2 \times |\varphi(x)|^2$
 $\Rightarrow (1 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}} |\varphi(x)| \leq \sqrt{B_d} (N_{d+1}(\varphi))^2$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(|\varphi(x)| (1 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}})}_{\frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}} dx \leq \sqrt{B_d} N_{d+1}(\varphi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}}_{C_d}$

Notation: crochets japonais $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$

$$\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^d \\ x \mapsto \langle x \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*) \\ \langle x \rangle \geq 1 \end{array}$$

Longue $|x| \rightarrow \infty$. $\langle x \rangle \sim |x|$.

On a utilisé le fait que $x \mapsto \langle x \rangle^{-(d+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Remarque: $\forall q \in \mathbb{N}$

$$(1 + |x|^q) |\psi(x)| \leq C_{q,d} N_q(\psi)$$

• $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $\forall p \in [1, +\infty[$

$\Rightarrow$ Corollaire: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p , $\forall p \in [1, +\infty[$.

• Prop²: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$\left[\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \exists (\varphi_n)_{n \geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ t.q. } \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \right.$

Pr $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ fonction platee sur $B(0, 1)$.

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) \chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

(4)

φ_n sont à supp. compact, $\varphi_n = \varphi$ dans $B(0, n)$

Leibniz $\partial^\beta (\varphi - \varphi_n)_{(x)} = \underbrace{\partial^\beta \varphi(x)}_{\leq 1} \underbrace{(1 - \chi(\frac{x}{n}))}_{\text{supp. sur } CB(0, n)} + \sum_{\substack{|\gamma| \geq 1 \\ \gamma \leq \beta}} C_\beta^\gamma \underbrace{\frac{1}{n^{|\gamma|}}}_{\substack{|\gamma| \geq 1 \\ \gamma \leq \beta}} \underbrace{\partial^{\beta-\gamma} \varphi(x)}_{\substack{|\gamma| \geq 1 \\ \gamma \leq \beta}} \underbrace{\partial^\gamma \chi(\frac{x}{n})}_{\substack{|\gamma| \geq 1 \\ \gamma \leq \beta}}$

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi - \varphi_n)\| \leq \underbrace{\sup_{|x| > n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|}_{\substack{\downarrow n \rightarrow \infty \\ 0}} + \underbrace{\frac{C}{n}}_{\substack{\downarrow n \rightarrow \infty \\ 0}} \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ |\gamma| \geq 1}} \|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x)\|_\infty$$

□

• Transf. de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \implies \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Déf. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on note $\widehat{\varphi}$, $\mathcal{F}(\varphi)$, parfois $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(\varphi(x))$, la fonction de $\mathcal{L}^\infty$:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x) dx.$$

$\mathcal{F}: \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est la T.F. c'est 1 application linéaire.
 $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}^\infty$

Propo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- i) $\forall j = 1, \dots, d$ $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} (x_j \varphi(x)) = i \underbrace{\partial_{\xi_j} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)}_{i = \sqrt{-1}}$
- ii) $\mathcal{F}(\partial_{x_j} \varphi)(\xi) = i \xi_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \leftarrow \text{important}$
- iii) $a \in \mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} (\varphi(x-a)) = e^{-i a \cdot \xi} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$
- iv) $a \in \mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} (e^{i a \cdot x} \varphi(x)) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi - a)$
- v) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\underbrace{N_p(\hat{\varphi}) \leq C_{p,d} N_{p+d+1}(\varphi)}_{\rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$

Pr i) $\xi \mapsto e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, et

$$|\partial_{\xi_j} (e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x))| = |-i x_j e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x)| = |x_j| |\varphi(x)|$$

$\Rightarrow$ l.c. de différentiation sous $\int$

$$\partial_{\xi_j} \int e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x) dx = \int \underbrace{-i x_j}_{\text{}} \underbrace{e^{-i x \cdot \xi}}_{\text{}} \varphi(x) dx = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} (-i x_j \varphi(x))(\xi) \overset{\text{v}}{=} \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} (-i x_j \varphi(x))(\xi)$$

(6)

$$ii) \int \underbrace{\partial_1 \varphi(x)}_{\text{1PP in } x_1} e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int \partial_1 \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 \right) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (-\varphi(\partial_1 e^{-ix \cdot \xi})) dx_1 \right) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (-\varphi)(-i\xi_1) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 \right) dy = i\xi_1 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

iii, iv): simple.

$$i) \widehat{\partial_j \varphi} = \xi_j \widehat{\varphi}$$

$$ii) |\beta| \partial_\xi^\beta \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}(\xi^\beta \varphi), \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d$$

$$i) \widehat{\partial_{x_j} \varphi} = \xi_j \widehat{\varphi}(\xi)$$

$$\rightarrow i) |\alpha| \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\partial^\alpha \varphi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$$

$$i) |\alpha| + |\beta| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\partial^\alpha (\xi^\beta \varphi(x)))$$

$$N_p(\widehat{\varphi}) = \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| = \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \|\widehat{\varphi}(\partial^\alpha (\xi^\beta \varphi))\| \leq \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^1}^\alpha$$

$$\leq B_d \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq p} N_{dH}(\partial^\alpha \varphi) \dots$$

$$N_p(\hat{\psi}) \leq B_1 \sup_{|x|, |p| \leq p} N_{d+1}(\mathcal{I}_x^p \psi) \leq C_{p,d} N_{p+d+1}(\psi) \quad (7)$$

Notation :

$$\frac{1}{i} \partial_i = D_i$$

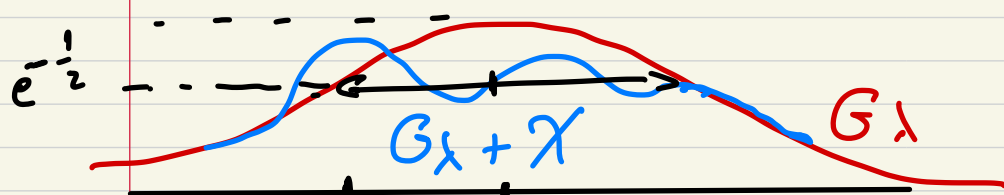
$$\sim \left\{ \begin{array}{l} F(D_j \psi) = i_j F(\psi) \\ D_j F(\psi) = -F(x_j \psi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{D_j \psi} = i_j \widehat{\psi} \\ \widehat{x_j \psi} = -D_j \widehat{\psi} \end{array} \right.$$

• Gaussiennes

$$\lambda > 0, \quad G_\lambda(x) = e^{-\lambda |x|^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$G_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$$

$$(e^{-\lambda |x|^2/2} \notin \mathcal{F} \text{ car non } C^\infty)$$



Prop :

$$\widehat{G}_\lambda = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{d/2} G_{1/\lambda}$$

↪ Gaussiennes de largeur $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$G_\lambda + \chi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d) \text{ si } \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow G_\lambda(x) = e^{-1/2}$$

(8)

Pr. $G_\lambda(x_1, \dots, x_d) = G_\lambda(x_1) \cdots G_\lambda(x_d)$
 $e^{-ix \cdot \xi} = e^{-ix_1 \xi_1} \cdots e^{-ix_d \xi_d}$

→ Étudier le cas $d=1$. $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \xi} G_\lambda(x) dx$

Remarque que G_λ satisfait $G'_\lambda(x) = -\lambda x G_\lambda(x)$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{G}_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \xi \hat{G}_\lambda(\xi)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \xi \hat{G}_\lambda(\xi) = -i\lambda \frac{d}{d\xi} \hat{G}_\lambda(\xi)$$

→ solutions sont de la forme

$$C \cdot e^{-\xi^2/2\lambda} = \hat{G}_\lambda(\xi)$$

$$\hat{G}_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2} k^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Pr. alternative: déformation de contour de l'intégrale dans $\mathbb{C}$.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \xi - \lambda x^2/2} dx$$

$$e^{-\xi^2/2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\lambda}{\xi} (x + i\frac{\xi}{\lambda})^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda}} \int_{C_\xi} e^{-\frac{\lambda}{2} z^2 - iz\xi} dz = -\frac{1}{\xi} \left[(x + i\frac{\xi}{\lambda})^2 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{\xi} \left(x + i\frac{\xi}{\lambda} \right)^2 - \frac{\xi^2}{2\lambda}$$

$\xi = x + i\frac{\xi}{\lambda}$

Formule d'inversion de Fourier

Thm $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$

$\Rightarrow F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est injective

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{opération "TF inverse" } F^{-1}}$

Pr Propriétés iii) $\rightarrow$ il suffit de vérifier la formule pour $x=0$.
(ensuite appliquer ii))

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \rightarrow \varphi_x(y) := \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i x \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

F linéaire $L: \varphi \in \mathcal{S} \mapsto \int \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$ forme lin. C^∞ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\rightarrow$ Si $\varphi(0)=0 \Rightarrow L(\varphi)=0$ À montrer: $L\varphi = C\varphi(0)$

Si $\varphi(0)=0 \Rightarrow$ Lemme de Hadamard sur $\mathbb{R}^d$: $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_d \in C^\infty$,
 $\varphi \in C^\infty$ tq $\varphi(x) = \sum_{j=1}^d x_j \varphi_j(x)$

Démo du lemme de Hadamard $\Rightarrow$ les $\psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (à vérifier) (10)

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^d x_j \psi_j(x)$$

$\mathcal{F} \downarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\zeta \quad \widehat{\psi}(\zeta) = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} i \partial_{\zeta_j} \widehat{\psi}_j(\zeta) d\zeta = 0 \quad . \quad \int d\zeta_j \quad \partial_{\zeta_j} \widehat{\psi}(\zeta_1, \dots, \zeta_j, \zeta)$$

$\Rightarrow$ le noyau de la f. linéaire $\psi \mapsto \psi(0)$ est contenu dans le noyau de la f. lin. L .

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} \text{ tq } L(\psi) = c \psi(0), \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

ex: $\psi = G_1$ gaussienne standard $\Rightarrow \boxed{c = (2\pi)^d}$.

$$\widehat{\psi} = (2\pi)^{d/2} G_1 \quad \Rightarrow \quad \int \widehat{\psi} = (2\pi)^{d/2} \int G_1(\zeta) d\zeta = (2\pi)^d \quad \square$$

Notation: symétrie p/r $0 \in \mathbb{R}^d$

$$\sigma x = -x$$

$$(\sigma \psi)(x) = \psi(-x)$$

$$\sigma: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

$$\psi \mapsto \psi(\cdot)$$

$$(\text{cf. } e^{-i \cdot x} \cdot \{ = e^{-i x \cdot \{- \}})$$

$${}^u \widehat{F}_{e^{i x \cdot \zeta}} = \widehat{f} \circ \sigma_x = \sigma_{\zeta} \circ \widehat{f}$$

Corollaire: la T.F. est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Son inverse est donné par

$$F^{-1} = (2\pi)^{-d} \check{F} = (2\pi)^{-d} F \circ \sigma = (2\pi)^{-d} \sigma \circ F$$

$$\Rightarrow F \circ F = (2\pi)^d \sigma.$$

$$\Rightarrow F^4 = (2\pi)^{2d} \text{Id}$$

• "Echange des chapeaux"

Prop: $\varphi \in \mathcal{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \hat{\psi}(x) dx$

Pv: par Fubini

$$\begin{aligned} \int \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi &= \int \left(\int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \right) \psi(\xi) d\xi \\ &= \int \left(\int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) \psi(\xi) d\xi \right) dx = \int \varphi(x) \underbrace{\left(\int e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi \right)}_{\hat{\psi}(x)} dx \end{aligned}$$

⇒ Prop^o Formule de Plancherel

$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\int \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = (2\pi)^{-d} \int \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi$$

P_r. $\widehat{\overline{\psi}}(\xi) = \overline{(\widehat{\psi})(-\xi)} = \sigma(\widehat{\overline{\psi}})$.

$$\rightarrow \int \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi = \int \varphi(x) \overbrace{\widehat{(\overline{\psi})}}^{\text{échange des places}}(x) dx$$

$$(2\pi)^d \overline{\widehat{\psi}} = \sigma \widehat{\overline{\psi}} = \widehat{(\sigma \widehat{\overline{\psi}})} = \widehat{(\widehat{\psi})}$$

$$\Rightarrow \text{l'intégrale vaut } (2\pi)^d \int \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

→ en terme de π scalaires hermitiens sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$:

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2.$$

(13)

Corollaire : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \|\varphi\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2}$

Remarque :

On peut décider de normaliser la T.F. par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i x \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathcal{F}(\varphi)(\xi). \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est une isométrie pour la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$.