Différents laplaciens sur $[0,1]$

Exercice 5.1 Propriétés de $H^1(I)$ et $H^1_0(I)$

Soit $I =]0,1[$. On considère $H^1(I) = \{u \in L^2(I) \ : \ u' \in L^2(I)\}$ muni du produit scalaire $\langle u,v\rangle_{H^1(I)} = \langle u,v\rangle_{L^2(I)} + \langle u',v'\rangle_{L^2(I)}$. L'objet de l'exercice est de retrouver quelques propriétés de cet espace.

1. Soit $u \in H^1(I)$. Rappeler pourquoi il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour presque tout $x \in I$ on a
$$u(x) = a + \int_0^x u'(y)dy$$
et montrer pourquoi le membre de droite est continu en x. On identifiera désormais u avec son représentant continu. Etablir la relation suivante :
$$\forall u,v \in H^1(I) \qquad \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u(x)v'(x)dx\,.$$

2. En remarquant que pour tout $u \in H^1(I)$ la fonction $x \mapsto u(0)$ est une fonction constante et donc $|u(0)| = \|u(0)\|_{L^2(I)}$, montrer qu'on a
$$|u(0)| \leq \|u\|_{L^2(I)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I)\,.$$
En déduire que l'injection $i : H^1(I) \to \mathcal{C}(\overline{I})$ est continue.

3. On rappelle que, par définition, $H^1_0(I)$ est l'adhérence de $C^\infty_0(I)$ dans $H^1(I)$. On note $K = \{u \in H^1(I) \ : \ u(0) = u(1) = 0\}$. Pour tout $u \in L^2(I)$, on note $\overline{u}$ son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}$ et on pose $u_a(x) = \overline{u}(1/2 + a(x-1/2))$ pour tout $a > 1$.
   a. Montrer que $H^1_0(I) \subset K$.
   b. Vérifier que pour tout $u \in K$ on a $(u_a)' = a(u')_a \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $u \in K$ on a $u_{a|I} \in H^1_0(I)$, où $u_{a|I}$ est la restriction de u_a sur I.
   c. Montrer que si $a \to 1$, alors $u_a \to \overline{u}$ dans $H^1(\mathbb{R})$ pour tout $u \in K$. En déduire que $K \subset H^1_0(I)$.

4. En déduire l'inégalité de Poincaré
$$(1) \qquad \forall u \in H^1_0(I) \qquad \|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_{L^2(I)}\,.$$

5. Pour tout $u \in L^2(I)$ on note u^* sa valeur moyenne sur I. En remarquant que $u(0) = u(0)^*$, exprimer $u(x) - u^*$ en fonction de u', puis établir une autre inégalité de Poincaré :
$$\exists c > 0 \quad \forall u \in H^1(I) \qquad \|u - u^*\|_{L^2(I)} \leq c\,\|u'\|_{L^2(I)}\,.$$

Exercice 5.2 Laplacien de Neumann sur I et Laplacien périodique sur le tore $\mathbb{T}^1$

Soit $I =]0,1[$. On considère $L^2(I)$ muni de sa structure hilbertienne usuelle. Etant donné $a : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit un opérateur non borné A sur $L^2(I)$ en posant $Au = -(au')'$ pour tout élément $u \in D(A) = \{u \in H^2(I) \,:\, u'(0) = u'(1) = 0\}$.

a. Montrer que A est un opérateur accrétif sur $L^2(I)$.

b. Montrer que l'application

$$H^1(I) \times H^1(I) \ni (u,v) \mapsto b(u,v) = \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \langle au', v'\rangle_{L^2(I)}$$

définit une forme sesquilinéaire, continue et coercive sur $H^1(I)$. En déduire, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, que A est maximal accrétif.

c. On note $S(t)$ le semi-groupe de générateur A et on choisit $u_0 \in L^2(I)$. De quel problème d'évolution la fonction $u(t) = S(t)u_0$ est-elle solution ?

d. Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(I)$ on a

$$\forall t \geq 0 \qquad \int_I S(t)u_0(x)dx = \int_I u_0(x)dx\,.$$

e. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(I)$

$$\forall t \geq 0 \qquad \Big\| S(t)u_0 - \int_I u_0(x)dx \Big\|_{L^2(I)} \leq e^{-ct} \Big\| u_0 - \int_I u_0(x)dx \Big\|_{L^2(I)}\,.$$

On pourra commencer par montrer que l'espace $L^2_* = \{u \in L^2(I) \,:\, u^* = 0\}$ muni de produit scalaire de $L^2(I)$ est un espace de Hilbert (on rappelle que u^* désigne la valeur moyenne de u sur I). Ensuite, en utilisant une inégalité de Poincaré, on pourra montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'opérateur $A - c$ est maximal accrétif sur L^2_*.

f. On suppose que $a(0) = a(1)$. Reprendre les questions précédentes pour un domaine

$$D(A) = \{u \in H^2(I) \,:\, u(0) = u(1)\,,\ u'(0) = u'(1)\}\,.$$

On pourra commencer par montrer que l'espace $H^1_{per} = \{u \in H^1(I) \,: u(0) = u(1)\}$ muni de produit scalaire de $H^1(I)$ est un espace de Hilbert. Ensuite on pourra étudier la forme $b(u,v)$, définie dans la question b, sur l'espace $H^1_{per} \times H^1_{per}$.

Exercice 5.3 Laplacien avec conditions au bord mixtes

Soit $I =]0,1[$. On considère l'espace $L^2(I)$ muni de son produit scalaire usuel. Etant donnés $a : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit un opérateur A_α sur $L^2(I)$ en posant $A_\alpha u = -(au')'$ pour $u \in D(A_\alpha) = \{u \in H^2(I) \,:\, \alpha u(0) = u'(0)\,,\ u(1) = 0\}$. On note $H^1_d = H^1(I) \cap \{u(1) = 0\}$ et

$$I(\alpha) = \inf_{u \in S} F(\alpha, u)\,, \quad F(\alpha,u) = \alpha a(0)|u(0)|^2 + \int_0^1 a(x)|u'(x)|^2 dx\,,$$

où $S = \{u \in H^1_d \,:\, \|u'\|_{L^2(I)} = 1\}$.

1. Montrer que H_d^1 muni du produit scalaire de $H^1(I)$ est un espace de Hilbert. Démontrer l'inégalité de Poincaré (1) pour tout $u \in H_d^1$.

2. Montrer que si $I(\alpha) \geq 0$ (resp. > 0) alors A_α est accrétif (resp. maximal accrétif).

3. a. Montrer que I est croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur un voisinage de 0.

   b. Trouver $k > 0$ tel que $|F(\alpha, u) - F(\alpha', u)| \leq k|\alpha - \alpha'|$ pour tout $u \in S$. En déduire que I est une fonction lipschitzienne.

4. On veut montrer que I admet un unique zéro que l'on notera α_0 dans la suite. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux zéros $\alpha < \alpha'$. Soit une suite d'éléments $u_n \in S$ telle que $F(\alpha', u_n) \to 0$. Montrer que $u_n(0) \to 0$ et trouver une contradiction.

5. Soit $\lambda > 0$. On note $J = \inf_{u \in S}(F(\alpha_0, u) + \lambda \|u\|^2_{L^2(I)})$.

   a. Vérifier que $J \geq 0$. Montrer que si $J > 0$ alors l'opérateur $A_{\alpha_0} + \lambda$ est maximal accrétif.

   b. On suppose par l'absurde que $J = 0$. Parvenir à une contradiction en considérant une suite minimisante et en utilisant un argument de compacité dans $\mathcal{C}(\overline{I})$.

6. On note $q_\alpha(u, v) = \alpha a(0)\bar{u}(0)v(0) + \int_0^1 a(x)\bar{u}'(x)v'(x)dx$.

   a. Montrer qu'il existe une suite d'éléments $u_n \in S$ telle que $F(\alpha_0, u_n) \to 0$ et $u \in H_d^1$ non nul tels que $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}(\overline{I})$ et $u_n' \rightharpoonup u'$ dans $L^2(I)$.

   b. Vérifier que $F(\alpha_0, u) = \inf_{u \in H_d^1} F(\alpha_0, u)$. En déduire que $q_{\alpha_0}(u, v) = 0$, pour tout $v \in H_d^1$, puis que u vérifie dans $\mathcal{D}'(I)$ l'équation $(au')' = 0$ avec les conditions $u(1) = 0$ et $u'(0) = \alpha_0 u(0)$.

   c. En conclure que $\alpha_0 = u_*'(0)$, où u_* est solution d'un problème à préciser.