

Exercice 10.1 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $u_0 \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^4 u + a \partial_x^2 u + bu = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Etant donnée une solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ du problème (1), on note $c_n(t)$ les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$. Déterminer la relation satisfaite par ces coefficients.
- Montrer que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (1) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.
- Déterminer le sous-espace F_1 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données initiales u_0 pour lesquelles la solution u trouvée à la question précédente vérifie de plus $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$.
- Déterminer le sous-espace F_2 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données initiales u_0 pour lesquelles la solution u vérifie $\|u(t, \cdot)\|_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Déterminer le sous-espace F_3 de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ constitué des données u_0 pour lesquelles il existe $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2_{2\pi}(\mathbb{R}))$ tel que $u(0) = u_0$ et vérifiant l'équation considérée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.2 Soient a, b, c, d des nombres complexes. On souhaite déterminer à quelles conditions le problème suivant admet une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 2π -périodique en espace :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = a \partial_x^2 u + 2b \partial_t \partial_x u + c \partial_t u + d \partial_x u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Ecrire l'équation satisfaite par les coefficients de Fourier $c_n(t)$ de la fonction $u(t, \cdot)$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ les racines de l'équation caractéristique s'écrivent $\lambda_n = n\mu_n$ avec $P_n(\mu_n) = 0$, où P_n est un trinôme que l'on déterminera.
- Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire $P_n(z) = P(z) + R_n(z)$, où P est un polynôme indépendant de n et $R_n(z)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- On suppose ici que les racines de P sont distinctes. Montrer que la distance entre les racines de P_n et celles de P est en $O(n^{-1})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Conclure dans ce cas.
- On suppose maintenant que P a une racine double. Etudier le comportement des racines de P_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Conclure.

Exercice 10.3 On considère la fonction 2π -périodique f définie par

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} + \frac{e^{-ix}}{2 - e^{-ix}}.$$

- Calculer les coefficients de Fourier de f . On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $g : z \mapsto z/(2 - z)$ en précisant son rayon de convergence.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $u_c \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $u_c(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et vérifiant l'équation $\partial_t u_c - i\partial_x^2 u_c = f(x - ct)$. Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des réels c tels que $N(t) = \|u_c(t, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2$ n'est pas une fonction bornée sur \mathbb{R} , et donner dans ce cas un équivalent de $N(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.
3. Soit $g \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ on se propose d'étudier la structure de l'ensemble \mathcal{V} des $v \in C(\mathbb{R}, L_{2\pi}^2(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_t v - i\partial_x^2 v = g(x - ct)$.
- a. On suppose d'abord que $c \notin \mathcal{C}$. Montrer que tout élément de \mathcal{V} se décompose de manière unique sous la forme $v(t, x) = h(x - ct) + w(t, x)$ où $h \in H_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ est de moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$ et vérifie une équation différentielle à préciser, et où $w \in C(\mathbb{R}, L_{2\pi}^2(\mathbb{R}))$ est solution de l'équation $\partial_t w - i\partial_x^2 w = 0$.
- b. Comment doit-on modifier le résultat de la question précédente si $c \in \mathcal{C}$?

Exercice 10.4 On considère le problème suivant pour l'équation des cordes vibrantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0, & (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, l), \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, l) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ (u, \partial_t u)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in (0, l). \end{cases}$$

On supposera le réel $l > 0$ fixé. Pour tout entier $k \geq 0$, on notera X_k le sous-espace de $H_{2l}^k(\mathbb{R})$ formé des fonctions paires, à valeurs réelles et de valeur moyenne nulle.

1. Vérifier que tout $u \in X_2$ vérifie la condition au bord $u'(0) = u'(l) = 0$.
2. Soient $\chi \in C_c^\infty(]-1, 1])$ qui vaut 1 au voisinage de 0, et $\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi((x + nl)/\varepsilon)$.
- a. Soient $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $u \in C(\mathbb{R}_+, X_2)$. Montrer, en intégrant par parties, que
- $$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \psi(t) (\phi \chi_\varepsilon)''(x) dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \psi(t) \phi''(x) dx dt.$$
- b. On suppose désormais que $u \in C(\mathbb{R}_+, X_2)$ vérifie l'équation $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+^* \times]0, l[$. Montrer que u vérifie encore cette équation dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \setminus l\mathbb{Z}$.
- c. En déduire que u vérifie l'équation $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.
3. Montrer que le problème (2) admet une unique solution $u \in C(\mathbb{R}_+, X_2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, X_1)$ pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in X_2 \times X_1$. Etablir en outre l'égalité $E(t) = E(0)$ avec

$$E(t) = \int_0^l (\partial_t u)^2(t, x) + (\partial_x u)^2(t, x) dx.$$

Vérifier enfin que $t \mapsto u(t, 0) \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$ et calculer $\|\partial_t u(\cdot, 0)\|_{L^2(0, 2l)}^2$ en fonction de $E(0)$.

4. Soit $T > 0$. On considère l'application Λ définie par :

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} X_2 \times X_1 & \rightarrow & H^1(]0, T]) \\ (u_0, u_1) & \mapsto & u(\cdot, 0) \end{array}$$

Montrer que si $T = 2l$ alors Λ est injective. Est-ce encore le cas si $T < 2l$?