Exercice 6.1 Oscillateur harmonique $1d$ en mécanique quantique

Soit $\mathcal{H} = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, u' \in L^2(\mathbb{R})\,,\; xu \in L^2(\mathbb{R})\}$ muni du produit scalaire

$$(u|v)_1 = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\overline{v'(x)} + (1+x^2)u(x)\overline{v(x)}\,dx\ .$$

1. a. Vérifier que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

   b. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ dans un voisinage de 0. Pour tout $u \in \mathcal{H}$, vérifier que la suite de fonctions $u_n(x) = \chi(x/n)u(x)$ converge vers u dans $\mathcal{H}$ lorsque $n \to +\infty$.

   c. Soit $L > 0$. Montrer que sur le sous-espace $\mathcal{H}_L = \{u \in \mathcal{H} \,:\, \operatorname{supp} u \subset [-L, L]\}$, la norme de $\mathcal{H}$ est équivalente à la norme de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

   d. En déduire la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$ en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$.

2. Pour $u \in D(H) = \{u \in \mathcal{H} \,:\, -u'' + x^2u \in L^2(\mathbb{R})\}$ on définit l'opérateur (oscillateur harmonique) $Hu = -u'' + x^2u$. Montrer que

$$\forall (u,v) \in D(H) \times \mathcal{H} \qquad \int_{\mathbb{R}} [Hu](x)v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u'(x)v'(x) + x^2u(x)v(x)dx\,.$$

3. Montrer que les opérateurs $H, iH, -iH$ sont maximaux accrétifs sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

4. Soit $E = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \,:\, -u'' + x^2u \in L^2(\mathbb{R})\}$. On va montrer que $D(H) = E$.

   a. Soit $q \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles telle que $q'' = (1+x^2)q$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a alors $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puis montrer que la fonction $r = \sqrt{1+q^2} - 1$ est convexe et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que q est identiquement nulle.

   b. Soit $u \in E$. On note $f = -u'' + x^2u$ et $v = (H+I)^{-1}(f+u)$. Pourquoi v est il bien défini ? En distinguant parties réelles et imaginaires de $u - v$, montrer que $u \in D(H)$.

5. En déduire que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ il existe un unique $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ tel que $u(0) = u_0$ et vérifiant dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ l'équation $i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2u = 0$.

6. On considère le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ de $L^2(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de la forme

$$f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

où P est un polynôme quelconque. On introduit les opérateurs suivants agissant sur $\mathscr{E}$,

$$D_- = \frac{d}{dx} + x = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\ ,\ D_+ = -\frac{d}{dx} + x = 2x - D_-\ .$$

On appelle D_- opérateur d'annihilation et D_+ opérateur de création.

   a. Vérifier que les opérateurs D_-, D_+ sont des endomorphismes de $\mathscr{E}$ et que

$$\forall f \in \mathcal{E} \qquad Hf = D_-D_+f - f = D_+D_-f + f\ .$$

b. Montrer que

$$\ker D_- = \mathbb{C}\varphi\ ,\ \ \varphi(x) := \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ .$$

En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$HD_+^n\varphi = (2n+1)D_+^n\varphi\ .$$

c. Expliquer pourquoi la famille $(D_+^n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.

d. Montrer que $\mathscr{E}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. (On pourra montrer que si $h \in \mathcal{E}^\perp$, alors la transformée de Fourier de $h(x)e^{-x^2/2}$ est nulle.)

e. Montrer que la famille $(D_+^n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} |D_+^n\varphi(x)|^2\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n\,n!\ .$$

On pourra utiliser (après l'avoir jusitifié) le fait que

$$D_+^n\varphi = (-1)^n\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

f. En déduire que la suite des fonctions d'Hermite $(\phi_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\phi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}2^{-\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$$

est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, telle que

$$H\phi_n = (2n+1)\phi_n\ .$$

7. a. On rappelle que l'injection $H_0^1(]-L,L[) \to L^2(]-L,L[)$ est compacte pour tout $L>0$. En déduire que l'injection $\mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R})$ est également compacte.

b. Peut-on prévoir le fait que $(H+I)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur auto-adjoint compact en utilisant le résultat de la question 6.f? Peut-on prévoir ce fait en utilisant le résultat de la question 7.a?

c. En utilisant le résultat de la question 6.f donner un développement en série de la solution de l'équation $i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = 0$ avec la donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 6.2 Equation de convection-diffusion avec amortissement et forçage

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a>0$ un réel, $b \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)\cap C_b^1(\Omega)$ un champ de vecteurs vérifiant $\nabla\cdot b = 0$, et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$ une fonction $1-$périodique. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{r}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + b\cdot\nabla_x u(t,x) + au(t,x) = f(t,x)\,,\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\Omega\,,\\ u(t,x) = 0\,,\qquad (t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\partial\Omega\,,\\ u(0,x) = u_0(x)\,,\quad x\in\Omega\,.\end{array}\right.$$

1. Soit A l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ en posant $Au = -\Delta u + b\cdot\nabla u + au$ pour tout $u \in D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\ :\ -\Delta u \in L^2(\Omega)\}$.

a. Vérifier que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ la partie réelle de $\langle u, b \cdot \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}$ est nulle.

b. En déduire que A est un opérateur accrétif sur $L^2(\Omega)$.

c. Montrer que si a est assez grand, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ vérifiant $\|S(t)\| \leq \exp(-ct)$ pour un certain $c > 0$.

2. Dans ce qui suit, on supposera que a est assez grand, au sens de la question précédente. On cherche une donnée initiale pour laquelle la solution du problème $(*)$ est $1-$périodique.

a. Donner l'expression de la solution $u(t)$ de la formulation faible du problème $(*)$, en fonction de u_0 et f. On note $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ la fonction qui à u_0 associe $u(1)$.

b. Montrer que pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ la suite des itérés $(P^n u_0)_{n \geq 0}$ est bornée.

c. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ fixé. Pour tout entier $N \geq 1$, on définit v_N par $v_N = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} P^n u_0$. Vérifier que $P(v_N) - v_N = N^{-1}(P^{N+1} u_0 - P u_0)$. En déduire que $P(v_N) - v_N \to 0$.

d. En utilisant un argument de convergence faible, en conclure que l'on peut trouver un élément $v \in L^2(\Omega)$ tel que $P(v) = v$.

e. Montrer que pour toute donnée $u_0 \in L^2(\Omega)$, la solution du problème $(*)$ converge vers la solution de donnée initiale v. En déduire l'unicité de la solution $1-$périodique.

Exercice 6.3 Soit $H = \{(u, v) \in H^2(0,1) \times L^2(0,1) \ : \ u(0) = u(1) = 0\}$. On note

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = \int_0^1 (1 + e^{-x^2}) u_1''(x) \overline{u_2''(x)} dx + \int_0^1 u_1'(x) \overline{u_2'(x)} dx + \int_0^1 v_1(x) \overline{v_2(x)} dx \,.$$

On introduit sur H un opérateur non borné A de domaine

$$D(A) = \{(u, v) \in H \cap H^4(0,1) \times H^2(0,1) \ : \ u''(0) = u''(1) = v(0) = v(1) = 0\} \,.$$

Pour tout $(u, v) \in D(A)$ on pose $A(u, v) = (v, -((1 + e^{-x^2}) u'')'' + u'')$.

a. Vérifier que H muni de ce produit scalaire est bien un espace de Hilbert.

b. Montrer que A est un opérateur maximal accrétif sur H.

c. En déduire un résultat d'existence et d'unicité concernant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((1 + e^{-x^2}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,.$$

Montrer que la quantité suivante est conservée au cours du temps :

$$E(t) = \int_0^1 |\partial_t u(t, x)|^2 + (1 + e^{-x^2}) |\partial_x^2 u(t, x)|^2 + |\partial_x u(t, x)|^2 dx \,.$$