Exercice 8.1 Equation de la chaleur avec conditions au bord de Neumann
On note $I =]0, \pi[$ et $\langle u, v\rangle = \int_I u(x)\overline{v(x)}dx$ pour tous $u, v \in L^2(I)$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\phi_n(x) = (2/\pi)^{1/2}\sin(nx)$.
   a. Déterminer tous les couples $(\phi, \lambda) \in H_0^1(I) \times \mathbb{R}_+$ vérifiant l'équation $\phi'' + \lambda\phi = 0$.
   b. En déduire que la famille $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$.
2. On note $\psi_0(x) = (1/\pi)^{1/2}$ et $\psi_n(x) = (2/\pi)^{1/2}\cos(nx)$ pour tout $n \geq 1$.
   a. Déterminer tous les couples $(\psi, \lambda) \in H^2(I) \times \mathbb{R}_+$ vérifiant l'équation $\psi'' + \lambda\psi = 0$ ainsi que les conditions $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.
   b. En déduire que la famille $(\psi_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$.
3. Soit une suite $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ telle que $\sum_{n=1}^N n u_n \phi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(I)$ lorsque $N \to +\infty$.
   a. Calculer la dérivée seconde de $\sum_{n=1}^N n^{-1} u_n \phi_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est nécessairement identiquement nulle.
4. Montrer que $H^1(I) = \{u \in L^2(I) \,:\, (n\langle u, \psi_n\rangle) \in \ell^2(\mathbb{N})\}$.
5. Déterminer la constante $c > 0$ optimale dans l'inégalité suivante :
$$\forall u \in H^1(I) \qquad \|u - u^*\|_{L^2(I)} \leq c\|u'\|_{L^2(I)} .$$
6. Expliciter le semi-groupe de la chaleur avec conditions de Neumann sur I.

Exercice 8.2 Soit $I =]0, 1[$. A tout $u \in L^2(I)$, on associe le prolongement $\overline{u} \in L^2(\mathbb{R})$, défini par $\overline{u}(x) = u(x)$ si $x \in I$ et $\overline{u}(x) = 0$ sinon, et le périodisé $u_{per} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_n \overline{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

a. Etant donné $u \in H^1(I)$, calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la dérivée $(u_{per})'$ en fonction de $(u')_{per}$ et du saut $\sigma = u(1) - u(0)$.

b. Exprimer la valeur des normes $\|u\|_{L^2(I)}$ et $\|u'\|_{L^2(I)}$ en fonction des coefficients de Fourier de u_{per} et du saut σ.

Exercice 8.3 Soit $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ le semi-groupe défini par $\mathcal{F}(S(t)u)(\xi) = e^{-t\xi^2}\mathcal{F}(u)(\xi)$ pour tous $t \geq 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$.

a. Quelle est la valeur de $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))}$?

b. Vérifier que $\lim_{t\to+\infty} \|S(t)u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$.

c. Soit $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ de limite nulle en $+\infty$. Montrer qu'il existe $u \in L^2(\mathbb{R})$ tel que
$$\mathcal{F}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sup_{n\geq k} \phi(n) - \sup_{n\geq k+1} \phi(n))^{1/2} \chi_k ,$$
où les χ_k sont des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ de norme 1 supportés dans $](k+1)^{-1/2}, k^{-1/2}[$. Trouver $c > 0$ tel que $\|S(n)u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq c\phi(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer avec **3.3** et **7.4**.

Exercice 8.4 Equation de Schrödinger libre dans $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,2]$

On se place sur $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1,2]$ et l'on considère l'opérateur A défini par $Au = iu''$ pour tout $u \in D(A) = \{u \in L^p(\mathbb{R}) \,:\, u'' \in L^p(\mathbb{R})\}$.

1. On se donne deux réels $\lambda > 0$ et $p \in [1,2]$ fixés.

   a. Calculer la transformée de Fourier inverse $g_\lambda = \mathcal{F}^{-1}((\lambda - i\xi^2)^{-1})$.

   b. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $(A+\lambda)u = f$ admet une unique solution $u \in D(A)$, dont on donnera l'expression à l'aide de g_λ.

2. On rappelle le résultat d'interpolation suivant. Soit $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ linéaire. On suppose qu'il existe $1 \leq p < q$ tels que $T_{|L^p(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ et $T_{|L^q(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}))$. Alors pour tout $r \in [p,q]$ on a $T_{|L^r(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(L^r(\mathbb{R}))$ avec la majoration

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^r(\mathbb{R}))} \leq \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}))}\,, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}\,.$$

   a. Quelle est la valeur de $\|(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))}$? Calculer $\|g_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})}$ puis $\|(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))}$.

   b. En déduire une majoration de $\|(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))}$ lorsque $p \in]1,2[$.

   c. Peut-on appliquer le théorème de Hille-Yoshida à l'opérateur A dans le cas $p \in [1,2[$?

3. Soit $p \in [1,2[$. On suppose par l'absurde que A génère un semi-groupe $S : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$.

   a. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Quelle équation $v(t) = \mathcal{F}(S(t)f)$ vérifie-t-elle ? En déduire sa valeur.

   b. Soit $a > 0$. On note $u_a = \mathcal{F}^{-1}(\exp(-a\xi^2))$. Calculer $\|u_a\|_{L^p(\mathbb{R})}$ et $\|S(t)u_a\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

   c. Conclure à une contradiction, en observant que pour tout $t > 0$ on a la limite

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{\|S(t)u_a\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|u_a\|_{L^p(\mathbb{R})}} = +\infty\,.$$

Exercice 8.5 Non-unicité de solution de l'équation de la chaleur

On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $h(t) = \exp(-1/t^2)$ si $t > 0$ et $h(t) = 0$ sinon.

a. En appliquant la formule de Cauchy à $z \mapsto \exp(-1/z^2)$ avec un chemin bien choisi, montrer que l'on peut trouver un réel $a > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t > 0 \qquad |h^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(at)^k} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\,.$$

b. Pour tout $k \geq 0$, on définit $(t,x) \mapsto u_k(t,x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ en posant

$$u_k(t,x) = \frac{1}{(2k)!}\, h^{(k)}(t) x^{2k}\,.$$

   Etant donnés des entiers i et j fixés, montrer que la série de terme général $\partial_t^i \partial_x^j u_k(t,x)$ est normalement convergente sur $[0,T] \times [-L,L]$ pour tous $T, L > 0$. En déduire que la somme $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t,x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

c. Vérifier que l'on construit ainsi une solution non identiquement nulle de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, telle que $u(0,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d. Le résultat de la question précédente est-il contradictoire avec l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ pour ce problème de Cauchy ?

Exercice 8.6 Principe de comparaison pour l'équation de la chaleur

On note $I =]0,1[$. Soit $a \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ telle que $a(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On veut montrer que la solution du problème ci-dessous

$$\begin{cases} \partial_t u - a(x)\partial_x^2 u - a'(x)\partial_x u = 0\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times (0,1)\,, \\ u'(t,0) = u'(t,1) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}_+^*\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

vérifie la propriété suivante : s'il existe $m < M$ tels que $m \leq u_0(x) \leq M$ pour presque tout $x \in I$, alors pour tout $t > 0$ on a encore $m \leq u(t,x) \leq M$ pour presque tout $x \in I$. Dans la suite, on dira qu'un opérateur L sur $L^2(I)$ est positif si, pour tout $u \in L^2(I)$ tel que $u \geq 0$, on a encore $Lu \geq 0$. Enfin, on notera A l'opérateur défini sur $L^2(I)$ par $Au = -(au')'$ pour $u \in D(A) = \{u \in H^2(I) \,:\, u'(0) = u'(1) = 0\}$.

a. On se donne $f \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et $\lambda > 0$. Démontrer que le problème au bord

$$\begin{cases} -a(x)u''(x) - a'(x)u'(x) + \lambda u(x) = f(x)\,, \qquad x \in I\,, \\ u'(0) = u'(1) = 0\,, \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$. Montrer que si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ alors $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On pourra pour cela considérer un $x_0 \in [0,1]$ en lequel u atteint son minimum. En déduire que $(A+\lambda)^{-1}$ est positif.

b. On note $A_\lambda = \lambda - \lambda^2(A+\lambda)^{-1}$. Montrer que l'opérateur $\exp(-tA_\lambda)$ est positif pour $t \geq 0$.

c. En déduire que le semi-groupe engendré par l'opérateur A est positif, puis conclure.