

Cours Analyse semi-classique, 27/10/2020 (1)

$$a \in S(1) \Rightarrow \text{Op}_h^W(a) : L^2 \rightarrow L^2 \text{ borné}$$

- $A : L^2 \rightarrow L^2$ peut être
 - $\rightarrow$ compact
 - $\rightarrow$ Hilbert-Schmidt
 - $\rightarrow$ à trace

Defo A est compact: $\forall (u_j)$ suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$
 $\Rightarrow$ on peut extraire de $(Au_j)_j$ une sous-suite convergente.

Prop: Le spectre d'un op. compact est formé de val. propres $\mu_i \neq 0$ de multiplicités finies, avec comme seul point d'accumulation possible l'origine, et possiblement de 0 comme val. propre.

A compact $\Rightarrow \underbrace{A^*A}$ et AA^* sont compacts.

A compact, B borné $\Rightarrow AB, BA$ sont compacts.

A^*A et AA^* sont auto-adjoints positifs

$\rightarrow$ spectre de A^*A et AA^* est donné par des val. pr. ≥ 0

$$(s_i^2)_{i \geq 1} \quad (s_i \geq 0)$$

$$\underline{s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq s_5 \geq s_6}$$

$(s_i)_{i \geq 1}$: valeurs singulières

Def. A est dit Hilbert-Schmidt $\Leftrightarrow$

(on ordonne les s_j par ordre décroissant)

$$\sum_{j \geq 1} s_j^2 \text{ converge}$$

(HS $\subset$ Compacts)

$\rightarrow$ norme HS : $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{j \geq 1} s_j^2(A)$

HS = op. de Hilbert

Def. Un op. A est dit à trace s'il est compact et que $\sum_{j \geq 1} s_j < \infty$

Rem. si $\sum s_j < \infty \Rightarrow \sum s_j^2 < \infty \Rightarrow$ Trace $\in$ HS

Tr = fonctionnelle Bornée, pour la norme $\|A\|_{Tr} = \sum_{j \geq 1} s_j$

$$\|A\|_{Tr} = \sum_{j \geq 1} s_j$$

③

$$= \sup_{(e_j), (f_j)} \operatorname{Re} \sum_{j \geq 1} \langle e_j, A f_j \rangle$$

$\searrow \quad \swarrow$
2 bases orthog. sur L^2 , indépendantes

• Sur l'espace des op. à trace (= 1^{er} classe de Schatten), on peut / forme linéaire la Trace :

$$\operatorname{Tr} A := \sum_{j \geq 1} \langle e_j, A e_j \rangle \quad (e_j) \text{ b.o.n de } L^2.$$

(ne dépend pas du choix de (e_j)).

$$\operatorname{Tr} A \neq \|A\|_{Tr}$$

$$|\operatorname{Tr} A| \leq \|A\|_{Tr} \longrightarrow \operatorname{Tr} = \text{forme lin. continue p.r à } \|\cdot\|_{Tr}.$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\| \quad \text{norme op.}$$

$$\|A\|_{Tr} \quad \text{norme plus forte} : \underline{\|A\|} \leq \|A\|_{Tr}$$

Ex: projecteur orthogonal Π_V sur $V \subset \ell^2$ de dim finie ⁴

$$\Rightarrow \|\Pi_V\| = \dim(V)$$

Π_V autoadj.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tr } \Pi_V = \dim(V) \end{array} \right.$$

$$1. s_1 = s_2 = \dots = s_{\dim V}, s_{j+\dim V} = 0$$

Prop: si (A_n) compact et $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow A$ compact

• A à trace et B borné $\Rightarrow AB$ et BA à trace

• A est HS $\vee$ " $\Rightarrow$ " " HS.

• Si A et B sont HS $\Rightarrow AB$ est à trace, et

$$\|AB\|_{\text{Tr}} \leq \|B\|_{\text{HS}} \|A\|_{\text{HS}}.$$

$\Rightarrow$ produit scalaire sur HS : $\langle A, B \rangle_{\text{HS}} := \text{tr}(AB^*)$

$$\langle A, A \rangle_{\text{HS}} = \text{tr}(AA^*) = \sum_{j \geq 1} s_j^2 = \|A\|_{\text{HS}}^2.$$

• Cyclicité de la trace : si A à trace et B borné
 $\Rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ si A et B sont HS.

(5)

Si A de rang fini $\text{Ran}(A)$ de dim. fini

$\Rightarrow A|_{\text{Ran}(A)}$ peut être représentée par 1 matrice

$\Rightarrow \text{Tr } A = \text{Tr } A|_{\text{Ran}(A)} = \text{Tr de la matrice.}$

• Sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$A : L^2 \rightarrow L^2$ peut être représenté par un noyau distribution

$K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

Prop: A est dans $HS(L^2(\mathbb{R}^d))$ ssi $K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et

on a $\|A\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$

$$\text{Tr}(A^*A) = \int |K(x,y)|^2 dx dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{K(y,x)} K(x,y) dx dy$$

car A^* a comme noyau $\overline{K(y,x)}$

$$\text{cf. } \text{Tr}(M^*M) = \sum_{i,j} \overline{M_{ji}} M_{ji}$$

$K_A \rightarrow$ symbole de Weyl de A

$\uparrow$ transf. de Fourier partiel

$$K(x, y) = \int a\left(\frac{x+y}{2}, \zeta\right) e^{\frac{i}{h} \zeta \cdot (x-y)} \frac{d\zeta}{(2\pi h)^d}$$

$a \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{2d})$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^d} \left(\mathcal{F}_h^{-1} a \right) \left(\frac{x+y}{2}, z = \frac{x-y}{h} \right)$$

$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{h} \right)$ a un jacobien $= 1$,
Parseval

$$\Rightarrow \int |K(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int |\mathcal{F}_h^{-1} a|^2(x_+, x_-) dx_+ dx_-$$

$$\stackrel{\text{Parseval}}{\uparrow} \frac{1}{(2\pi h)^d} \int |a(x_+, \zeta)|^2 dx_+ d\zeta$$

Corollaire:

$a \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{2d}) \Rightarrow \mathcal{O}_{ph}^W(a) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ n'étend en 1 op. $L^2 \rightarrow L^2$
qui est Hilbert-Schmidt

• Si $a \in \mathcal{S}(1) \Rightarrow \mathcal{O}_{ph}^W(a)$ est Hilbert-Schmidtssi $a \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

• Si $a \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{2d}) \Rightarrow \mathcal{O}_{ph}^W(a) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ s'étend comme un HS: $L^2 \rightarrow L^2$ ssi $a \in L^2$.

⑥

⑦

Or a l'identité :

$$\|O_{p_h}^W(a)\|_{HS}^2 = \int |a(x,y)|^2 \frac{dx dy}{(2\pi h)^d} = \frac{1}{(2\pi h)^d} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2$$

$$\sim \frac{1}{(2\pi h)^d} \sup |a|^2 \times \text{Vol}(\text{supp}(a))$$

Corollaire : Supposons qu'il fonction d'ordre $m(p)$ soit dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

Alors, $\forall a \in \underline{S(m)}$, les op. $(O_{p_h}^W(a))_{h>0}$ sont HS, donc compacts.
De plus $\|O_{p_h}^U(a)\|_{HS} \leq C_a h^{-d/2}$

$$|a(p)| \leq C m(p) \Rightarrow \int |a(p)|^2 \leq C \underbrace{\int m(p)^2 dp}_{\text{fini}}$$

Si $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \Rightarrow \text{tr } A_K = \int K(x, x) dx$

$\rightarrow$ Prop si $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ (cf. $\text{tr } \Pi = \sum \Pi_{ii}$)
 $\forall t \in [0,1], \forall h \in [0,1], O_{p_h}^t(a)$ est à trace, et
 $\left| \text{tr}(O_{p_h}^t(a)) \right| = \frac{1}{(2\pi h)^d} \left| \int a(x, \tilde{x}) dx d\tilde{x} \right|$

⑧

Thm 1 Si une fonction d'ordre m satisfait $m(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} 0$
 alors, $\forall a \in S(m)$, $\forall h \in (0,1]$, $\forall t \in [0,1]$, l'opérateur
 $O_p^t(a)$ est compact : $L^2 \rightarrow L^2$.

Important, lien entre prop. de χ du symbole $a \in S(m)$,
 et propriétés spectrales des ops $O_p^t(a)$.

Pr Utilisons la partition l'unité de $\mathbb{R}^d$

$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n$. Chaque $O_p^t(a_n)$ est HS, donc compact.

$A_M = \sum_{|n| \leq M} a_n$ est aussi compact, $\forall M > 0$.

Il suffit de montrer que $A_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} A$ au sens de la norme d'opérateur:

les compacts forment un idéal fermé pour $\|\cdot\|_{B(L^2)}$ $\Rightarrow A$ est compact.

$\left\| \begin{array}{c} \|A_M - A\|_{B(L^2)} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \\ \hline \end{array} \right\|$ (+ fort que la convergence forte $A_M \rightarrow A$).

$$B_M = A - A_M = \sum_{|n| > M} a_n$$

⑨

$$\|A_n^\Phi A_{n'}\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leq C_{a,d} m(n) m(n') \quad |n - n'| \leq 10R_d$$

$$\|A_n^\Phi A_{n'}\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leq C_{a,k} h^{k-2d} \frac{m(n) m(n')}{\langle n - n' \rangle^k} \quad , |n - n'| \geq 10R_d$$

$$\forall n: \underbrace{\left| \sum_{|n'| > M} \|A_n^\Phi A_{n'}\|^{1/2} \right|}_{\substack{(k/2 > 2d \Rightarrow \sum \text{converge})}} \leq C_{a,d} \sum_{|n'| > M} \frac{\sqrt{m(n) m(n')}}{\langle n - n' \rangle^{k/2}} \leq C'_{a,d} m(n)$$

$$\left(\sum_{n'} \frac{m(n')}{\langle n - n' \rangle^{k/2}} \leq C m(n) \right)$$

$$\sup_n \underbrace{\sum_{|n'| > M} \|A_n^\Phi A_{n'}\|^{1/2}}_{|n| \geq M} \leq C'_{a,d} \underbrace{m(n)}_{\substack{\xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \\ M \rightarrow \infty}}$$

$$\text{control } \|B_M\| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

- Si $m \not\rightarrow 0$, l'op $\mathcal{O}_p(a)$ n'est plus forcément compact:
 ex: $m(p) = 1$, $a \in S(1)$, $\mathcal{O}_p(a)$ est borné, pas forcément compact
 ex: $a \equiv 1 \Rightarrow \mathcal{O}_p(a) = \underline{\underline{Id}}$ non compact.

(10)

Prop². A op: $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, de noyau $K(x, y)$

Supposons que $K \in C^{2d+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et que ses dérivées $\partial_{x,y}^\alpha K \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Alors l'op. correspondant A_K est

à trace, et $\|A\|_{Tr} \leq C_d \sum_{|\alpha| \leq 2d+1} \|\partial_{x,y}^\alpha K\|_{L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$.

De plus on a alors $K(x, x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et

$$\text{tr}(A) = \int K(x, x) dx.$$

$$K(x, y) \longrightarrow a(x)$$

Th^{me}: Supp. que $a \in \mathcal{S}'(1)$, satisfait $\sum_{|\alpha| \leq 2d+1} \|\partial^\alpha a\|_{L^1} \leq C$,

unif^t p/r $h \in (0, 1]$

Alors les ops $O_{P_h}^R(a)$ est à trace, et satisfait

$$\rightarrow \|O_{P_h}^R(a)\|_{Tr} \leq C_d \underbrace{h^{-d} \sum_{|\alpha| \leq 2d+1} h^{|\alpha|/2} \|\partial^\alpha a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}}_{\text{}} \quad \text{---}$$

$$\rightarrow \text{tr } O_{P_h}^R(a) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int a(x, \xi) dxd\xi \rightarrow h^{-d} (\|a\|_{L^1} + o(h))$$

Etude quantitative des ops. Ψ Diff. semi-différentielles.

(11)

- Invertibilité d'ops Ψ Diff elliptiques, inégalité de Gårding
 $a \mapsto \text{Op}_h(a)$. Peut-on inverser cet op ?

Def : Un symbole $a \in S(1)$ est dit (semi-classique) elliptique
dans $S(1)$ si : $|a(x;h)| \geq \gamma > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{2d}$, $\forall h \in (0,1]$.

→ on va construire une paramétrice pour $\text{Op}_h(a)$ (un quasi-inverse)
qu'on pourra ensuite transformer en op. inverse.

Thm Supposons $a \in S(1)$ est elliptique ^{indép. de h} . Alors, pour $h > 0$ assez petit, $\text{Op}_h(a) : L^2 \rightarrow L^2$ est invertible, et son inverse est un OPD de symbole $b = b(h) \in S(1)$. Ce symbole admet 1 dev^t asymptotique :
 $b \sim \sum b_j h^j$, de symbole principal $b_0 = \frac{1}{a}$.

P_r: construction de b ordre par ordre (construction d'1 paramétrice)

(12)

On commence par 1 Ansatz:

$$b_0 = \frac{1}{a}$$

$$\text{ellipticité de } a \Rightarrow \underline{b_0 \in S(1)}$$

$$|a| \geq \gamma \Rightarrow \left| \frac{1}{a} \right| \leq \frac{1}{\gamma} \quad |b_0| \leq \frac{1}{\gamma}$$

$$\left| \partial \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{\partial a}{a^2} \right| \leq \frac{C}{\gamma^2}$$

$$\partial^2 \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{\partial^2 a}{a^2} + \frac{2 \partial a \partial a}{a^3}$$

$$a \neq b_0 = \frac{1}{a \times \frac{1}{a}} + r_1, \quad r_1 \in h S(1) \quad (\text{et } \neq h \text{ dans } S(1), \text{ d'où } a \text{ l'ordre } 1)$$

$$\Rightarrow \text{Pour } \underline{h a \neq h b_0 + h r_1}$$

$$\|O_p(r_1)\| \rightarrow O(h)$$

$$\|O_p(r_1)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ on peut inverser $I + O_p(r_1)$ par série de Neumann

$$\Rightarrow O_p(a) \underbrace{O_p(b_0)}_h \underbrace{(I + O_p(r_1))^{-1}}_{\text{inverse de } a \text{ droit}} = I$$

$$\text{inverse de } O_p(a), \text{ noté } B_h^R, \quad \|B_h^R\| \leq C$$

→ pour h assez petit on a I inversible à gauche

(13)

$$B_h^L = (I + \underbrace{O_p(r_1)}_{\text{}})^{-1} O_p(b_0) \quad , \quad \text{avec}$$

$$b_0 \neq a = 1 + r_2$$

$$B_h^L = B_h^L \underbrace{O_p(a)}_1 B^R = B^R = \underline{\underline{B}}.$$

Série de Neumann: on veut inverser $(I + R)$ sur L^2 .

Si $\|R\| < 1 \Rightarrow (I + R)$ est inversible,

$$(I + R)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j R^j$$

$$\|(I + R)^{-1}\| \leq (1 - \|R\|)^{-1}.$$

$$B = O_p(a) (I + O_p(r_1))^{-1}$$

$$B = O_p(a) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j O_p(r_1)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j O_p(a) \underbrace{O_p(r_1)^j}_{1^j}$$

$= O_p(b)$. $\hookrightarrow \in S(1)$? $r_1 \in h S(1)$

Théorème de Beal: caractérise les symboles de $S(1)$ à partir de propri. de l'opér.

$$\text{ad}_{O_p(r_1)}, \text{ad}_{O_p(r_1)} B$$

(14)

$$B \circ_p(a) = \text{Id}$$

$$\circ_p(a) B =$$

$$\Rightarrow [\circ_p(h), B \circ_p(a)] = 0$$

$$[\circ_p(h), B] \underbrace{\circ_p(a) B}_I = B [\circ_p(h), \circ_p(a)] B = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{[\circ_p(h), B]}_{\text{ad}_{\circ_p(h)} B} = - B \underbrace{[\circ_p(h), \circ_p(a)] B}_{\substack{O(h^1)_{L \rightarrow L} \\ O(h^1)_{L \rightarrow L}}} = \underbrace{O(h^1)_{L \rightarrow L}}_{O(h^1)_{L \rightarrow L}}$$

Itérativement $\forall n \geq 0$

$$\text{ad}_{\circ_p(h_n)} \cdots \text{ad}_{\circ_p(h_1)} B = O(h^n)_{L \rightarrow L}$$

Back

$$\longrightarrow b \in \mathcal{S}(1).$$

$$r_1 \in \mathfrak{h} \mathcal{S}(1)$$

$$\Rightarrow b_1 := -\frac{r_1}{a} = -r_1 b_0$$

$$\Rightarrow a \# b_1 = -r_1 + \underbrace{O(h^1)}_{r_2} \mathcal{S}(1)$$

symbole sous-principal de b

$\longrightarrow$ on construit $b_1, b_2, \dots$

$$b_j \in \mathfrak{h} \mathcal{S}(1), \text{ de sorte que } a \# (b_0 + b_1 + \dots + b_N) = \mathbb{1} + \underbrace{O(h^{N+1})}_{r_{N+1}} \mathcal{S}(1)$$

$$b_j = -r_j b_0.$$

C'est une alternative: se servir de la série de Neumann:

(15)

$$b \sim b_0 \#_1 (1 - \underbrace{r_1}_{\substack{\text{dépend de } h, \\ \text{est sous la forme d'une somme d'1 de 2d ordres}}}) + \underbrace{r_1 \# r_1}_{\substack{\text{dépend de } h, \\ \text{est sous la forme d'une somme d'1 de 2d ordres}}} + \dots$$

$$a \# b_0 = ab_0 + \frac{i\hbar}{2} \{a, b_0\} + \hbar^2 a \overleftrightarrow{D}^2 b_0 + \dots$$

$$r_1 = \sum_{j \geq 1} \hbar^j r_{1,j}$$

$$r_1 \# r_1 = \sum_{j \geq 2} \hbar^j r_{11,j}$$

$$r_1 \# r_1 \# r_1 = \sum_{j \geq 3} \hbar^j r_{111,j}$$

$O(\hbar^4)$

(chaque terme $\hbar^j$ de b ne reçoit qu'un nombre fini de termes.)

(16)

→ permet de calculer le résolvant de $Q_p(a)$,

$$(z - Q_p(a))^{-1}, \quad \text{si } (z - a) \text{ est elliptique}$$

$$\underbrace{(\partial_p(z - a))^{-1}}_{|a - z| \geq \gamma}$$

$$a \in S(1) \Rightarrow a \cdot z \in S(1)$$

→ pour h assez petit, $(z - Q_h(a))^{-1}$ existe, et est dans $\Psi_h(1)$.

⊢ Dans $S(m)$ pour m une fonction d'ordre arbitraire.

Def: $a \in S(m)$ est elliptique (dans cette classe) si $\exists \delta > 0$

$$\left[\begin{array}{l} \forall \rho \in \mathbb{R}^{2d}, \forall h \in (0, 1], \\ C_{m(\rho)} \geq \underline{|a(\rho)| \geq \delta m(\rho)}. \end{array} \right.$$

Thm: Si $a \in S(m)$ est elliptique, alors pour h assez petit,

$$\left[\exists b \in S(m') \text{ t.q. } a \#_h b = b \#_h a = 1. \right.$$

→ $Q_h(a): \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ est inversible, d'inverse $Q_h(b)$.

(17)

Preuve du thme:

$$b_0 = \frac{1}{a} \in S(m^{-1}) \Rightarrow a \neq b_0 = \overbrace{1 + r_1}^{S(1)}$$

$\downarrow$
 m

$\downarrow$
 $\frac{1}{m}$

$\downarrow$
 $\in h S(1)$

$$h < h_0 \Rightarrow \|O_p(r_1)\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 < \frac{1}{2}$$

→ inversible, de symbole $1 - r_1 + r_1 + r_1 - \dots = c$ $\underbrace{n}_{S(1)}$

$$O_p(r_1) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

et la série de Neumann fournit $1^{op} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

$$(1 + O_p(r_1))^{-1} \in \mathcal{H}_h^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow b_0 \neq c = \underline{b} \in S(m^{-1}).$$

$\downarrow$
 $S(m^{-1})$

$\downarrow$
 $S(1)$

$$a \neq b \neq c = 1$$

• $a \in \mathcal{S}(m) \rightarrow$ quel domaine "optimal" pour $O_p(a)$?

—, espaces de Sobolev semi-dominiques, arrivés à des fonctions d'ordre.

FIN DE SEANCE